

# 회전하는 환상 디스크의 면내 고유진동 해석

## In-plane Natural Vibration Analysis of a Rotating Annular Disk

송 승 관\*·곽 동 희\*·김 창 부†

Seung Gwan Song, Dong-Hee Kwak and Chang-Boo Kim

(2008년 12월 26일 접수 ; 2009년 1월 30일 심사완료)

**Key Words** : Rotating Disk(회전 디스크), In-plane Natural Vibration(면내 고유진동), Finite Element(유한 요소), Finite Deformation(유한 변형), Number of Nodal Diameter(절 직경 수)

### ABSTRACT

In this paper, we present the equations of motion by which the natural vibration of a rotating annular disk can be analyzed accurately. These equations are derived from the theory of finite deformation and the principle of virtual work. The radial displacements of annular disk at the steady state where the disk is rotating at a constant angular velocity are determined by non-linear static equations formulated with 1-dimensional finite elements in radial direction. The linearized equations of the in-plane vibrations at the disturbed state are also formulated with 1-dimensional finite elements in radial direction along the number of nodal diameters. They are expressed as in functions of the radial displacements at the steady state and the disturbed displacements about the steady state. In-plane static deformation modes of an annular disk are used as the displacement functions for the interpolation functions of the 1-dimensional finite elements. The natural vibrations of an annular disk with different boundary conditions are analyzed by using the presented model and the 3-dimensional finite element model to verify accuracy of the presented equations of motion. Its results are compared and discussed.

### 1. 서 론

공학 구조물에서 중요한 요소 중에 하나인 디스크의 진동에 관하여 오래 전부터 많은 연구가 수행되어 왔다. 특히 회전하는 디스크의 고유진동 특성, 즉 고유진동수와 고유모드 형상의 파악은 회전 기계장치를 설계하는 데에 있어서 필수적인 사항이다. 또한 회전 기계장치의 정밀한 진동 튜닝을 위해서는 그 주요 구성품인 디스크의 진동특성을 정밀하게 파악해야 한다. 전형적인 회전 기계장치로는 터빈의 익차, 에너지 저장장치의 프라이 휠 및 차량의 제동 디스크 등을 들 수 있고, 특히 30년 전부터 개발되어온 컴퓨터의 프로

피 디스크, 하드 디스크 및 콤팩트 디스크 등이 있다.

디스크의 고유진동에 관한 연구는 주로 굽힘 진동인 면외 진동에 관하여 오래 전부터 많은 연구자에 의해서 수행되어 왔다<sup>(1-7)</sup>. 그러나 면내진동에 관한 연구는 면외 진동에 비해서 많은 편은 아니지만 최근에 많이 수행되었으며 대표적인 연구 논문은 참고문헌 (8~12)와 같다.

이 논문에서는 일정한 각속도로 회전하고 있는 환상 디스크의 운동방정식은 유한 변형 이론과 가상일의 원리로부터 유도되고, 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태(steady state)에서의 환상 디스크의 반경방향 변위는 반경방향 1차원 유한 요소를 사용하여 구축되는 정적 비선형 방정식으로부터 구해진다. 또한 교란상태(disturbed state)에서의 선형화된 면내 진동방정식은 절 직경 수에 따르는 반경방향 1차원 유한 요소를 사용하여 구축되고 정상상

† 교신저자; 정희원, 인하대학교 공과대학 기계공학부  
E-mail : kimcb@inha.ac.kr

Tel : (032)860-7383, Fax : (032)868-1716

\* 인하대학교 대학원 기계공학과

태에서의 반경방향 변위 및 정상상태로부터 교란된 변위의 함수로 표현된다. 반경방향 1차원 유한 요소의 보간 함수를 도출하기 위하여 환상 디스크의 면내 정적 변형모드를 변위함수로 사용한다. 제시된 운동방정식의 정밀성을 검증하기 위해서 경계조건이 서로 다른 디스크의 고유진동을 제시된 모델 및 3차원 유한 요소 모델을 사용하여 해석하고, 그 결과를 비교하고 검토한다.

## 2. 회전하는 디스크의 운동과 변형

디스크 좌표계  $Oxyz$ 는 내경  $a$ , 외경  $b$ , 축 방향 두께  $h$ 를 갖는 균일한 디스크의 중심에 고착되어  $z$ -축 방향으로 일정한 각속도  $\Omega$ 를 가지고 회전하고 있다. 반경 방향으로  $r$ ,  $x$ -축에서 원주 방향으로  $\theta$ 에 위치하면서 중간면에 수직한 단선(cross line)의 기준 좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 는 직선의 중심점인  $C$ 점을 원점으로 하고 반경 방향  $\xi$ , 접선 방향  $\eta$ , 축 방향  $\zeta$ 의 축을 갖는다.

디스크가 변형할 때에 단선은 변형하지 않고 직선을 유지한다고 가정한다. 단선에 고착되어 움직이는 단선 좌표계  $C'\xi'\eta'\zeta'$ 는 단선 기준 좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 와 일치한 상태에서  $\xi$  방향으로  $u_\xi$ ,  $\eta$  방향으로  $u_\eta$  만큼 변위되며  $u_\xi$ ,  $u_\eta$ 는  $r$ ,  $\theta$  및 시간  $t$ 의 함수이다. 따라서  $(r, \theta)$ 에 위치한 단선 상에서  $z$ 에 위치한 질점  $P$ 의 변위는 다음과 같다.

