

## 삼각형 방심의 계량적 성질에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)

오 성 주 (합천고등학교)

본 연구는 삼각형의 방접원에 관련된 다양한 대수적 성질을 탐구한 선행연구들의 확장으로, 방접원의 중심인 방심과 꼭짓점, 방심과 내심, 외심, 무게중심, 수심사이의 거리에 관련된 다양한 등식들을 탐구하였다. 특히 본 연구에서는 잘 알려지지 않은 이들 등식을 재발명 또는 발명하고, 등식들의 다양한 변형들을 제시하였으며, 중등학교 수학의 수준에서 이해될 수 있는 증명들을 제시하였다.

### 1. 서론

기하학은 역사적으로 가장 오래 전부터 연구되고 교육되어온 수학의 영역이며, 현재에는 대수학, 확률 및 통계학과 함께 중등학교 수학교육과정을 구성하는 중요한 부분이다. Coxeter & Greitzer(1967, p.xi)에 의하면, '지금까지 기하학을 가르치는 주된 이유들 중의 하나는 기하학의 공리적인 방법이 연역적 추론을 가장 잘 도입할 수 있다고 여겨졌기 때문'이라고 주장하면서, 기하교육에서 연역적 추론, 증명활동의 역할을 강조하였다. 특히 이러한 추론 활동 및 추론 능력은 중등학교를 졸업하는 학생들이 길러야 하는 중요한 능력으로, 인간의 고등정신능력의 중요한 부분을 이룬다.

우리나라의 중등학교 수학과 교육과정에서 다루는 기하학의 내용을 살펴보면, 직선과 평면, 다각형, 이차곡선, 다면체 등을 들 수 있다. Sharygin(1999, pp.255-256)은 '삼각형은 가장 간단한 다각형이며 가장 간단한 도형이다. 원은 학교에서 배우는 매끄러운 도형들의 대표로서, 극한적인 방법으로 전환의 아이디어의 실례가 된다. 삼각형과 원 사이에는 학교에서 배우는 모든 도형들을 포함하여 모든 가능한 다각형들이 놓여있다. ...삼각형은 기하학의 세포이며, 원은 기하학의 심장'이라고 주장하면서, 기하학의 탐구에서 삼각형과 원의 중요성을 강조하였다.

삼각형, 원의 다양한 성질들은 중등학교 기하교육의 중요한 부분을 차지하고 있다. 특히 평면기하학을 논증적인 방법으로 다루는 중학교 기하교육에서 중학교 2학년에서는 삼각형의 성질을 바탕으로 다각형의 성질을 배우며, 중학교 3학년에서는 원의 성질을 폭넓게 학습하도록 되어있다.

삼각형과 원에 대한 기하학적 탐구와 교수학적 활용 가능성을 모색하는 최근의 국내 논문들로는,

\* 접수일(2009년 8월 26일), 수정일(1차 2009년 10월 9일), 게재확정일(2009년 10월 28일)

\* ZDM 분류 : D53

\* MSC2000 분류 : 97D50

\* 주제어 : 삼각형, 방심, 내심, 외심, 수심, 무게중심

유익승·한인기·신현용(2006), 김주봉(1987), 최영기·이지현(2007), 도종훈(2007), 김수현·최윤상(2007), 공선혜·한인기(2008), 김경선·한인기(2007a, 2007b) 등을 들 수 있다. 이들 연구에서는 삼각형의 넓이, 삼각형의 결정과 합동, 삼각형의 높이, Menelaus와 Ceva의 정리, 방접원 등에 대한 내용을 중심으로 창의적인 수학탐구, 수학적 개념의 본질에 대한 다양한 분석이 이루어졌다. 이때 삼각형의 넓이, 삼각형의 결정과 합동, 삼각형의 높이, Menelaus와 Ceva의 정리 등이 삼각형과 선분의 성질 탐구에 관련된다면, 방접원은 삼각형과 원의 성질 탐구라고 할 수 있다. 특히 방접원의 중심인 방심은 삼각형의 두 외각의 이등분선의 교점으로 삼각형의 각과도 관련된 주제이다.

삼각형의 방심은 제 6차 교육과정까지는 중학교 3학년 수학에서 다루다가, 제 7차 교육과정 개정할 때 학습부담 경감 차원에서 삭제되었다<sup>1)</sup>. 그렇지만 방심은 삼각형의 두 외각의 이등분선의 교점이므로, 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점인 내심과 관련하여 확장, 일반화의 방향으로 접근한다면 의미있는 교과내용의 구성 소재가 될 수도 있을 것이다.

