

제어입력 크기제한을 갖는 시스템에서 외란 응답 감소를 위한 이산시간 이득 스케줄 제어

Gain Scheduled Discrete Time Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input

강민식^{1,✉}, 윤우현²
Min Sig Kang^{1,✉} and Woo Hyun Yoon²

1 경원대학교 기계자동차공학과 (Department of Department of Mechanical and Automotive Engineering, Kyungwon Univ.)

2 경원대학교 토목공학과(Department of Civil Engineering, Kyungwon Univ.)

✉ Corresponding author: mskang@kyungwon.ac.kr, Tel: 031-750-5524

Manuscript received: 2008.5.15 / Revised: 2008.9.23,11.25 / Accepted: 2008.11.27

A new discrete time gain-scheduled control design is proposed to improve disturbance attenuation for systems with bounded control input under known disturbance maximum norm. The state feedback gains are scheduled according to the proximity of the state of the plant to the origin. The controllers are derived in the framework of linear matrix inequality(LMI) optimization. This procedure yields a linear time varying control structure that allows higher gain and hence higher performance controllers as the state moves closer to the origin. The main results give sufficient conditions for the satisfaction of a parameter-dependent performance measure, without violating the bounded control input condition under the given disturbance maximum norm.

Key Words: Input Constraint (입력제한), Disturbance (외란), Discrete-time Gain Scheduled Control (이산시간 이득 스케줄제어), Linear Matrix Inequality (LMI, 선형행렬부등식), L_2 -Gain (L_2 이득)

기호설명

- $A, B_1, B_2, C, D_{11}, D_{12}$ = system matrices
- K_j = j -th state feedback gain
- Q, F_j = controller variable matrices
- x, u, w = state variable, control input, and disturbance input
- \bar{w} = maximum Euclidian norm of w
- z = control output
- α, β_j = parameter used for control design
- $\Delta V(k)$ = discrete-time Lyapunov function
- ϵ_j = j -th ellipsoidal space
- γ_{zw} = L_2 -gain from w to z

1. 서론

대부분의 제어계에는 제어입력의 제한이 있거나 이 제한이 충분히 클 경우 제한 조건을 고려하지 않고 제어를 설계할 수 있지만 그렇지 않은 경우 제한 조건 내에서 최대의 성능을 가진 제어기 설계를 고려해야 된다. 제어입력 제한을 갖는 시스템에서 제어기 설계방법에 관한 다양한 연구가 진행되어 왔다.^{1,2} 일반적으로 제어입력이 제한 범위 내에 있을 경우 선형제어기를 사용하고, 제한범위를 벗어나는 경우 Anti-windup 을 사용하는 제어방법이 많이 적용되고 있다.² 최근에는 제어입력 제한조건을 직접 고려하여 계의 안정성 과 제

어성능을 보장하는 제어방법이 제시되고 있으며,^{3,7} 이 연구들에서는 선형행렬 부등식(LMI: Linear Matrix Inequality)을 이용하여 제한조건을 만족하고 외란으로부터 제어출력까지의 L_2 -이득을 최소화하는 제어기 설계방법이 제시되고 있다. LMI 방법은 수치해석을 이용하는 방법으로, 그 동안 해석적으로 풀기 어려웠던 비선형 및 다중함수최적화 등의 문제를 해결할 수 있어 매우 다양한 분야에서 적용되고 있다.⁸ 제어기 설계 분야에서는 강인 제어, 다중입출력계의 다중목적 함수(multi-objective function) 최적제어, 강인한 이득 스케줄 제어(gain scheduling control) 등에 폭 넓게 이용되고 있다.⁸⁻¹⁰ LMI의 수치해석에는 MatLab을 이용할 수 있다.

LMI를 이용한 제어기 설계 방법은 가능한 모든 외란을 대상으로 설계되므로 강한 보존적(conservative) 특성을 갖게 되며, 결과적으로 가용한 제어입력의 일부뿐만 사용하지 된다. 따라서 제한된 제어입력을 효과적으로 사용함으로써 제어성능을 향상시키는 이득 스케줄 제어가 제안되었다.^{11,12} 이득 스케줄 제어 방법은 계의 상태에 따라 제어 이득을 변화시키는, 즉, 계의 상태가 원점에 가까울수록 더 큰 제어 이득을 사용함으로써 고정이득제어에 비해 더 큰 제어 입력을 사용하며, 결국 제어성능을 개선하는 제어 방법이다.

