韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 4호, 2009. 11. 1015-1022

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23 No 4, Nov. 2009. 1015-1022

수학문제 해결의 기법에 관한 고찰1)

염 상 섭 (서울시립대학교)

본 논문에서는 대학교육의 현장에서 수학 전공 과목을 이수하는 학생들에게 수학을 지도함에 있어서 몇 가지 기본적인 문제 해결의 기법을 제시하고 수학에 흥미를 갖도록 하는 방법을 기술하고자 한다.

1. 서 론

본고에서는 교육학의 본격적인 이론을 제시하기보다는 대학교육의 현장에서 수학 전공과목을 이수하는 학생들에게 수학을 지도함에 있어서 몇 가지 기본적인 문제해결의 기법을 제시하고 수학에 흥미를 갖도록 하는 방법을 기술하고자 한다. 수학 교육의 주된 목적이 G. Polya[4]의 지적처럼 '수학적으로 사고하도록 가르치는 것' 에 있다고 한다면 수학을 가르치는 방법은 학습자가 철저하게 논리적인 사고를 할 수 있도록 지도하여야 한다. 수학에서 제시하는 여러 다양한 구체적인 문제들을 통하여 귀납적 혹은 연역적으로 추론해 나갈 수 있는 능력을 신장시키며, 엄밀한 추론과 논리적 사고 능력을 키울 수 있도록 지도하지 않으면 소기의 목적을 달성할 수 없음은 자명하다고 하겠다. 그와 같은 능력은 구체적인 다양한 문제들을 해결하는 과정을 통해서 얻어질 수 있는데 우리는 거기에 필요한 몇 가지 기법들에 대해서 논의할 것이다.

첫째 수학 문제를 해결하는데 있어서 학습자가 갖춰야 할 가장 중요한 요소이자 동시에 기법은 무엇보다도 그 문제와 직접 혹은 간접적으로 관련되어 있는 수학적인 개념에 대한 올바른 그리고 폭넓은 이해라고 할 수 있다. 잘못 형성된 개념을 가지고 문제 해결에 나선다는 것은 방향을 잃은 채 항해를 하거나 등반을 하는 것과 다를 바 없다. 반면에 올바른 그리고 폭넓은 개념을 지니고 있는 학습자는 문제를 해결함에 있어서 대략적으로 어느 쪽 방향으로 나아가야 한다는 것을 감지할 수 있는 능력을 갖게 되며, 그래서 올바른 방향을 향해 약간씩의 시행착오를 거치면서 문제의 구조와 본질을 파악하게 되고, 그러한 일련의 과정을 통해 문제 해결에 대한 일정한 방법들을 터득하는 것이다.

둘째 기법은 주어진 문제에 대해 그 문제가 과연 성립하는지 아니면 성립하지 않는지를 타진하면서 구체적인 예 또는 반례들을 들어 보이는 절차를 갖는 것이 중요하다는 점이다. 바로 그러한 과정

* 접수일(2009년 4월 15일), 수정일(1차 2009년 4월 28일, 2차 2009년 5월 15일), 게재확정일(2009년 5월 20일)
* ZDM 분류 : D5
* MSC2000 분류 : 97D40, 97D50
* 주제어 : 개념과 이해, 동치관계, 문제 쪼개기
1) 이 논문은 2006년도 서울시립대학교 국내연구년교수 연구비 지원에 의해 연구되었음.

에서 학습자들은 문제가 가지고 있는 구조와 특성들을 감지할 수 있는 기회를 얻게 되며, 어렴풋이 문제 해결의 실마리를 잡아낼 수 있게 된다.

셋째로 중요한 기법은 어떤 수학적인 명제나 조건 혹은 사상(事象)이 주어졌을 때 그것과 서로 동치관계에 놓여 있는 다른 형태의 명제나 조건 혹은 사상으로 바꾸어 봄으로써 현 시점에서는 보이지 않았던 해결의 실마리가 보일 수 있게 된다. 즉 A라는 조건하에서는 어느 쪽으로 전개해 나아가야 할지 막막하기만 하던 문제가 A와 동치관계에 있는 B 또는 C라는 조건하에서 문제를 바라보았을 때 훨씬 더 쉽게 문제풀이의 실마리가 찾아질 수 있다는 뜻이다. 따라서 수학의 교수자는 동치관계에 놓여 있는 명제나 조건 혹은 정리들을 일목요연하게 정리하여 지도하고 학습자는 그 내용들을 잘 이해하고 기억해두어야 한다.