$$\vec{u}_P = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta \quad (1)$$

변형 후의 질점  $P$ 의 절대위치, 절대가속도 및 가상변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{r}_P = (r + u_\xi) \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + z \vec{e}_\zeta \quad (2)$$

$$\vec{a}_P = \{-\Omega^2(r + u_\xi) - 2\Omega\dot{u}_\eta + \ddot{u}_\xi\} \vec{e}_\xi + \{-\Omega^2 u_\eta + 2\Omega\dot{u}_\xi + \ddot{u}_\eta\} \vec{e}_\eta \quad (3)$$

$$\delta \vec{r}_P = \delta u_\xi \vec{e}_\xi + \delta u_\eta \vec{e}_\eta \quad (4)$$

따라서 밀도가  $\rho$ 인 회전하는 디스크의 가속도량에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta A = \int_V [\delta \vec{r}_P \cdot \vec{a}_P] \rho dV \quad (5)$$

좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 에 대한 변위 구배행렬  $[h]$ 의 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} h_{\xi\xi} &= u_{\xi,r}, & h_{\xi\eta} &= \frac{1}{r}(u_{\xi,\theta} - u_\eta), & h_{\xi\zeta} &= 0 \\ h_{\eta\xi} &= u_{\eta,r}, & h_{\eta\eta} &= \frac{1}{r}(u_{\eta,\theta} + u_\xi), & h_{\eta\zeta} &= 0 \\ h_{\zeta\xi} &= 0, & h_{\zeta\eta} &= 0, & h_{\zeta\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

좌표계  $C\xi\eta\zeta$ 에 대한 라그랑주 변형도 행렬은 다음과 같다.

$$[\epsilon] = \frac{1}{2}([h] + [h]^T) + \frac{1}{2}[h]^T[h] \quad (7)$$

$\epsilon_{\xi\xi}$ ,  $\gamma_{\xi\xi}(= \epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\xi\xi})$ ,  $\gamma_{\eta\xi}(= \epsilon_{\eta\xi} + \epsilon_{\xi\eta})$ 는 0이 되므로 평면응력을 고려하여 키르히호프 응력과 라그랑주 변형도의 관계를 영 탄성계수  $E$ , 푸아송 비  $\nu$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \bar{E}(\epsilon_{\xi\xi} + \nu\epsilon_{\eta\eta}), \\ \sigma_{\eta\eta} &= \bar{E}(\nu\epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\eta\eta}), \\ \sigma_{\xi\eta} &= G\gamma_{\xi\eta} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $\bar{E} = E/(1-\nu^2)$ ,  $G = E/2(1+\nu)$ .

따라서 디스크의 가상변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta V = \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-h/2}^{h/2} [\delta\epsilon_{\xi\xi}\sigma_{\xi\xi} + \delta\epsilon_{\eta\eta}\sigma_{\eta\eta} \\ + \delta\gamma_{\xi\eta}\sigma_{\xi\eta}] r dz d\theta dr \end{aligned} \quad (9)$$

외력을 받지 않으면서 일정한 각속도로 회전하고 있는 디스크에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta A + \delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta \quad (10)$$

## 3. 회전하는 디스크의 지배방정식

### 3.1 정상상태에서의 평형방정식

일정한 각속도  $\Omega$ 로 회전하고 있는 디스크의 정상상태에서의 변위는 디스크 형상의  $z$ 축에 대한 대칭성 및  $r-\theta$  면에 대한 대칭성을 고려하면 다음과 같다.

$${}^s u_\xi = {}^s u_\xi(r), \quad {}^s u_\eta = 0 \quad (11)$$

상기 식에서 변수의 왼쪽 위첨자  $s$ 는 정상상태에서의 변수 값을 나타낸다.

외력을 받지 않으면서 회전하는 디스크의 정상상태에서의 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$${}^s\delta A + {}^s\delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} {}^s\delta A &= \int_{r=a}^b 2\pi\rho h [\delta u_\xi \{-\Omega^2(r+{}^s u_\xi)r\}] dr \\ {}^s\delta V &= \int_{r=a}^b 2\pi h [\delta u_{\xi,r}(1+{}^s u_{\xi,r}){}^s\sigma_{\xi\xi} \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\delta u_\xi(r+{}^s u_\xi){}^s\sigma_{\eta\eta}] r dr \end{aligned}$$

$r$ 의 함수인 변위  ${}^s u_\xi$ 를 절점변위벡터  ${}^s u$ 와 보간 함수  $N(r)$ 을 사용하여 다음과 같이 표현하면,

$${}^s u_\xi = \{N\}^T \{s u\} \quad (13)$$

식(12)로부터 얻어지는 정상상태에서의 비선형 평형방정식은 다음과 같다.

$$[K_S] \{s u\} = \{s f_C\} \quad (14)$$

여기서

$$\begin{aligned} {}^s f_C &= \int_{r=a}^b \pi\rho h \Omega^2 \{N\} r^2 dr \\ K_S &= K_0 + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{4}K_2 + \frac{1}{2}K_\sigma - \Omega^2 M_C \\ K_0 &= \int_{r=a}^b \pi h \bar{E} [N_{,r} N_{,r}^T + \nu \frac{1}{r} (N_{,r} N^T + N N_{,r}^T) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} N N^T] r dr \\ K_1 &= \int_{r=a}^b \pi h \bar{E} [2 {}^s u_{\xi,r} N_{,r} N_{,r}^T + 2 {}^s u_\xi \frac{1}{r^3} N N^T \\ &\quad + \nu ({}^s u_{\xi,r} + \frac{1}{r} {}^s u_\xi) \frac{1}{r} (N_{,r} N^T + N N_{,r}^T)] r dr \\ K_2 &= \int_{r=a}^b \pi h \bar{E} [{}^s u_{\xi,r}^2 N_{,r} N_{,r}^T + {}^s u_\xi^2 \frac{1}{r^4} N N^T \\ &\quad + \nu {}^s u_{\xi,r} {}^s u_\xi \frac{1}{r^2} (N_{,r} N^T + N N_{,r}^T)] r dr \\ K_\sigma &= \int_{r=a}^b \pi h [{}^s\sigma_{\xi\xi} N_{,r} N_{,r}^T + \frac{1}{r^2} {}^s\sigma_{\eta\eta} N N^T] r dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_C &= \int_{r=a}^b \pi\rho h [N N^T] r dr \\ {}^s u &= ({}^s u_{\xi_1} \quad {}^s u_{\xi_2} \quad \dots \quad {}^s u_{\xi_m})^T \\ m &= \text{Number of free nodes} \end{aligned}$$