이득 스케줄 제어는 제어 중 계의 상태변수의 범주에 따라 미리 설계된 제어기 이득군에서 적당한 제어이득을 선정하여 적용하므로 실제로 컴퓨터 이용을 전제로 한다. 그러나 지금까지 제안된 스케줄 제어는 모두 연속시간계에서의 설계방법이다.

본 논문에서는 참고문헌 11, 12, 13, 14에서 제안된 연속계에서의 제어이득 스케줄 방법을 확장하여 이산시간계에서의 설계방법을 도출한다.

2. 제어기 이득 설계

2.1 고정 제어이득 설계

다음의 불시변 선형계를 고려하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k) \quad (1a)$$

$$z(k) = Cx(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k) \quad (1b)$$

여기서 $x \in R^n$ 는 계의 상태변수벡터, $w \in R^{n_w}$ 는

외란입력벡터, $u \in R^{n_u}$ 는 제어입력벡터, $z \in R^{n_z}$ 는 제어출력벡터이며, $A, B_1, B_2, C, D_{11}, D_{12}$ 는 시스템 행렬이다.

이 계는 가제어성을 만족하여 다음의 상태 피드백제어를 통해 안정화 할 수 있다고 가정한다.

$$u(k) = Kx(k) \quad (2)$$

제어입력과 외란은 다음 식(3)과 같이 제한이 존재하는 경우를 고려한다. 즉,

$$\|u(k)\|_{\infty} \leq \bar{u} \quad (3a)$$

$$\|w(k)\| \leq \bar{w}^2 \quad (3b)$$

식(3a)에서 $\|\cdot\|_{\infty}$ 는 무한대 놈(infinity norm), 식(3b)에서 $\|\cdot\|$ 는 Euclidian 노름을 나타낸다.

식(1)과 식(2)에서 폐회로 상태방정식은

$$x(k+1) = A_c x(k) + B_c w(k) \quad (4a)$$

$$z(k) = C_c x(k) + D_c w(k) \quad (4b)$$

여기서 $A_c = A + B_2K$, $B_c = B_1$, $C_c = C + D_{12}K$, $D_c = D_{11}$ 이다.

본 장에서는 식(3)의 외란 조건과 제어입력 제한조건을 만족하며, 식(4)에서 외란 $w(k)$ 로부터 $z(k)$ 까지의 L_2 -이득을 최소화하는 식(2)의 상태 피드백 제어이득 K 를 설계한다.

정리 1: 식(1)의 계에서 다음의 선형행렬부등식을 만족하며 $w(k)$ 로부터 $z(k)$ 까지의 L_2 -이득 γ_1 을 최소화하는 양한정(positive definite) 대칭 행렬 Q , 행렬 F_1 , 양의 실수 α , $\{\alpha: 0 < \alpha < 1\}$ 가 존재하면,

$$\begin{bmatrix} Q & AQ + B_2F_1 & B_1 & 0 \\ * & Q & 0 & QC^T + F_1^T D_{12}^T \\ * & * & \gamma_1^2 & D_{11}^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & F_1^T \\ F_1 & \frac{\bar{u}^2}{\bar{w}^2} \end{bmatrix} > 0 \quad (5b)$$

$$\begin{bmatrix} Q & AQ+B_2F_1 & B_1 \\ * & (1-\alpha)Q & 0 \\ * & * & \alpha I \end{bmatrix} > 0 \quad (5c)$$

계에 제어기 $u(k) = K_1x(k)$, $K = F_1Q^{-1}$ 를 적용하면

1) 상태벡터의 초기조건이 $x(k)^T Q^{-1}x(k) \leq \bar{w}^2$ 로 정의되는 타원체 내부에 있으면, 폐회로 상태벡터는 항상 이 타원체 내부에 존재한다.

2) 폐회로는 안정하며, $w(k)$ 로부터 $z(k)$ 까지의 L_2 -이득 γ_{zw} 은 γ_1 보다 작다.