마지막으로 생각해야 할 기법은 (크고 복잡한 문제에서 특히 요구되는 사항인데) 큰 문제를 몇 개의 작은 문제들로 쪼개어 생각하는 방식이다. 처음에 주어진 문제는 크고 복잡하여 해결하기 어려워 보이지만 쪼개어진 작은 각각의 문제들은 학습자들이 이미 해결해 보았거나 다루어 본 경험을 가진 문제들이거나 아니면 원래의 문제보다는 훨씬 쉽게 해결할 수 있는 상황으로 변하게 된다. 이것은 제시된 문제 전체에서 적용될 수도 있지만 문제쪼개기의 단계 단계에서 얻어지는 작은 문제들에서도 적용되어 질 수 있다. 이런 기법은 상당히 강도 높은 연습과 훈련을 통해서 터득할 수 있는데, 수학의 교수자는 학습자들이 이러한 문제 쪼개기 연습을 하기에 적당한 다양한 문제들을 제시해 주고 학습자들은 의식적으로 주어진 문제들을 몇 개의 작은 문제들로 쪼개보는 연습을 하는 것이 중요하다.

위에서 제시한 네 가지 기법들은 서로 독립적일 수도 있지만 어떤 것은 상호 보완적이며 밀접한 관계가 있다고 볼 수 있다. 다음 절에서는 각 항목 마다 구체적으로 그리고 실제적으로 예를 들어가면서 상세하게 기술해 보기로 하자.

II. 문제 해결에 필요한 요소들 및 문제 해결 기법의 실제

1. 올바른 개념의 이해

우선 개념이란 무엇을 뜻하며 그리고 어떤 사물이나 사상을 이해한다는 것은 또 무엇을 뜻하는가? 박성택([2])에 의하면 개념이란 인간이 자각하고 경험한 개개의 사상에서 구체적인 특성은 버리고, 공통적인 속성 혹은 특성을 기초로 하여 독특한 이름이나 기호로서 불릴 수 있도록 한 덩어리로 뭉칠 수 있는 총체를 말한다.

수학적 개념들은 대부분 공식적인 정의로 주어진다. 수학의 학습자들은 수학적 개념의 공식적인 정의를 배우기 이전에 이미 이러 저러한 형태로 그 개념과 마주친 적이 있으며 그에 따라 형성된 인지구조가 학습자의 머릿속에 숨어 있다가 그 개념을 다시 다루게 되면 주어진 개념에 대해 그 이미 형성되어진 인지구조가 적절하게 작동하게 된다(박선화[1], Vinner[7]). 그렇다면 어떤 개념을 이해한

다는 것은 무엇인가? Skemp[6]는 이해란 '자기의 적당한 Schema에 동화시키는 일' 이라고 명쾌하게 말하고 있다.

Ginsburg[3]는 이해를 비형식적 지식, 형식적 지식 사이의 연결구조와 이들 사이의 연결을 강화시켜주는 Schema의 기능, 전이, 일반화 및 수학적 지식의 활용에 대한 역할, 잠재적 학습, 메타인지, 신념체계 등을 포함하는 의미 만들기의 과정으로 보고 있다. 아무튼 쉽게 얘기하여 수학의 어떤 내용을 이해한다는 것은 이미 학습한 것을 새로운 상황에 관련시킬 수 있는 능력이라고 할 수 있다.

'수학 문제를 해결하는데 있어서 학습자가 갖춰야 할 가장 중요한 요소이자 동시에 기법은 무엇보다도 그 문제와 직접 혹은 간접적으로 관련되어 있는 수학적인 개념에 대한 올바른 그리고 폭넓은 이해라고 할 수 있다.' 라는 문제로 다시 돌아와서 논의를 해보자.

'갑'이라는 학생은 어떤 변량들 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 분산을 $V = \dfrac{\sum(x_i - m)^2 f_i}{n}$라는 공식으로 단순하게 그리고 기계적으로만 기억하고 있고 '을'이라는 학생은 각 변량과 그 변량들의 평균값의 차를 제곱하여 만들어진 새로운 변량들 즉

$(x_1 - m)^2, (x_2 - m)^2, \ldots, (x_n - m)^2$의 평균값으로 기억하고 있다고 하자. 이때 '갑'은 분산이라는 개념을 제대로 이해하고 있다고 볼 수 없는 것이다. 따라서 분산과 관련된 어떤 문제가 주어졌을 때 운 좋게 공식을 잘 기억해서, 그리고 그 공식을 기계적으로 잘 적용시키면 문제가 해결되겠지만 그렇지 않을 경우, 즉 문제가 약간 변형되어져 있어서 단순하게 그 공식을 기계적으로 써먹을 수 없는 문제이거나 아니면 공식 자체를 기억하지 못하게 되면 문제 해결은 불가능해지게 된다. 그러나 분산이라는 개념을 올바로 그리고 폭넓게 이해하고 있는 '을'은 공식을 기억하려고 애쓰지 않아도 잘 기억하게 될 뿐 아니라 약간씩 변형된 문제도 처리할 수 있는 능력을 갖추게 되는 것이다.