### 3.2 교란상태에서의 진동방정식

정상상태로부터 교란된 변위는 다음과 같이 정의되며 미소하다고 가정한다.

$${}^d u_\xi = u_\xi - {}^s u_\xi, \quad {}^d u_\eta = u_\eta - {}^s u_\eta \quad (15)$$

상기 식에서 변수의 왼쪽 위첨자  $d$ 는 정상상태로부터 교란된 변수 값을 나타내며, 정상상태에서의 미분연산자(differential operator)처럼 사용된다.

교란상태에서의 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$${}^d\delta A + {}^d\delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} {}^d\delta A &= \delta A - {}^s\delta A \approx {}^d(\delta A) \\ &= \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho h [\delta u_\xi (-\Omega^2 {}^d u_\xi - 2\Omega {}^d \dot{u}_\eta + {}^d \ddot{u}_\xi) \\ &\quad + \delta u_\eta (-\Omega^2 {}^d u_\eta + 2\Omega {}^d \dot{u}_\xi + {}^d \ddot{u}_\eta)] r d\theta dr \\ {}^d\delta V &= \delta V - {}^s\delta V \approx {}^d(\delta V) \\ &= \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} h [(\delta u_{\xi,r} {}^d u_{\xi,r} + \delta u_{\eta,r} {}^d u_{\eta,r}) {}^s\sigma_{\xi\xi} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} [(\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta) ({}^d u_{\xi,\theta} - {}^d u_\eta) \\ &\quad + (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi) ({}^d u_{\eta,\theta} + {}^d u_\xi)] {}^s\sigma_{\eta\eta}] r d\theta dr \\ &\quad + \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} [\delta u_{\xi,r} (1+{}^s u_{\xi,r}) {}^d N_{\xi\xi} \\ &\quad + \frac{1}{r} (\delta u_{\eta,\theta} + \delta u_\xi) \left(1 + \frac{1}{r} {}^s u_\xi\right) {}^d N_{\eta\eta} \\ &\quad + \left\{ \delta u_{\eta,r} \left(1 + \frac{1}{r} {}^s u_\xi\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} (\delta u_{\xi,\theta} - \delta u_\eta) (1+{}^s u_{\xi,r}) \right\} {}^d N_{\xi\eta}] r d\theta dr \\ {}^d N_{\xi\xi} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} {}^d\sigma_{\xi\xi} dz \\ &= \bar{E} h [{}^d u_{\xi,r} (1+{}^s u_{\xi,r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nu \frac{1}{r} ({}^d u_{\eta, \theta} + {}^d u_{\xi}) \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right) \\
{}^d N_{\eta\eta} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} {}^d \sigma_{\eta\eta} dz \\
&= \bar{E}h \left[ \nu {}^d u_{\xi, r} (1 + {}^s u_{\xi, r}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} ({}^d u_{\eta, \theta} + {}^d u_{\xi}) \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right) \right] \\
{}^d N_{\xi\eta} &= \int_{z=-h/2}^{h/2} {}^d \sigma_{\xi\eta} dz \\
&= Gh \left[ {}^d u_{\eta, r} \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r} ({}^d u_{\xi, \theta} - {}^d u_{\eta}) (1 + {}^s u_{\xi, r}) \right]
\end{aligned}$$

디스크의 면내변위를 다음과 같이 푸리에 급수로 표현하고,

$$\begin{aligned}
{}^d u_{\xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} ({}^d u_{\xi Cn} \cos n\theta + {}^d u_{\xi S_n} \sin n\theta), \\
{}^d u_{\eta} &= \sum_{n=0}^{\infty} ({}^d u_{\eta Cn} \cos n\theta + {}^d u_{\eta S_n} \sin n\theta)
\end{aligned} \tag{17}$$

$r$ 의 함수인 변위  ${}^d u_{\xi Cn}$ ,  ${}^d u_{\xi S_n}$ ,  ${}^d u_{\eta Cn}$  및  ${}^d u_{\eta S_n}$ 을 다음과 같이 절점변위벡터  ${}^d u_n$ 와 보간 함수  $N_{\xi Cn}(r)$ ,  $N_{\xi S_n}(r)$ ,  $N_{\eta Cn}(r)$  및  $N_{\eta S_n}(r)$ 을 사용하여 표현하면,

$$\begin{aligned}
{}^d u_{\xi Cn} &= N_{\xi Cn}(r) {}^T d u_n, \quad {}^d u_{\xi S_n} = N_{\xi S_n}(r) {}^T d u_n, \\
{}^d u_{\eta Cn} &= N_{\eta Cn}(r) {}^T d u_n, \quad {}^d u_{\eta S_n} = N_{\eta S_n}(r) {}^T d u_n
\end{aligned} \tag{18}$$