본 연구는 삼각형의 방접원에 관련된 다양한 대수적 성질을 탐구한 김경선·한인기(2007a, 2007b) 연구에 관련되며, 이 연구의 결과들을 바탕으로 방접원의 중심인 방심과 꼭짓점, 방심과 내심, 외심, 무게중심, 수심사이의 거리에 관련된 다양한 등식들을 탐구할 것이다. 특히 본 연구에서는 잘 알려지지 않은 이들 등식을 재발명 또는 발명하고, 등식들의 다양한 변형들을 제시할 것이며, 중등학교 수학의 수준에서 이해될 수 있는 평이한 증명들을 제시할 것이다. 이를 통해, 방심과 다른 점사이의 거리에 관련된 다양한 관계식들이 체계적으로 정리될 수 있으며, 이들 자료는 중등학교 또는 과학영재교육원에서 삼각형의 각들, 특히 외각의 성질 탐구에 관련된 심화학습에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

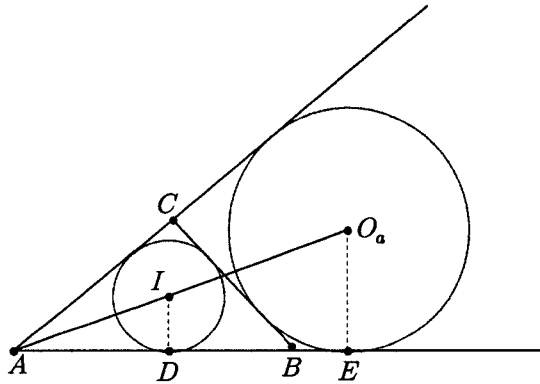
## 2. 방심과 꼭짓점사이의 거리에 대한 등식

삼각형  $ABC$ 의 방심  $O_a$ 는 각  $B$ ,  $C$ 의 외각의 이등분선의 교점으로, 각  $A$ 의 이등분선에도 속한다. 각  $B$ ,  $C$ 의 이등분선에 속하는 방심을 각각  $O_b$ ,  $O_c$ 로 나타내며, 중심이  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O_c$ 인 방접원의 반지름을 각각  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$ 라 하자. 한편 삼각형의  $ABC$ 의 넓이를  $S$ , 변  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ 의 길이를 각각  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 라 하고, 둘레의 절반을  $p$ , 내심을  $I$ , 외심을  $O$ , 무게중심을  $G$ , 수심을  $H$ 라 하며, 내접원의 반지름을  $r$ , 외접원의 반지름을  $R$ 이라 하자. 이제 방심과 삼각형의 꼭짓점사이의 거리에 대한 등식들을 조사하자.

1) 현재 중학교 수학교과서에서 방심을 다루는 외국의 사례를 찾을 수 있는데, 예를 들어 러시아의 Sharygin(2006)의 중학교 기하교과서에서 외각의 이등분선의 중요한 성질로 방접원을 다루고 있음.

성질 1.  $AO_a = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}}$

증명. 삼각형  $ABC$ 에서 꼭짓점  $A$ 와 방심  $O_a$ 를 연결하여, 직각삼각형  $AO_aE$ 를 생각하자(<그림 1>). 그러면  $\sin \frac{A}{2} = \frac{r_a}{AO_a}$ 이므로,  $AO_a = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}}$ 가 얻어진다.  $\square$



<그림 1>

유사한 방법으로,  $BO_b = \frac{r_b}{\sin \frac{B}{2}}$ ,  $CO_c = \frac{r_c}{\sin \frac{C}{2}}$ 가 성립함을 알 수 있다. 얻어진 이들 등식을

더하면,  $AO_a + BO_b + CO_c = \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{r_b}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{r_c}{\sin \frac{C}{2}}$ 가 유도된다. 이제  $AO_a^2$ 에 대한 등식을 살펴보자.

성질 2.  $AO_a^2 = p^2 + r_a^2$

증명. 그림 1에서 직각삼각형  $AO_aE$ 에 피타고라스 정리를 사용하면,  $AO_a^2 = p^2 + r_a^2$ 을 얻을 수 있다.  $\square$

유사한 방법으로  $BO_b^2 = p^2 + r_b^2$ ,  $CO_c^2 = p^2 + r_c^2$ 이 성립함을 알 수 있다. 이들 등식을 서로 더하면,  $AO_a^2 + BO_b^2 + CO_c^2 = 3p^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2$ 이 된다.