3) 상태벡터가 $x(k)^T Q^{-1}x(k) \leq \bar{w}^2$ 로 정의되는 타원체 내부에 있으면, 제어입력 $u(k)$ 는 식(3a)의 제한조건을 만족한다.

식(5)에서 행렬의 요소 중 *로 표시한 부분은 대칭행렬의 해당 요소를 간략히 나타낸 것이다.

증명:

(1) 만일 양한정 대칭행렬 $Q = Q^T > 0$ 가 존재하고 양의 실수 α , $\{\alpha: 0 < \alpha < 1\}$ 가 존재하며, 다음의 부등식이 성립된다면,

$$\Delta V(k+1) + \alpha \{V(k) - w(k)^T w(k)\} < 0 \quad (6)$$

여기서 $V(k)$ 는 $V(k) = x(k)^T Q^{-1}x(k) > 0$ 이며, $\Delta V(k+1) = V(k+1) - V(k)$ 이다.

식(6)에서 만일 시스템의 상태벡터 $x(k)$ 가 $V(k) = c \geq \bar{w}^2$ 인 타원체의 외곽평면에 존재하는 경우 $\Delta V(k+1) < 0$ 이므로, $V(k+1) < V(k)$ 가 되며, 따라서 $x(k+1)$ 은 $V(k) = c$ 인 타원체의 외부에서 타원체 내부로 들어오게 된다. 즉, $V(k+1) < c$.

만일 $x(k)$ 가 $V(k) = \bar{w}^2$ 인 타원체의 내부에 존재하는 경우, 즉 $V(k) < \bar{w}^2$, 식(6)에서

$$V(k+1) < \alpha \bar{w}^2 + (1-\alpha)V(k) \quad (7)$$

이므로 따라서 $V(k+1) < \bar{w}^2$ 가 된다. 이는 $x(k+1)$ 은 $V(k) = \bar{w}^2$ 인 타원체를 벗어나지 않고 항상 내부에 존재함을 의미한다. 이를 정리하면 $x(k)$ 가 $V(k) = \bar{w}^2$ 인 타원체 외부에 있을 경우 $x(k+1)$ 은 이 타원체의 내부로 들어오게 되며, $x(k)$ 가 내부에 있을 경우 $x(k+1)$ 은 이 타원체를 벗어나지 않음을 의미한다.

식(4)와 $V(k)$ 의 정의를 식(6)에 대입하고 정리하면

$$\begin{bmatrix} x(k)^T & w(k)^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$M = \begin{bmatrix} A_c^T Q^{-1} A_c - (1-\alpha)Q^{-1} & A_c^T Q^{-1} B_c \\ * & B_c^T Q^{-1} B_c - \alpha I \end{bmatrix}$$

식(8)에서 행렬 M 은 음한정(negative definite)이 되며, $M < 0$, 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_c^T \\ B_c^T \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} A_c & B_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (1-\alpha)Q^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

식(9)에 Schur complement⁸를 적용하면

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)Q^{-1} & 0 & A_c^T \\ * & \alpha I & B_c^T \\ * & * & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

식(10)의 앞뒤에 각각 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ Q & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$ 와 이 행

렬의 전치행렬을 곱하고 정리하면 식(5c)를 얻게 된다. 여기서 제어이득은 $K_1 = F_1Q^{-1}$ 이다.

따라서 식(5c)를 만족하면 폐회로 시스템의 상태벡터는 $x(k)^T Q^{-1}x(k) \leq \bar{w}^2$ 로 정의되는 타원체 내부에 존재하게 된다.

(2) 폐회로가 안정하고 γ_{zw} 가 γ_1 보다 작기 위한 충분조건으로 다음과 같은 부등식을 고려하자.¹⁵

$$\Delta V(k+1) + z(k)^T z(k) - \gamma_1^2 w(k)^T w(k) < 0 \quad (11)$$

식(4)와 $V(k)$ 의 정의를 식(11)에 대입하고 정리하면

$$\begin{bmatrix} A_c^T Q^{-1} A_c - Q^{-1} + C_c^T C_c & A_c^T Q^{-1} B_c + C_c^T D_c \\ * & B_c^T Q^{-1} B_c + D_c^T D_c - \gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0$$