식 (16)으로부터 교란상태에서의 운동방정식이 각 각의 절 직경 수(number of nodal diameters)  $n$ 에 대하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
[M_n] \{d'' u_n\} + 2\Omega [M_{Gn}] \{d' u_n\} \\
+ [K_n - \Omega^2 M_n] \{d u_n\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{19}$$

여기서

$$\begin{aligned}
M_n &= \int_{r=a}^b \pi \rho h [N_{\xi Cn} N_{\xi Cn}^T + N_{\xi S_n} N_{\xi S_n}^T \\
&\quad + N_{\eta Cn} N_{\eta Cn}^T + N_{\eta S_n} N_{\eta S_n}^T] r dr \\
M_{Gn} &= \int_{r=a}^b \pi \rho h [-N_{\xi Cn} N_{\eta Cn}^T - N_{\xi S_n} N_{\eta S_n}^T \\
&\quad + N_{\eta Cn} N_{\xi Cn}^T + N_{\eta S_n} N_{\xi S_n}^T] r dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n &= \int_{r=a}^b \pi h (r^s \sigma_{\xi\xi} [N_{\xi Cn, r} N_{\xi Cn, r}^T + N_{\eta Cn, r} N_{\eta Cn, r}^T \\
&\quad + N_{\xi S_n, r} N_{\xi S_n, r}^T + N_{\eta S_n, r} N_{\eta S_n, r}^T] \\
&\quad + \frac{1}{r} {}^s \sigma_{\eta\eta} [(n N_{\xi S_n} - N_{\eta Cn})(n N_{\xi S_n} - N_{\eta Cn})^T \\
&\quad + (n N_{\eta S_n} + N_{\xi Cn})(n N_{\eta S_n} + N_{\xi Cn})^T \\
&\quad + (n N_{\xi Cn} + N_{\eta S_n})(n N_{\xi Cn} + N_{\eta S_n})^T \\
&\quad + (n N_{\eta Cn} - N_{\xi S_n})(n N_{\eta Cn} - N_{\xi S_n})^T] \\
&\quad + \bar{E}r (1 + {}^s u_{\xi, r})^2 [N_{\xi Cn, r} N_{\xi Cn, r}^T + N_{\xi S_n, r} N_{\xi S_n, r}^T] \\
&\quad + \bar{E}\nu (1 + {}^s u_{\xi, r}) \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right) [N_{\xi Cn, r} (n N_{\eta S_n} + N_{\xi Cn})^T \\
&\quad + (n N_{\eta S_n} + N_{\xi Cn}) N_{\xi Cn, r}^T \\
&\quad - N_{\xi S_n, r} (n N_{\eta Cn} - N_{\xi S_n})^T \\
&\quad - (n N_{\eta Cn} - N_{\xi S_n}) N_{\xi S_n, r}^T] \\
&\quad + \bar{E} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right)^2 [(n N_{\eta S_n} + N_{\xi Cn})(n N_{\eta S_n} + N_{\xi Cn})^T \\
&\quad + (n N_{\eta Cn} - N_{\xi S_n})(n N_{\eta Cn} - N_{\xi S_n})^T] \\
&\quad + G \frac{1}{r} (1 + {}^s u_{\xi, r})^2 [(n N_{\xi S_n} - N_{\eta Cn})(n N_{\xi S_n} - N_{\eta Cn})^T \\
&\quad + (n N_{\xi Cn} + N_{\eta S_n})(n N_{\xi Cn} + N_{\eta S_n})^T] \\
&\quad + G (1 + {}^s u_{\xi, r}) \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right) [N_{\eta Cn, r} (n N_{\xi S_n} - N_{\eta Cn})^T \\
&\quad + (n N_{\xi S_n} - N_{\eta Cn}) N_{\eta Cn, r}^T \\
&\quad - N_{\eta S_n, r} (n N_{\xi Cn} + N_{\eta S_n})^T \\
&\quad - (n N_{\xi Cn} + N_{\eta S_n}) N_{\eta S_n, r}^T] \\
&\quad + Gr \left( 1 + \frac{1}{r} {}^s u_{\xi} \right)^2 [N_{\eta Cn, r} N_{\eta Cn, r}^T + N_{\eta S_n, r} N_{\eta S_n, r}^T] ) dr \\
{}^d u_n &= \begin{Bmatrix} {}^d u_{Cn} \\ {}^d u_{S_n} \end{Bmatrix} \\
{}^d u_{Cn} &= ({}^d u_{\xi Cn1} \quad {}^d u_{\eta S_{n1}} \quad \cdots \quad {}^d u_{\xi Cnm} \quad {}^d u_{\eta S_{nm}})^T \\
{}^d u_{S_n} &= ({}^d u_{\xi S_{n1}} \quad -{}^d u_{\eta C_{n1}} \quad \cdots \quad {}^d u_{\xi S_{nm}} \quad -{}^d u_{\eta C_{nm}})^T
\end{aligned}$$

진동수  $\omega_n$ , 절 직경 수  $n$ 의 순환대칭모드로 진동하는 디스크의 절점 변위를 다음과 같이 표현하면,

$${}^d u_n = \text{Re} \{ U_n e^{j\omega_n t} \} \tag{20}$$

식 (19)로부터 다음과 같은 고유진동방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
[(j\omega_n)^2 M_n + (j\omega_n) 2\Omega M_{Gn} \\
+ (K_n - \Omega^2 M_n)] \{U_n\} = \{0\}
\end{aligned} \tag{21}$$

여기서  $j = \sqrt{-1}$ 이며,  $M_n$  및  $K_n$ 는 대칭행렬이고  $M_{Cn}$ 는 사대칭(skew symmetric)행렬이다.