한편 김정선·한인기(2007b, p.135)에 의하면,  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ,  $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$ 이 성립하며, 이 두 등식을 연립하면  $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 + 8Rr + r^2 - 2p^2$ 이 유도된다. 이제 얻어진 식을  $AO_a^2 + BO_b^2 + CO_c^2 = 3p^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2$ 에 대입하면, 새로운 등식  $AO_a^2 + BO_b^2 + CO_c^2 = p^2 + 16R^2 + 8Rr + r^2$ 을 얻을 수 있다.

### 성질 3. $AI \cdot AO_a = bc$

증명. <그림 1>에서 삼각형  $AID$ 와  $AO_a E$ 가 닮음이므로,  $AI : AO_a = r : r_a$ 이고  $AI = \frac{r}{r_a} AO_a$ 이다. 이로부터  $AI \cdot AO_a = \frac{r}{r_a} AO_a^2 = \frac{r}{r_a} (p^2 + r_a^2) = \frac{rp^2}{r_a} + rr_a$ 이 성립한다는 것을 알 수 있다. 한편 김정선·한인기(2007b, p.136)에 의하면  $rr_a = (p-b)(p-c)$ 이 성립하며, 등식  $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ 이 성립한다. 이로부터  $AI \cdot AO_a = \frac{p-a}{p} p^2 + (p-b)(p-c) = 2p^2 - p(a+b+c) + bc = bc$ 가 증명된다.  $\square$

증명과정에서 사용한 등식  $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ 은  $r_a = \frac{S}{p-a}$  2),  $S = rp$ 로부터 얻어진다. 성질 3의 증명과 유사한 방법으로,  $BI \cdot BO_b = ca$ ,  $CI \cdot CO_c = ab$ 가 된다는 것을 보일 수 있다.

### 성질 4. $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = 4Rp^2$

증명. 성질 3에 의해  $AI \cdot AO_a = bc$ ,  $BI \cdot BO_b = ca$ ,  $CI \cdot CO_c = ab$ 이 성립하므로, 이들을 서로 곱하면  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = \frac{bc}{AI} \cdot \frac{ca}{BI} \cdot \frac{ab}{CI}$ 이 된다. 한편 Popruzenko(1939, p.46)에 의하면  $AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$ 이 성립하며,  $S = \frac{abc}{4R}$ 와  $S = pr$ 로부터  $abc = 4Rpr$ 이 유도되므로,  $AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$ ,  $abc = 4Rpr$ 을  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = \frac{bc}{AI} \cdot \frac{ca}{BI} \cdot \frac{ab}{CI}$ 에 대입하자. 그러면 증명하려는 등식  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = \frac{a^2 b^2 c^2}{4r^2 R} = 4Rp^2$ 이 유도된다.  $\square$

2) 삼각형의 넓이에 대한 이 등식의 증명은 김정선·한인기(2007a, pp.387-388)에 제시되어 있음.

증명과정에 사용한 등식  $AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$ 의 증명을 살펴보자. <그림 1>에서  $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ ,

$$BI = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, CI = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \text{임을 알 수 있다. 이로부터 } AI \cdot BI \cdot CI = \frac{r^3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \text{이 된}$$

다. 그런데  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$  이므로  $AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$ 이 성립한다.

등식  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ 은 삼각형의 각의 절반에 대한 사인값과  $R, r$  사이의 관계를 나타내는 흥미로운 관계식이다. 삼각형  $ABC$ 에 코사인 정리를 사용하면,  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 이며, 반각공식에 의해  $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$ , 즉  $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ 가 된다. 이제 유사한 방법으로  $\sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}$ 를 구하여 서로 곱하면,  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{S^2}{pabc}$ 가 된다. 이제  $S = pr, S = \frac{abc}{4R}$ 임을 이용하면,  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ 가 증명된다.

$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}, \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$ 와 같은 등식도 성립한다. <그림 1>에서  $\tan \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$ 이므로,  $\tan \frac{B}{2} = \frac{r_b}{p}, \tan \frac{C}{2} = \frac{r_c}{p}$ 이다. 이들을 서로 곱하면,  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r_a r_b r_c}{p^3}$ 이 된다. 김정선 · 한인기(2007b, p.134)에 의하면  $S = \frac{r_a r_b r_c}{p}$ 가 성립하므로  $r_a r_b r_c = Sp =$

$rp^2$ 이 얻어진다. 이로부터  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$ 이 얻어진다. 한편  $\cos \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2}}$ 이므로,

$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$ 도 쉽게 증명될 수 있다.