또는

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

식(12)에 Schur complement⁸ 를 적용하여 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & A_c^T & C_c^T \\ * & \gamma_1^2 I & B_c^T & D_c^T \\ * & * & Q & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

식(13)의 앞과 뒤에 각각 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 와

이 행렬의 전치행렬을 곱하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} Q & A_c Q & B_c & 0 \\ * & Q & 0 & Q C_c^T \\ * & * & \gamma_1^2 I & D_c^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

식(14)에 $K_1 = F_1 Q^{-1}$ 과 식(4)의 행렬에 대한 정의를 대입하면 식(5a)가 된다. 따라서 식(5a)를 만족하면 폐회로는 안정하며, γ_{zw} 이 γ_1 보다 작다.

3) 식(4b)는 Schur Complement⁸ 에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q^{-1} - \frac{\bar{w}^2}{u^2} Q^{-1} F_1^T F_1 Q^{-1} > 0 \quad (15)$$

$u(k) = K_1 x(k)$, $K_1 = F_1 Q^{-1}$ 이므로 식(15)를 다시 쓰면

$$x(k)^T Q^{-1} x(k) > \frac{\bar{w}^2}{u^2} u(k)^T u(k) \quad (16)$$

식(5c)에서 $x(k)^T Q^{-1} x(k) < \bar{w}^2$ 이므로, 식(16)은

$$\bar{w}^2 > u(k)^T u(k) \quad (17)$$

가 된다. 따라서 제어입력은 주어진 제한 조건 식(3a)를 만족한다. Q.E.D.

식(5)의 LMI 식은 모두 변수행렬 Q 과 F_1 에

대해 선형이므로 MatLab Toolbox 를 이용하여 풀 수 있다.

2.2 스케줄 제어이득 설계

식(5)에서 얻은 제어이득은 식(3b)의 조건을 만족하는 모든 외란을 고려하여 설계되었다. 그러나 실제로는 식(3b)의 조건보다 훨씬 완화된 외란이 작용하는 시간 구간이 대부분을 차지한다. 따라서 앞의 고정제어이득을 적용할 경우 주어진 제어입력 제한조건은 만족되지만, 제어입력의 일부분만을 이용하게 된다. 이러한 점에서 제어이득 스케줄 방법은 고정제어이득을 사용하는 경우에 비해 가용한 제어입력을 더 많이 사용함으로써 제어 성능을 향상시킬 수 있다.

우선 다음과 같이 상태변수의 영역을 정의한다.

$$\varepsilon_j = \left\{ x(k) : x(k)^T Q^{-1} x(k) \leq \frac{\bar{w}^2}{\beta_j^2} \right\}, \beta_1 = 1 \quad (18)$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{m-1} < \beta_m$$

즉, ε_j 는 $x(k)^T Q^{-1} x(k) \leq \frac{\bar{w}^2}{\beta_j^2}$ 로 정의되는 타원체의 내부공간을 나타내며, β_j 의 특징에 따라 $\varepsilon_m \subset \varepsilon_{m-1} \dots \subset \varepsilon_2 \subset \varepsilon_1$ 의 관계를 갖는다.

정리 2. $j=1$ 일 때 정리 1 을 만족하는 Q, F_1, α 가 존재하고, $j \geq 2$ 일 때 다음의 LMI 식(19a), (19b), (19c)를 만족하며 γ_j 를 최소화하는 행렬 F_j 가 존재하면, 즉

(i) $j=1$ 일 때

정리 1 에서 Q, F_1 및 γ_1 이 존재하고

(ii) $j \geq 2$ 일 때

다음 부등식을 만족하는 행렬 F_j 가 존재하면,

$$\begin{bmatrix} Q & AQ + B_2 F_j & B_1 & 0 \\ * & Q & 0 & Q C^T + F_j^T D_{12}^T \\ * & * & \gamma_j^2 I & D_{11}^T \\ * & * & * & I \end{bmatrix} > 0 \quad (19a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & F_j^T \\ F_j & \beta_j^2 \frac{\bar{w}^2}{w^2} \end{bmatrix} > 0 \quad (19b)$$

$$\begin{bmatrix} Q & AQ+B_2F_j & B_1 \\ * & (1-\alpha)Q & 0 \\ * & * & \alpha I \end{bmatrix} > 0 \quad (19c)$$