어떤 특정한 수학적 정의를 깊이 이해하는 문제를 예로 들어보자. 거리공간 M과 M의 부분집합 X가 주어져 있다고 하자(Johnsonbaugh, R.& Pfaffenberger, W.E.[4]). 여기서 'X가 M안에서 조밀하다(dense)'라는 정의는 X가 조건 $\overline{X} = M$ (여기서 $\overline{X}$는 X의 극한점들 전체의 집합을 나타낸다)을 만족할 때로 기술해놓았고 학습자들은 대부분 주어진 정의 그대로 단순하게 $\overline{X} = M$일 때 'X가 M안에서 조밀하다'라고 이해하고 있다면 그것은 매우 허약하게 그 개념을 이해하고 있는 셈이고 따라서 그와 관련된 문제들을 해결하는데 어려움이 따를 수 있다. 이 정의에서 조건 $\overline{X} = M$을 좀 더 자세히 살펴보아 $\overline{X} \subset M$는 항상 성립하는 관계이므로 결국 조건 $\overline{X} = M$은 $\overline{X} \supset M$로 좀 더 좁혀서 정의할 수 있는 문제라는 것을 간파하고 따라서 'M에 들어있는 모든 원소가 $\overline{X}$에 들어갈 때 X가 M안에서 조밀하다'라고 이해하고 더 나아가 '임의의 $x \in M$과 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $d(x,y) < \epsilon$를 만족하는 X의 원소 y가 존재할 때이다' 또는 '임의의 $x \in M$과 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $B_\epsilon(x) \cap X \neq \varnothing$'일 때로 이해하고 있다면 그 학습자는 그 개념과 관련된 문제를 해결함에 있어서 단순히 $\overline{X} = M$일 때 'X가 M안에서 조밀하다'라고 이해하고 있는 학습자보다 문제해결 능력이 더 있다고 하겠다.

2. 구체적인 예를 통해서 식을 세우거나 추론한다

제시된 어떤 문제에 대해 학습자는 우선 그 문제가 과연 성립하는 문제인지 아니면 성립하지 않는 문제인지, 성립한다면 구체적으로 어떤 예를 들 수 있는지 그리고 성립하지 않는다면 어떠한 반례를 들 수 있는지를 타진해 보는 것이 중요하다. 그러한 과정을 거치면서 학습자들은 제시된 문제의 구조를 파악할 수 있으며 문제 해결의 실마리를 잡아낼 수 있게 된다는 점이다. 다음과 같은 문제를 살펴보자.

(1) X는 주어진 한 집합이고
(2) $P(X)$는 X의 부분집합들 전체의 모임을 나타내고
(3) S는 X에서 $\{0, 1\}$로의 함수들 전체의 집합이라고 하자.
이때 집합 S에서 집합 $P(X)$로의 전단사함수를 구성해보라.

단계1 우리는 이 문제를 손쉽게 다루기 위해 (1)에서 집합 X를 유한집합 $X=\{a, b, c\}$으로 잡아 본다.
단계2 (2)에서 $P(X)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$
단계3 (3)에서 집합 S를 $S=\{f_1, f_2, \cdots, f_8\}$를 만들어본다.

	a	b	c
f_1	0	0	0
f_2	1	0	0
f_3	0	1	0
f_4	0	0	1
f_5	1	1	0
f_6	1	0	1
f_7	0	1	1
f_8	1	1	1

위에서 주어진 문제는 단계3에서 만들어본 집합 S와 단계2에서 얻은 집합 $P(X)$ 사이에 일대일 대응을 줄 수 있는 방법을 찾아야 되는 것임을 파악한다. 그런데 두 집합은 각각 8개씩의 원소로 이루어져있다는 사실에 우리는 우선 안도하면서 그렇다면 S의 원소들 $f_1, f_2, f_3. \cdots, f_8$ 각각에 X의 원소 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, X들을 어떻게 짝 지워 주는 것이 근사한 방법인가를 생각하게 된다. 그런데 여기서 우리는 X의 부분집합을 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, X의 순으로 찾아서 쓰는 것과 S의 원소들을 $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_8$의 순으로 쓰는