성질 5.  $\frac{bc}{AO_a^2} + \frac{ca}{BO_b^2} + \frac{ab}{CO_c^2} = 1$

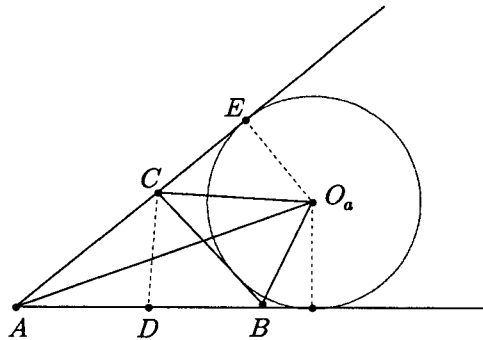
증명. 성질 3에 의해  $AI \cdot AO_a = bc, BI \cdot BO_b = ac, CI \cdot CO_c = ab$ 이 성립하며, 김정선 · 한인기(2007a, p.389)에 의하면  $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ 이 성립하므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{bc}{AO_a^2} + \frac{ca}{BO_b^2} + \frac{ab}{CO_c^2} &= \frac{AI \cdot AO_a}{AO_a^2} + \frac{BI \cdot BO_b}{BO_b^2} + \frac{CI \cdot CO_c}{CO_c^2} \\ &= \frac{AI}{AO_a} + \frac{BI}{BO_b} + \frac{CI}{CO_c} = \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} \\ &= r \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) = r \cdot \frac{1}{r} = 1 \end{aligned}$$

이로부터  $\frac{bc}{AO_a^2} + \frac{ca}{BO_b^2} + \frac{ab}{CO_c^2} = 1$ 이 증명된다.  $\square$

**성질 6.**  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = 4Rr_a^2$

**증명.** 삼각형  $ABC$ 에 방접원을 작도하고, 각  $C$ 의 이등분선  $CD$ 를 긋자(그림 2).  $CD$ 와  $CO_a$ 는 각  $ACB$ ,  $BCE$ 의 이등분선이므로, 각  $DCO_a$ 는 직각이며,  $\angle O_aCE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C$ 이다. 그러므로  $\sin \angle O_aCE = \sin \left( 90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$  이고,  $\cos \frac{C}{2} = \frac{r_a}{CO_a}$ 이다. 유사한 방법으로,  $\cos \frac{B}{2} = \frac{r_a}{BO_a}$ 이다. 그리고  $\cos \frac{A}{2} = \frac{p}{AO_a}$ 이다. 즉  $AO_a = \frac{p}{\cos \frac{A}{2}}$ ,  $BO_a = \frac{r_a}{\cos \frac{B}{2}}$ ,  $CO_a = \frac{r_a}{\cos \frac{C}{2}}$ 가 된다. 이들을 서로 곱하고  $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$ 임을 생각하면,  $AO_a \cdot BO_a \cdot CO_a = \frac{p r_a^2}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4Rr_a^2$ 이 얻어진다.  $\square$



<그림 2>

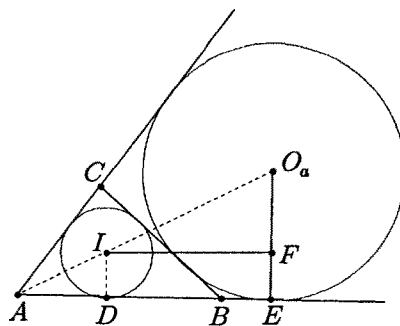
살펴본 바와 같이, 여기서는 삼각형의 방심과 꼭짓점사이의 거리에 대한 다양한 등식들을 찾아, 이를 증명하였다. 우선 방심과 한 꼭짓점사이의 거리  $AO_a$ ,  $BO_b$ ,  $CO_c$ , 이들의 제곱  $AO_a^2$ ,  $BO_b^2$ ,  $CO_c^2$ 에 대한 등식을 증명하였고,  $AI \cdot AO_a$ ,  $BI \cdot BO_b$ ,  $CI \cdot CO_c$ ,  $AO_a + BO_b + CO_c$ 에 대한 등식을 유도하였다. 이를 바탕으로 방심과 꼭짓점사이의 거리에 관련된 등식  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = 4Rp^2$ ,  $\frac{bc}{AO_a^2} + \frac{bc}{AO_b^2} + \frac{ca}{BO_b^2} + \frac{ab}{CO_c^2} = 1$ ,  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = 4Rr_a^2$ 를 증명하였다. 특히 증명 과정에 사용된 수학적 지식들 중에서 중등학교 교육과정을 벗어난 내용은 참고문헌에 대한 상세한 정보를 제공하였으며, 증명과정도 초등수학 수준의 수학탐구로 이해될 수 있도록 평이한 증명을 제시하였다.