식 (21)을 만족하는 고유진동수  $\omega_n$ 는 실수이며, 부호가 다른 고유진동수가 존재한다. 또한, 고유진동수  $\omega_n \geq 0$ 에 대응하는 고유벡터가  $U_n$ 이면 고유진동수  $-\omega_n$ 에 대응하는 고유벡터는  $U_n$ 의 복소 공액  $\bar{U}_n$ 이다.

디스크의 절점 변위를 다음과 같이 표현하면,

$$\begin{aligned} \{d_{u_n}\} &= \frac{1}{2} \left\{ U_n e^{j\omega_n t} + \bar{U}_n e^{-j\omega_n t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{Bmatrix} U_{Cn} \\ U_{Sn} \end{Bmatrix} e^{j\omega_n t} + \begin{Bmatrix} \bar{U}_{Cn} \\ \bar{U}_{Sn} \end{Bmatrix} e^{-j\omega_n t} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$n \geq 1$ 의 경우에 고유진동 변위는  $U_{Cn} - jU_{Sn} = 0$ 이면 전향진행파(forward traveling wave)이고  $U_{Cn} + jU_{Sn} = 0$ 이면 후향진행파(backward traveling wave)임을 알 수 있다.

### 3.3 1차원 유한 요소 보간 함수

회전이 없는 정상상태에서의 정적 평형방정식의 일반해는 다음과 같다.

$${}^s u_\xi = C_1 r + C_2 r^{-1} \quad (23)$$

또한 회전이 없는 교란상태에서의 정적 평형방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{For } n = 0 \\ {}^d u_{\xi Cn} &= C_1 r + C_2 r^{-1}, \\ {}^d u_{\eta Sn} &= -S_1 r - S_2 r^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{For } n = 1 \\ {}^d u_{\xi Cn} &= C_1 (1 - 3\nu)r^2 + C_2 r^{-2} + C_3 + C_4 (3 - \nu) \ln r, \\ {}^d u_{\eta Sn} &= C_1 (5 + \nu)r^2 + C_2 r^{-2} \\ &\quad - C_3 - C_4 [(3 - \nu) \ln r + (1 + \nu)], \\ {}^d u_{\xi S_i} &= S_1 (1 - 3\nu)r^2 + S_2 r^{-2} + S_3 + S_4 (3 - \nu) \ln r, \\ {}^d u_{\eta Cn} &= -S_1 (5 + \nu)r^2 - S_2 r^{-2} \\ &\quad + S_3 + S_4 [(3 - \nu) \ln r + (1 + \nu)] \end{aligned} \quad (25)$$

For  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} {}^d u_{\xi Cn} &= -C_1 [(1 + \nu)n \\ &\quad - 2(1 - \nu)]r^{(n+1)} + C_2 r^{-(n+1)} \\ &\quad + C_3 r^{(n-1)} + C_4 [(1 + \nu)n + 2(1 - \nu)]r^{-(n-1)}, \\ {}^d u_{\eta S_i} &= C_1 [(1 + \nu)n + 4]r^{(n+1)} + C_2 r^{-(n+1)} \\ &\quad - C_3 r^{(n-1)} + C_4 [(1 + \nu)n - 4]r^{-(n-1)}, \\ {}^d u_{\xi S_i} &= -S_1 [(1 + \nu)n \\ &\quad - 2(1 - \nu)]r^{(n+1)} + S_2 r^{-(n+1)} \\ &\quad + S_3 r^{(n-1)} + S_4 [(1 + \nu)n + 2(1 - \nu)]r^{-(n-1)}, \\ {}^d u_{\eta Cn} &= -S_1 [(1 + \nu)n + 4]r^{(n+1)} - S_2 r^{-(n+1)} \\ &\quad + S_3 r^{(n-1)} - S_4 [(1 + \nu)n - 4]r^{-(n-1)} \end{aligned} \quad (26)$$

두께가 일정한 환상 디스크의 1차원 유한 요소 보간 함수는 상기의 정적 해를 변위함수로 사용하여 얻어진다. 참고문헌 (13)에서는 식 (24)의 두 번째 식, 식 (25) 및 식 (26)의 세 번째 식과 네 번째 식을 고려하지 않았다.

### 4. 회전하는 환상 디스크의 고유진동

수치해석에서 사용된 환상 디스크의 물성치 및 크기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho &= 7850 \text{ kg/m}^3, \quad E = 207 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \\ h &= 0.020 \text{ m}, \quad a = 0.500 \text{ m}, \quad b = 1.000 \text{ m}. \end{aligned}$$

내부 및 외부 경계가 자유인 환상 디스크를 반경 방향으로 등분하여 1차원 유한 요소 수를 4부터 2 배씩 증가시키면서  $n = 0, 1, 2$ 에 대하여 회전각속도  $\Omega$ 가 0 및 2000 rad/s일 때의 면내 고유진동수를 계산하였다. 회전각속도가 0일 때  $n \geq 1$ 에 대한 고유진동수는 항상 이중이며 그에 대응하는 하나의 고유모드 형상은 동일한 고유진동수에 대응하는 다른 고유모드에 대하여 원주방향으로  $\pi/2n$  만큼 회전되어 있다. Fig. 1에는 1차원 유한 요소 수에 대한 고유진동수의 상대오차를 나타내었다. 유한 요소 수가  $N_e$ 일 때의 고유진동수의 상대오차  $\epsilon$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon = \frac{\omega_n(N_e/2)}{\omega_n(N_e)} - 1 \quad (27)$$

Fig. 1에서 보이는 바와 같이 고유진동수의 상대

오차는 제시된 모든 경우에 대하여 공통적으로 유한 요소 수가 2배 증가함에 따라서 약 4배로 감소하고 있다. 따라서 1차원 유한 요소 수에 대한 고유진동수의 수렴성은 2차적(quadratic)이라고 할 수 있다.