일은 자연스럽게 여겨진다. 그렇다면 f_1에 $\varnothing$를, f_2에 $\{a\}$를, f_3에 $\{b\}$를, f_4에 $\{c\}$를, f_5에 $\{a, b\}$를, f_6에 $\{a, c\}$를, f_7에 $\{b, c\}$를, 그리고 f_8에 X를 대응시키는 것도 자연스럽지 않겠는가? 이때 우리는 함수 f가 a를 1로 보낸다는 사상(事象)은 X의 부분집합에서 a를 사용한다는 사상과 동일시하고 f가 a를 0으로 보낸다는 사상은 X의 부분집합에서 a를 사용하지 않는다는 사상과 동일시하는 것이 좋겠다는 생각이 번개처럼 우리의 머릿속을 스쳐갈 법하지 않겠는가? 그렇다면 이제 X가 일반적인 임의의 집합인 경우 주어진 문제를 해결할 수 있는 방법이 어렴풋이 떠오를 수 있거나 해결의 실마리를 잡은 듯한 느낌을 우리는 갖게 된다. 이 과정에서 우리가 얻게 되는 가장 큰 소득은 바로 주어진 문제의 구조가 파악되어진다는 점이다. 그래서 우리는 다음과 같은 풀이를 할 수 있는 기쁨을 갖게 될 것이다.

함수 $\psi: S \to P(X)$를 $\psi(f) = E_f$로 정의한다. 여기서 $E_f = \{ x \in X \mid f(x) = 1 \}$임
그러면 함수 ψ는 전단사함수가 된다.

3. 동치관계에 놓여 있는 명제나 정리들 숙지

다음으로 생각할 것은 수학적으로 혹은 논리적으로 동치관계에 놓여있는 명제나 사상들을 가능한 많이 모아서 정리하고 그것을 기억하는 일이 중요하다. 가령 구간 [0, 1]에서 정의된 함수 f가 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$ (여기서 Q는 유리수들의 집합이고 Q^c는 무리수들의 집합을 나타낸다)로 정의될 때 함수 f가 구간 [0,1] 어디에서도 연속이 아님을 증명하는 문제가 학습자에게 주어졌다고 하자. 이 때 '어느 한 점에서 연속이다'라는 정의만 가지고 이 문제를 해결하려면 학습자는 무언가 궁색한 느낌을 갖게 될 것이다. 그러나 다음과 같은 두 명제:

$f: M_1 \to M_2$가 점 a에서 연속이다.
$\Leftrightarrow$ M_1에서 a로 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$에 대해 M_2에서의 수열 $\{f(a_n)\}$이 $f(a)$로 수렴한다.

는 수학적으로 동치임을 알고 그것을 기억하고 있는 학습자라면 위의 문제에 대한 해결의 실마리는 보다 쉽게 찾게 될 것이다.

다른 예를 보자. M을 거리공간이라고 하자. 그러면 다음과 같은 동치인 명제:

M이 compact하다. $\Leftrightarrow$ M의 모든 수열이 수렴하는 부분수열을 갖는다.

를 알고 있는 학습자라면 Bolzano-Weierstrass의 정리 - 유계인 수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다 - 를 보다 우아한 형식으로 증명해보일 수 있게 된다. 위에서 살펴본 바와 같이 A라는 조건하에서는 어느 쪽으로 전개해 나아가야 할지 막막하기만 하던 문제가 A와 동치관계에 있는 B 또는 C라는 조건하에서 문제를 바라보았을 때 훨씬 더 쉽게 문제풀이의 실마리가 찾아질 수 있다는 점에서 주어진 명제나 조건 혹은 사상을 동치관계에 놓여 있는 다른 형태의 명제나 조건 혹은 사상으로 바꾸어 봄으로써 학습자는 문제 해결의 강력한 기법을 갖추게 되는 것이다.

4. 큰 문제는 몇 개의 작은 문제들로 쪼개서 다룬다

마지막으로 수학 문제를 해결하는데 있어서 학습자가 갖춰야 할 약간 고급의 기법에 대해서 알아보자. 큰 문제를 몇 개의 작은 문제들로 쪼개어 생각하는 방식이다. 처음에 주어진 문제는 크고 복잡하여 해결하기 어려워 보이지만 쪼개어진 작은 각각의 문제들은 학습자들이 이미 해결해 보았거나 다루어 본 경험을 가진 문제들이거나 아니면 원래의 문제보다는 훨씬 쉽게 해결할 수 있는 상황으로 변하게 된다. 예를 하나 들어보자.