### 3. 방심과 다른 중심사이의 거리에 대한 등식

삼각형의 중심은 내심, 외심, 수심, 무게중심, 방심을 말한다. 이 중심들 사이의 거리에 관련하여 몇몇 공식들이 수학서적에 소개되어 있지만, 방심에 관련하여서는 잘 알려져 있지 않다. 여기서는 방심과 내심, 외심, 수심, 무게중심 사이의 거리, 방심들 사이의 거리에 관련된 등식들을 체계적으로 기술하고, 이것에 대한 상세한 증명을 살펴보자.

**성질 7(방심과 내심사이의 거리).**  $IO_a^2 = a^2 + (r_a - r)^2$

**증명.** 삼각형에서 내심과 방심은 각  $A$ 의 이등분선에 속한다. <그림 3>에서 직각삼각형  $IFO_a$ 를 생각하자. 그러면 피타고라스 정리에 의해,  $IO_a^2 = IF^2 + O_aF^2$ 이다. 여기서  $AE = p$ ,  $AD = p - a$ 이므로  $IF = AE - AD = p - (p - a) = a$ 이며,  $O_aF = r_a - r$ 이다. 이들을  $IO_a^2 = IF^2 + O_aF^2$ 에 대입하면,  $IO_a^2 = a^2 + (r_a - r)^2$ 이 얻어진다. □



<그림 3>

한편 <그림 3>에서  $\angle O_aIF = \angle \frac{A}{2}$ ,  $O_aR = r_a - r$ 이므로, 내심과 방심 사이의 거리에 대한 다른 등식  $IO_a = \frac{r_a - r}{\sin \frac{A}{2}}$ 도 얻을 수 있다. 이 등식을 이용하여, 다음을 증명할 수 있다.

성질 8.  $IO_a \cdot IO_b \cdot IO_c = 16R^2r$

증명.  $IO_a = \frac{r_a - r}{\sin \frac{A}{2}}$ ,  $IO_b = \frac{r_b - r}{\sin \frac{B}{2}}$ ,  $IO_c = \frac{r_c - r}{\sin \frac{C}{2}}$ 이므로, 이들을 서로 곱하자.

$$IO_a \cdot IO_b \cdot IO_c = \frac{r_a - r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{r_b - r}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{r_c - r}{\sin \frac{C}{2}}$$

한편 성질 3의 증명에 사용한 등식  $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ 로부터  $r_a - r = \frac{ar_a}{p}$ 이 성립하며, 유사한 방법으로  $r_b - r = \frac{br_b}{p}$ ,  $r_c - r = \frac{cr_c}{p}$ 이 성립함을 알 수 있다. 그리고  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ 이므로

$$\text{로, } IO_a \cdot IO_b \cdot IO_c = \frac{r_a - r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{r_b - r}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{r_c - r}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{abc r_a r_b r_c}{\frac{p^3}{r}} = \frac{abc r_a r_b r_c 4R}{rp^3} \text{이 된다.}$$

한편  $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$ 의 증명에서  $r_a r_b r_c = rp^2$ 을 유도하였으며, 성질 4의 증명에서  $abc = 4Rpr$ 을 보였으므로, 이들 등식으로부터  $IO_a \cdot IO_b \cdot IO_c = \frac{16r^2 p^3 R^2}{rp^3} = 16R^2r$ 이 성립함을 알 수 있다.  $\square$

이제 삼각형  $ABC$ , 임의의 점  $P$ 에서  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$ <sup>3)</sup>이 성립한다는 것을 보이고, 이를 이용하여 방심과 무게중심사이의 거리를 구하자.

좌표평면의 원점으로 변  $BC$ 의 중점  $M$ 을 잡고, 직선  $BC$ 를  $x$ 으로 하자. 이제 삼각형  $ABC$ 의 꼭짓점의 좌표를 각각  $A(p, q)$ ,  $B(-r, 0)$ ,  $C(r, 0)$ , 점  $P$ 의 좌표를  $(x, y)$ 라 하자. 그러면 삼각형  $ABC$ 의 무게중심 좌표는  $G\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$ 이다.

3) 이 등식을 Leibniz geometrical theorem이라고 부름.