다음의 제어기 $u(k) = K_j x(k)$

$$K_j = \begin{cases} F_j Q^{-1} & \text{when } \frac{\bar{w}^2}{\beta_{j+1}^2} < V(k) \leq \frac{\bar{w}^2}{\beta_j^2} \\ F_m Q^{-1} & \text{when } V(k) \leq \frac{\bar{w}^2}{\beta_m^2} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, m=1 \quad (20)$$

를 적용하면

- 1) 상태벡터의 초기조건이 $x(k)^T Q^{-1} x(k) \leq \bar{w}^2$ 로 정의되는 타원체 내부에 있으면, 폐회로 상태벡터는 항상 이 타원체 내부에 존재한다.
- 2) 상태벡터 $x(k)$ 가 어느 타원체 내부에 있더라도 제어입력은 식(3a)를 만족한다.
- 3) 폐회로는 안정하며, γ_{zw} 은 γ_1 보다 작다. 또한 $\gamma_m \leq \gamma_{m-1} \dots \leq \gamma_2 \leq \gamma_1$ 의 관계를 만족한다.

증명: 정리 2 의 증명은 정리 1 의 증명과정과 유사하다.

(1) 식(19c)와 정리 1 의 증명으로 부터 모든 제어이득은 상태벡터 $x(k)$ 가 $V(k) = \bar{w}^2$ 인 타원체 외부에 있을 경우 $x(k+1)$ 은 타원체의 내부로 들어오고, $x(k)$ 가 $V(k) = \bar{w}^2$ 인 타원체 내부에 있을 경우 $x(k+1)$ 는 이 타원체를 벗어나지 않음을 보장함을 알 수 있다.

(2) 식(19b)는 Schur Complement⁸에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q^{-1} - \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\bar{w}^2}{\bar{u}^2} Q^{-1} F_j^T F_j Q^{-1} > 0 \quad (21)$$

상태벡터 $x(k)$ 가 $\frac{\bar{w}^2}{\beta_{j+1}^2} < V(k) \leq \frac{\bar{w}^2}{\beta_j^2}$ 일 경우 제어이득은 $u(k) = K_j x(k)$, $K_j = F_j Q^{-1}$ 를 선정하므로 따라서 (21)을 다시 쓰면

$$x(k)^T Q^{-1} x(k) > \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\bar{w}^2}{\bar{u}^2} u(k)^T u(k) \quad (22)$$

이며, $x(k)^T Q^{-1} x(k) < \bar{w}^2 / \beta_j^2$ 이므로, 식(22)는

$$\bar{u}^2 > u(k)^T u(k) \quad (23)$$

가 된다. 따라서 제어입력은 식(3a)를 만족한다.

(3) 식(19a)은 폐회로가 안정하고 γ_{zw} 가 γ_j 보다 작을 충분조건이므로¹⁵ 정리 2 의 (3)이 성립한다. 또한 식(21)을 아래와 같이 다시 쓰면,

$$\beta_j^2 Q^{-1} > \frac{\bar{w}^2}{\bar{u}^2} K_j^T K_j \quad (24)$$

식(24)에서 Q 는 $j=1$ 일 때 정해지는 행렬이므로, β_j 가 커질수록 K_j 의 설계 영역은 확장되며, 따라서 L_2 -이득은 작아진다. 앞에서 $\epsilon_m \subset \epsilon_{m-1} \dots \subset \epsilon_2 \subset \epsilon_1$ 이므로 L_2 -이득의 관계는 $\gamma_m \leq \gamma_{m-1} \dots \leq \gamma_2 \leq \gamma_1$ 가 된다. Q.E.D.

정리 2 에서 설계한 스케줄 제어이득을 실제 제어시 적용하는 방법은 먼저 측정된 상태변수 $x(k)$ 를 이용하여 $x(k)^T Q^{-1} x(k)$ 를 계산하고, 이 값이 포함된 가장 작은 타원체 ϵ_j 를 찾아 해당 K_j 를 제어기 이득으로 사용함으로써 주어진 제어입력 제한조건을 만족하는 제어기 중 L_2 -이득 측면에서 가장 우수한 제어이득을 선정하는 개념이다.