폐구간 $[a, b]$에서 연속인 실변수 실가함수는 구간 $[a, b]$에서 최대, 최솟값을 갖는다.

라는 문제를 생각해보자. 이 문제는 교수자가 학습자들에게 다음과 같이 몇 개의 작은 문제들로 쪼개어 생각하도록 유도하는 것이 효과적인 학습방법이 되겠다. 즉,

(A) 함수 f가 구간 $[a, b]$의 부분집합 X와 Y에서 유계이면 $X \cup Y$에서도 유계인가?
(B) 함수 f가 구간 $[a, b]$의 유한개의 부분집합들 $X_1, X_2, \cdots, X_n$에서 유계이면 $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$에서도 유계인가?
(C) (B)의 내용에서 언급한 결과가 무한개의 부분집합으로까지 확장할 수 있는가?
(D) 함수 f가 점 $c \in [a,b]$에서 연속이면 적당한 $\delta > 0$가 존재하여 함수 f가 열린구간 $(c-\delta, c+\delta)$에서 유계라고 할 수 있는가?
(E) Γ가 개구간들의 모임으로서 구간 $[a, b]$를 덮으면 Γ의 유한부분집합 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$이 존재하여 이들의 합집합으로 구간 $[a, b]$를 덮을 수 있는가?
(F) 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 그 구간에서 유계인가?
(G) 함수 f가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 (F)에 의해 유계이고 따라서 실수에 대한 공리에 의해 최소상계를 가지며 이 값이 바로 우리가 찾고자 하는 함수 f의 최댓값이 됨을 보인다.

위의 문제를 살펴보면 원래 주어진 문제는 (A)~(G)에서 다루고 있는 각각의 문제들에 비하여 구

조적으로 복잡한 문제이며 따라서 (A)~(G)의 작은 각각의 문제들보다 해결하기가 어려울 수밖에 없다. 수학의 학습자들이 의식적으로 또는 의도적으로 어떤 문제들을 작은 몇 개의 문제들로 쪼개어 생각하는 연습을 통해서 원래 주어진 문제들을 해결하는 이러한 기법을 터득하게 되면, 학습자들은 문제해결의 강력한 수단을 갖게 되었다는 것을 스스로 인식하게 되며 수학적 사고의 묘미를 터득하고 수학에 흥미를 가질 수 있게 된다.

III. 결 론

이상에서 살펴본 네 가지 기법들은 서로 명쾌하게 구분 지을 수 없으며 상호 밀접한 관계를 가지고 있다고 볼 수 있다. 어떤 제시된 문제를 해결해 나가는 과정에서 어떤 기법의 중간 중간에 다른 기법들이 부분적으로 쓰일 수 있으며, 각 기법들 상호간에 서로 보완적으로 작용할 수 있다. 이러한 기법들이 문제 해결의 과정에서 반복적으로 그리고 중첩해서 사용되어 질 때 우리는 어느새 수학적인 사고력을 하게 되고 수학에 재미를 느끼게 될 것이다.

참 고 문 헌

박선화 (1993). 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등요인에 대한 고찰, J. of KSESM.

박성택 (1991). 수학적 개념 학습지도 방법, 제7회 수학교육학 세미나.

Ginsburg H. P. (1990). Assessing understandings of arithmetic, The test of early math. ability, Austin, TX : ProEd.,

Johnsonbaugh, R., & Pfaffenberger, W. E. (1981). *FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL ANALYSIS*, M. DEKKER, INC.

Polya, G. (1945/1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Doubleday&Company, Inc, .

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*, LEA.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, Int. *J. Math Educ. Sci. Technol*., **vol. no.3.**

A Study on Analytical Skills Useful for MATH. Problem Solving*

Sangsup Yum
Department of Mathematics, University of Seoul , Seoul, Korea, 139-701
E-mail : ssyum@uos.ac.kr

Generally, it is considered that analytical skills could not be easily taught and it requires quite a long training period. In this short essay, it was attempted to give four basic analytical skills useful for problem solving in mathematics.

* This paper was supported by University of Seoul 2006
* ZDM Classification : D5
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97D50
* Key Words: Mathematical concept & Understanding, Equivalent