Table 1에는 1차원 유한요소 수 128개를 사용하여  $n = 0, 1, 2$ 에 대하여 회전각속도가 0 및 2000 rad/s일 때 계산된 고유진동수를 제시하였고, 3차원 유한 요소를 사용하여 계산된 고유진동수를 비교하여 제시하였다. Table 1에서 보이는 바와 같이 1차원 유한 요소 모델을 사용하여 계산된 고유진동수는 3차원 유한 요소 모델을 사용하여 얻어진 고유진동

수와 거의 일치하고 있다. 3차원 유한 요소 모델에서는 디스크를 원주방향으로 36등분하고 등분된 부채꼴 디스크 단편을 반경방향으로 16등분, 원주방향으로 4등분, 축방향으로 2등분하여 분할된  $16 \times 4 \times 2$ 개의 육면체 20절점 고체요소를 사용하고 부채꼴 디스크 단편의 순환대칭성을 이용하는 유한 요소법<sup>(14)</sup>을 사용하였다. B는 회전좌표계에 대한 고유모드가 후향 진행파, F는 전향 진행파임을 의미한다.  $n = 0$ 에 대한 최저차 면내 고유진동수는 0이며 고유모드는 디스크의  $z$ -축 방향 강제 회전운동이다.  $n = 1$ 에 대한 2개의 최저차 면내 고유진동수는 모