3. 시뮬레이션

제안한 이산시간 이득스케줄 제어의 성능을 검증하기 위해 Fig. 1 의 듀얼 스테이지 안정화 플랫폼¹⁶을 대상으로 시뮬레이션 하였다.

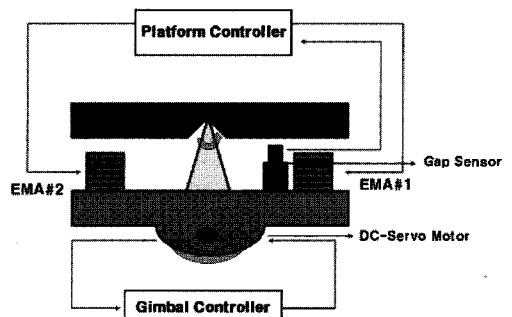


Fig. 1 Schematic drawing of dual stage servo system

Fig. 1 의 시스템은 안정화 장치의 구동범위를 넓히고, 안정화 대역폭을 확장하기 위한 메카니즘으로, 김발 구조에 추가적으로 플랫폼을 장착하였다.¹⁶ 이 메카니즘은 기존의 김발안정화 구조를 개선하여 광대역 고정밀 안정화 달성을 위해 제안된 바 있다. 이 메카니즘에서 김발은 모터에 의해, 플랫폼은 전자기 액츄에이터에 의해 구동 된다. 플랫폼은 중앙의 힌지를 중심으로 양단의 전자기 액츄에이터의 전자기력에 의해 제어된다.

이 시스템의 플랫폼 운동방정식은 다음 식으로 표현된다.¹⁶

$$J_p \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - K_p L^2 \theta_p = K_c K_{amp} L u - J_p \ddot{\phi} \quad (25)$$

여기서 J_p 은 플랫폼의 회전중심점 기준 질량관성 모멘트, θ_p 는 플랫폼의 김발 기준 회전각, K_p 와 K_c 는 전자기 액츄에이터의 위치강성과 전류강성, K_{amp} 는 전류증폭기 이득, L 은 플랫폼의 절반 길이, u 는 전류증폭기에 공급되는 제어입력전압, ϕ 는 김발의 회전각이다. 식(25)에서 위치강성은 $K_p > 0$ 이므로 플랫폼 제어계는 불안정함을 알 수 있으며, 김발의 각속도는 외란으로 작용한다.

이 시스템에서 외란이 작용할 때 이산 시간 이득스케줄제어의 응답을 시뮬레이션 하였다. 제어는 외란이 작용하는 상태에서 김발기준 플랫폼의 회전각을 영으로 유지함을 목적으로 한다. 시뮬레이션에서 $J_p = 1.25 \times 10^{-3} \text{Kgm}^2$, $B_p = 0$, $K_p = 963.5 \text{N/m}$, $K_c = 42.8 \text{N/A}$, $K_{amp} = 0.4 \text{A/V}$, $L = 0.085 \text{m}$ 로 가정하였으며, $\bar{u} = 1 \text{V}$, 외란은 $|\dot{\phi}| \leq 700 \text{rad/s}^2$ 즉, $\bar{\omega}^2 \leq 700 \text{rad/s}^2$ 로 가정하였다. 샘플링 주파수는 5KHz , β_k 는 $\beta_k = (1.5)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, 21$ 로 하였다.

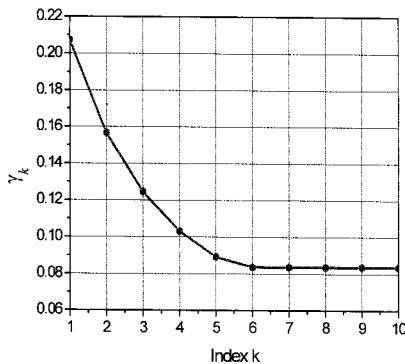
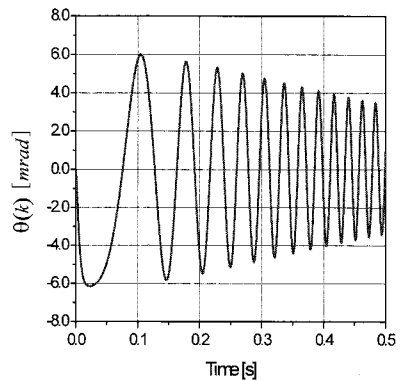
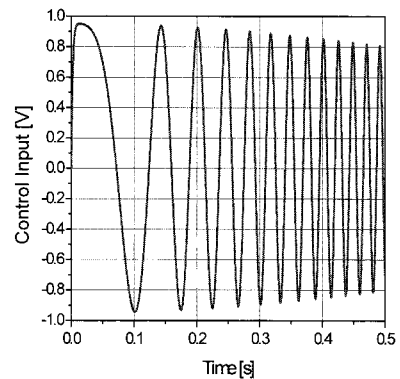