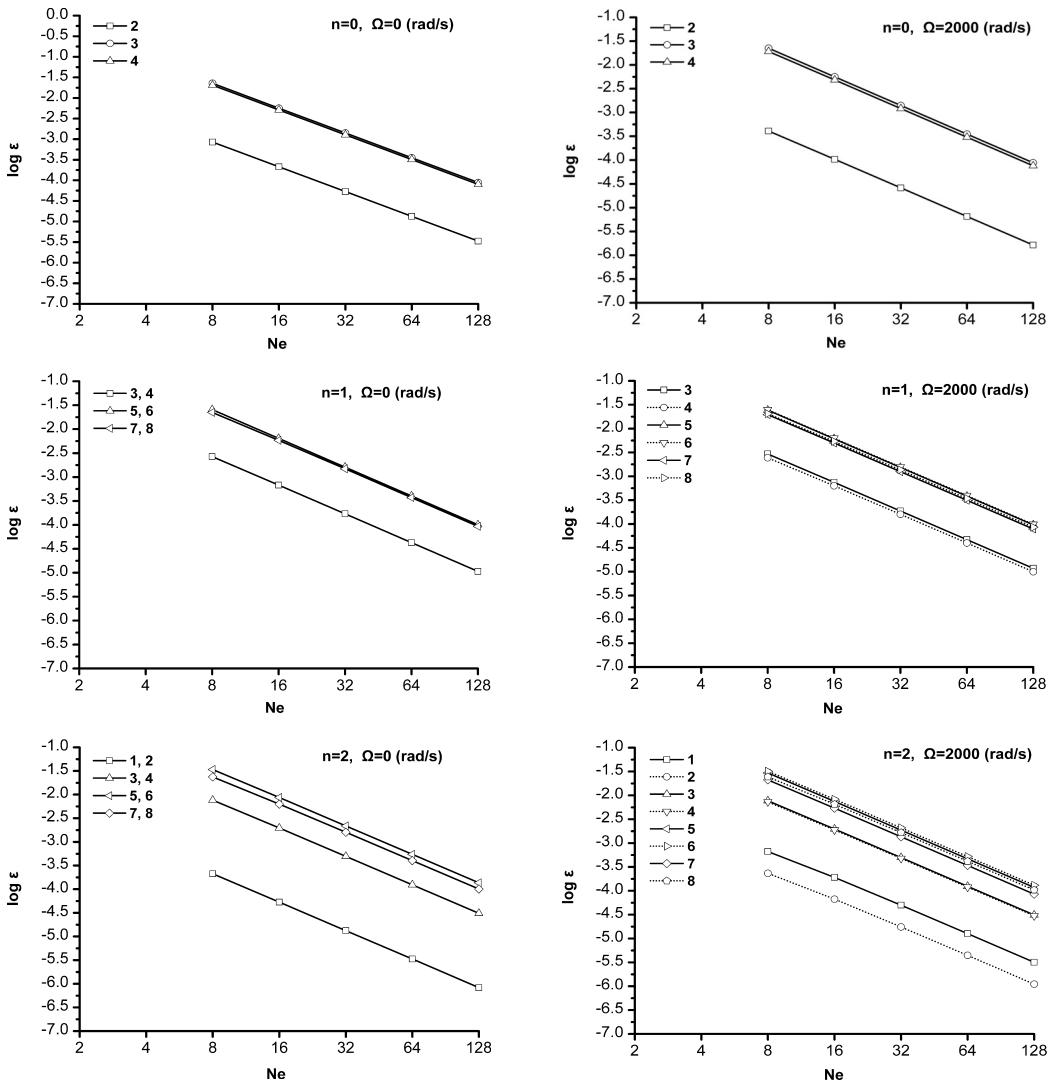


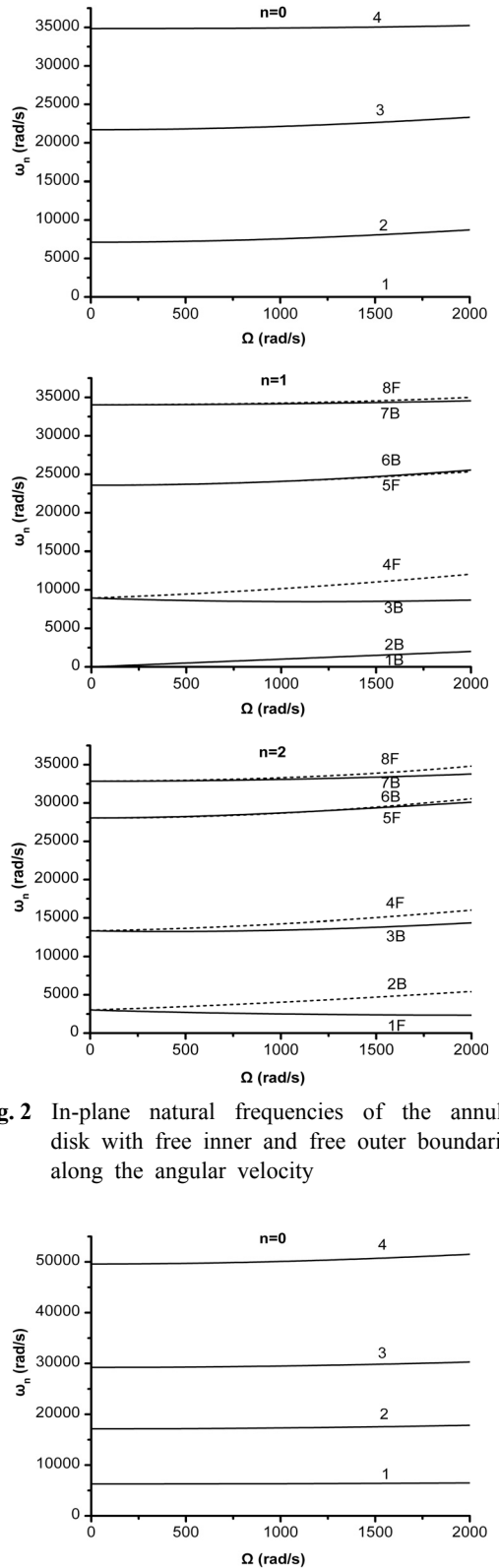
Fig. 1 Convergence of the in-plane natural frequencies of the annular disk with free inner and free outer boundaries for 1-dimensional finite elements

두 회전각속도와 같고 고유모드는 후향 진행파인 디스크의 면내 강체 병진운동이다.

Figs. 2, 3 및 4에는 내부 및 외부 경계가 자유(F-F), 내부 경계 고정-외부 경계 자유(C-F) 및 내부 경계 자유-외부 경계 고정(F-C)인 환상 디스크에 대하여 각각 1차원 유한 요소 수 64개를 사용하여  $n = 0, 1, 2$ 에 대하여 회전각속도를 0 부터 2000 rad/s까지 증가시키면서 계산된 면내 고유진동수의 변화를 나타내었다. 경계조건이 F-F와 C-F의 경우에는 회전에 의한 정적변위는 반경반향으로의 인장이므로  $n = 0$ 에 대한 고유진동수는 회전각 속도가 증가함에 따라서 증가하고 있고, 경계조건이 F-C의 경우에는 회전에 의한 정적변위는 반경반향으로의 압축이므로  $n = 0$ 에 대한 고유진동수는 회전각속도가 증가함에 따라서 감소하고 있다. 회전각속도가 0 일 때  $n \geq 1$ 에 대한 동일한 2개의 고유진동수는 2개의 최저차 고유진동수를 제외하고 회전각속도가 증가함에 따라서 서로 차이가 남을 알 수 있다.

**Table 1** In-plane natural frequencies of the annular disk with free inner-free outer boundaries

n	Mode Order	$\Omega = 0$ (rad/s)		$\Omega = 2000$ (rad/s)	
		1-D FE Model	3-D FE Model	1-D FE Model	3-D FE Model
		$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)
0	1	0	0	0	0
	2	7123	7123	8720	8720
	3	21700	21700	23318	23317
	4	34850	34845	35247	35242
1	1	0	0	2000 B	2000
	2	0	0	2000 B	2000
	3	8951	8951	8689 B	8689
	4	8951	8951	12046 F	12046
	5	23573	23572	25332 F	25331
	6	23573	23572	25544 B	25544
	7	34030	34026	34547 B	34544
	8	34030	34026	34992 F	34989
2	1	3019	3019	2335 F	2335
	2	3019	3019	5438 B	5438
	3	13351	13351	14395 B	14395
	4	13351	13351	16014 F	16014
	5	28045	28043	30098 F	30094
	6	28045	28043	30555 B	30553
	7	32851	32847	33784 B	33779
	8	32851	32847	34820 F	34817



**Fig. 2** In-plane natural frequencies of the annular disk with free inner and free outer boundaries along the angular velocity

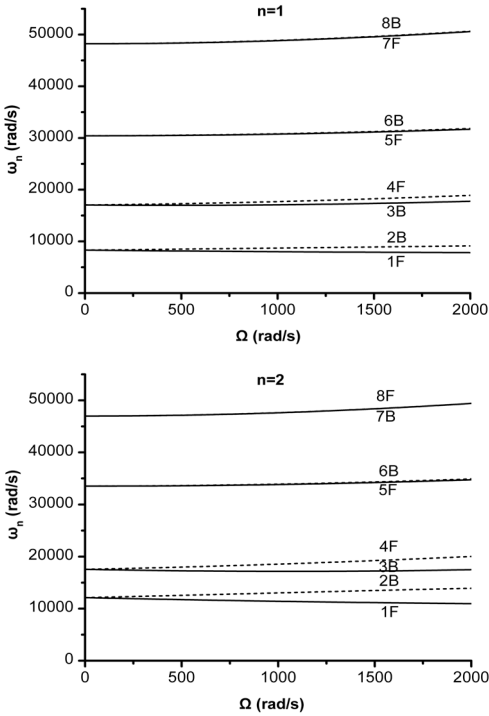


Fig. 3 In-plane natural frequencies of the annular disk with clamped inner and free outer boundaries along the angular velocity