Fig. 2 Index k v.s. γ_k



(a) Position error



(b) Control input

Fig. 3 Position error and control input of fixed gain control

Fig. 2 는 k 에 따른 외란으로부터 제어출력까지의 L_2 -이득으로 k 가 증가할수록 감소하며, $k = 7$ 에서 최저값을 보이고 그 이상의 k 에서는 동일한 이득값을 나타냈다. 이 이득 특성에서 이득스케줄제어가 고정이득 제어에 비해 외란 응답을 감소시킬 수 있음을 예측할 수 있다.

실제 외란을 가하였을 경우 응답을 구하였다. 외란은 0.5 초 동안 0.1Hz 로부터 50Hz 까지 선형적으로 증가하는 chirp 신호형태로 가정하였다. 비교를 위하여 우선 고정이득을 적용하는 경우 응답을 구하였다. 이 때 사용한 제어기는 정리 1 을 이용하여 구하였으며, 결정된 이득은 $K = [-153.09 \quad -0.582]$ 이었다. 응답은 Fig. 3 과 같다.

Fig. 3(a)에서 계는 제어에 의해 안정화 되었으며, 외란 주파수가 증가할수록 위치오차는 감소하였다. 이 때 제어입력의 크기는 항상 1 보다 작아 주어진 제어입력조건을 만족하였다.

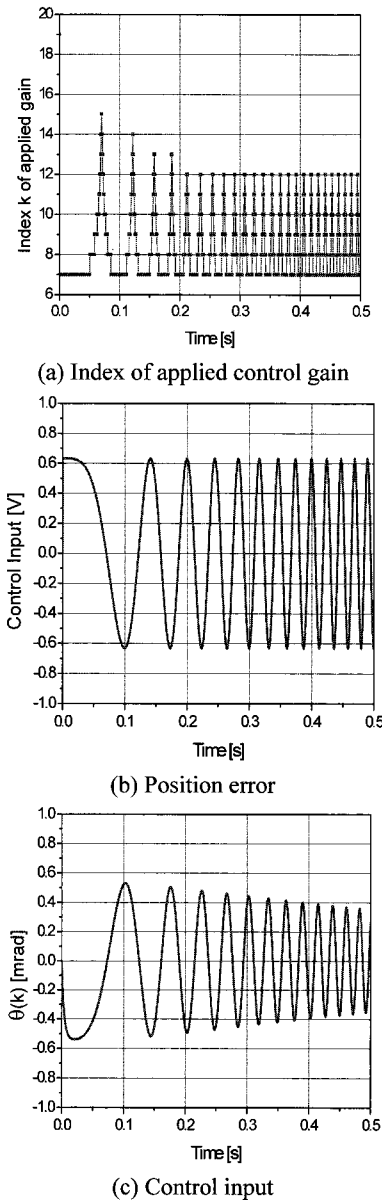


Fig. 4 Position error and control input of scheduled gain control

동일 조건에서 이득 스케줄제어를 시뮬레이션 하였다. Fig. 4(a)는 제어 중 선정된 제어기 이득의 번호로 $k=7$ 이상의 제어기가 적용되었으며, 응답에 따라 다른 제어기 이득이 적용되었음을 알 수 있다. 따라서 Fig. 3의 고정이득 경우에 비해 L_2 -이득이 더 작은 제어기가 적용되었으므로, 위치오차는 더 작을 것으로 예측할 수 있다. Fig. 4(b)는

위치오차로 고정이득에 비해 거의 0.1 배 이하의 수준으로 감소하였음을 알 수 있다. 앞서서와 같이 외란주파수가 증가하면 위치오차도 감소되었다. Fig. 4(c)는 이 때의 제어입력으로 주어진 제한조건을 만족한다.