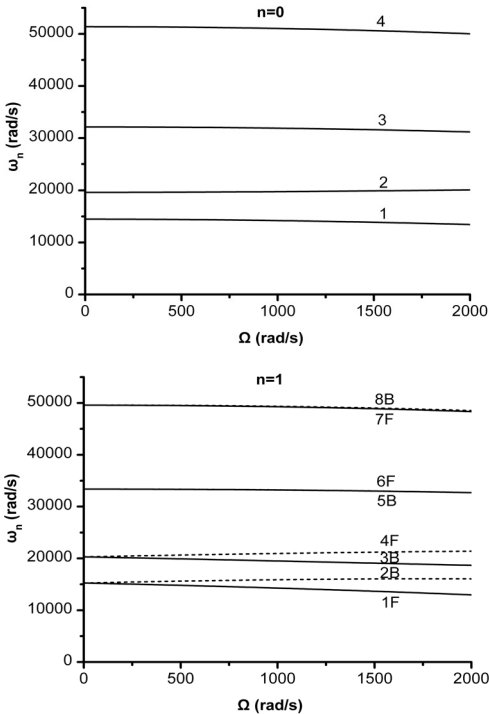


Fig. 4 In-plane natural frequencies of the annular disk with free inner and clamped outer boundaries along the angular velocity

### 5. 결 론

이 논문에서는 일정한 각속도로 회전하고 있는 환상 디스크의 면내 고유진동을 정밀하게 해석하기 위하여 운동방정식을 유한 변형 이론과 가상일의 원리로부터 유도하였다. 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태에서의 환상 디스크의 반경방향 변위는 1차원 환상 디스크 요소를 사용하여 구축된 정적비선형 방정식을 사용하여 구해지고, 교란상태에서의 면내 고유진동은 정상상태에서의 반경방향 변위 및 정상상태로부터 교란된 변위의 함수로 표현되는 운동방정식으로부터 질 직경 수에 따르는 1차원 환상 디스크 유한 요소를 사용하여 구축된 면내 진동방정식을 사용하여 해석하였다. 1차원 환상 디스크 유한 요소의 보간 함수로는 환상 디스크의 정적 변형모드를 사용하였다. 3차원 육면체 20절점 고체요소를 사용하여 얻어진 고유진동수와 비교하여 제시된 1차원 유한요소 모델의 수렴성 및 정밀성을 확인할 수 있었고, 양단 경계가 자유-자유, 고정-자유, 또는 자유-고정인 환상 디스크의 회전각속도에 따르는 고유진동수의 변화를 제시된 1차원 유한요소 모델을 사용하여 해석하고 그 결과를 제시하였다.

### 후 기

이 논문은 인하대학교의 지원에 의하여 연구되었음.

### 참 고 문 헌



(1) Leissa, A. W., 1969, "Vibration of Plates," NASA SP-160, Office of Technology Utilization, NASA, Reproduced by National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce.

(2) Leissa, A. W., 1977, "Recent Research in Plate Vibrations : Classical Theory," Shock and Vibration Digest, Vol. 9, No. 10, pp. 13~24.

(3) Leissa, A. W., 1978, "Recent Research in Plate Vibrations : Complicating Effects," Shock and Vibration Digest, Vol. 10, No. 12, pp. 21~35.

(4) Leissa, A. W., 1981, "Plate Vibration Research, 1976-1980 : Classical Theory," Shock and Vibration Digest, Vol. 13, No. 9, pp. 11~22.

(5) Leissa, A. W., 1981, "Plate Vibration Research, 1976-1980 : Complicating Effects," Shock and Vibration Digest, Vol. 13, No. 10, pp. 19~36.

(6) Leissa, A. W., 1987, "Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-85 : Part I. Classical Theory," Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 2, pp. 11~18.

(7) Leissa, A. W., 1987, "Recent Studies in Plate Vibrations, 1981-85 : Part II. Complicating Effects," Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 3, pp. 10~24.

(8) Irie, T., Yamada, G. and Muramoto, Y., 1984, "Natural Frequencies of In-plane Vibration of Annular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 97, No. 1, pp. 171~174.

(9) Chen, J. S. and Jhu, J. L., 1996, "On the In-plane Vibration and Stability of a Spinning Annular Disk," Journal of Sound and Vibration, Vol. 195, No. 4, pp. 585~593.

(10) Farag, N. H. and Pan, J., 2003, "Modal Characteristics of In-plane Vibration of Circular Plates Clamped at the Outer Edge," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 113, No. 4, pp. 1935~1946.

(11) Deshpande, M. and Mote Jr., C. D., 2003, "In-plane Vibrations of a Thin Rotating Disk," Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, Vol. 125, No. 1, pp. 68~72.

(12) Park, C. I., 2008, "Frequency Equation for the In-plane Vibration of a Clamped Circular Plate," Journal of Sound and Vibration, Vol. 313, No. 1-2, pp. 325~333.

(13) Srinivasan, V. and Ramamurti, V., 1980, "In-plane Vibrations of Annular Disk Using Finite Elements," Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, Vol. 102, pp. 585~588.

(14) Kim, C. B. and Shim, S. S., 1998, "A Method for Finite Element Analysis of Rotating Structures with Cyclic Symmetry," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 8, No. 6, pp. 1150~1157.