이상의 결과로부터 본 논문에서 제안한 이산시간 이득스케줄제어방법은 주어진 외란의 크기 조건에서 제어입력 크기에 대한 제한조건을 만족하며, 고정이득 제어에 비해 향상된 제어성능을 얻음을 확인하였다.

4. 결론

본 연구에서는 제어입력의 크기 제한을 갖는 시스템에서 외란응답을 최소화할 수 있는 이산시간 제어이득 스케줄 제어 방법을 제시하였다. 이득 스케줄 제어를 적용하기 위해서는 컴퓨터 제어가 필수적이므로, 이를 고려하여 기존 연속시간 제어이득 스케줄 제어 방법을 이산시간으로 확장하여 제안하였다. 스케줄 제어방법은 기존 고정이득제어가 최악의 외란조건에서도 제어입력 제한을 만족하도록 설계함에 따라 가용한 제어 입력을 충분히 이용하지 못함에 비해, 스케줄 제어는 계의 상태벡터에 따라 제어입력의 제한을 만족하며 외란과 제어출력간의 L_2 -이득을 최소화 하는 고이득의 제어를 적용함으로써 가용한 제어 입력을 보다 효율적으로 사용하여 제어성능 향상을 기할 수 있다.

참고문헌

- Bernstein, D. S. and Michel, A. N., "A Chronological Bibliography on Saturating Actuators," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, No. 5, pp. 375-380, 1995.
- Stoorvogel, A. A. and Saberi, A. (Eds.), Special Issue on "Control Problems with Constraint," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 9, No. 10, pp. 583-734, 1999.
- Lin, Z. and Saberi, A., "A Semi-global Low-and-High Gain Design Technique for Linear Systems with Input Saturation - Stabilization and Disturbance Rejection," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, No. 5, pp. 381-398, 1995.

4. Lin, Z., Saberi, A. and Teel, A. R., "Simultaneous L_p -stabilization and Internal Stabilization of Linear Systems Subject to Input Saturation - State Space Feedback Case," *Systems and Control Letters*, Vol. 25, No. 3, pp. 219-226, 1995.
5. Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for LPV Systems with Bounded Inputs," *Proc. of the American Control Conference*, Vol. 3, pp. 1543-1547, 1998.
6. Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation: An LMI Approach," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, No. 4, pp. 852-857, 1999.
7. Nagpal, K., Abedor, J. and Poolla, K., "An LMI Approach to Peak-Peak Gain Minimization: Filtering and Control," *Proc. of the American Control Conference*, Vol. 1, pp. 742-746, 1994.
8. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," SIAM Books, 1994.
9. Kim, Y. B. and Byeon, J. H., "Robust Decoupling Control of Ship Propulsion System with CPP," *J. of KSPE*, Vol. 15, No. 9, pp. 33-42, 1998.
10. Keh, J. E. and Lee, M. H., "Robust Controller Design for a Stabilized Head Mirror," *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 3, No. 4, pp. 78-86, 2002.
11. Srivastava, S. and Jabbari, F., "Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Inputs," *Proc. of the American Control Conference*, Vol. 2, pp. 735-739, 2000.
12. Kose, I. E. and Jabbari, F., "Scheduled Controllers for Linear Systems with Bounded Actuators," *Automatica*, Vol. 39, No. 8, pp. 1377-1387, 2003.
13. Kang, M. S., "Gain Scheduled Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input - Theory," *J. of the KSPE*, Vol. 23, No. 6, pp. 81-87, 2006.
14. Kang, M. S., "Gain Scheduled Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input - Application to Stabilization Control," *J. of the KSPE*, Vol. 23, No. 6, pp. 88-95, 2006.
15. Oliveria, M. C., Geromel, J. C. and Bernusson, J., "An LMI Optimization Approach to Multiobjective Controller Design for Discrete-time Systems," *Proc. of the 36th Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3611-3616, 1999.
16. Choi, Y. J., Yu, K. W. and Kang, M. S., "Observer Based Sliding Mode Control for a Dual Stage Target Tracking," *ASPEN 2007*, pp. 302-304, 2007.