이제 점들 사이의 거리 공식을 이용하여 등식의 좌변을 정리하면,

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= (x-p)^2 + (y-q)^2 + (x+r)^2 + y^2 + (x-r)^2 + y^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 + p^2 + q^2 + 2r^2 - 2px - 2qy \end{aligned}$$

이 되며, 우변은 다음과 같이 정리할 수 있다.

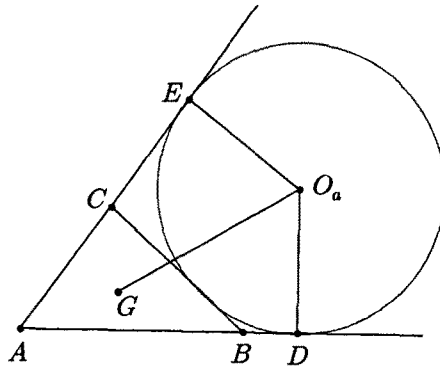
$$\begin{aligned} GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2 &= \frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{9}q^2 + \left(\frac{p}{3} + r\right)^2 + \frac{q^2}{9} + \left(\frac{p}{3} - r\right)^2 + \frac{q^2}{9} + 3\left(x - \frac{p}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{q}{3}\right)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 + p^2 + q^2 + 2r^2 - 2px - 2qy \end{aligned}$$

이로부터 등식  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$ 이 증명된다.

Leibniz geometrical theorem에서 임의의 점  $P$ 로 외심, 내심, 수심, 방심 등을 잡으면, 무게중심으로부터 이들 중심까지의 거리를 구할 수 있다.

성질 9(방심과 무게중심사이의 거리).  $GO_a^2 = r_a^2 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{3}a(b+c) + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$

증명. Leibniz geometrical theorem에 의해,  $AO_a^2 + BO_a^2 + CO_a^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GO_a^2$ 이 성립한다. 이제 임의의 점  $P$ 로 방심  $O_a$ 를 생각하면, 등식  $3GO_a^2 = AO_a^2 + BO_a^2 + CO_a^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$ 가 얻어진다.



<그림 4>

이제  $AO_a^2$ ,  $BO_a^2$ ,  $CO_a^2$ 을 구하자. <그림 4>에서  $AD = p$ ,  $BD = p - c$ ,  $CE = p - b$ 이다. 그리고 삼각형  $ADO_a$ ,  $BDO_a$ ,  $CEO_a$ 가 직각삼각형이므로, 피타고라스 정리에 의해  $AO_a^2 = p^2 + r_a^2$ ,  $BO_a^2 = (p - c)^2 + r_a^2$ ,  $CO_a^2 = (p - b)^2 + r_a^2$ 가 된다. 결국  $AO_a^2 + BO_a^2 + CO_a^2 = p^2 + r_a^2 +$

$(p-c)^2 + r_a^2 + (p-b)^2 + r_b^2$ 이다. 한편  $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ 이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 3GO_a^2 &= p^2 + r_a^2 + (p-c)^2 + r_a^2 + (p-b)^2 + r_b^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 3p^2 - 2p(b+c) + 3r_a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$2p = a + b + c$ 이므로,  $GO_a^2 = r_a^2 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{3}a(b+c) + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ 이 증명된다.  $\square$

한편 김경선·한인기(2007b, pp.140-141)에 의하면, 등식  $ab = r_a r_b + rr_c$ ,  $ac = r_a r_c + rr_b$ ,  $ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$ 이 성립하며,  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ,  $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$ 이다. 이제  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab+bc+ca)$ 에  $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$ ,  $ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$ 을 대입하면,  $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$ 이 성립한다. 이들을 성질 9의 등식에 대입하면  $GO_a^2$ 에 대한 다른 등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 9GO_a^2 &= 9r_a^2 - 3p^2 + 3a(b+c) + 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 9r_a^2 - 3p^2 + 3(r_a r_b + rr_c + r_c r_a + rr_b) + 2(2p^2 - 8Rr - 2r^2) \\ &= p^2 + 9r_a^2 - 4r^2 - 16Rr + 3(r_a r_b + rr_c + r_c r_a + rr_b) \\ &= p^2 + 9r_a^2 - 4r^2 - 16Rr + 3(r_a + r)(r_b + r_c) \end{aligned}$$

이제  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ 을 생각하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} 9GO_a^2 &= p^2 + 9r_a^2 - 4r^2 - 16Rr + 3(r_a + r)(4R + r - r_a) \\ &= p^2 + 9r_a^2 - 4r^2 - 16Rr + 3(4Rr_a + r_a r - r_a^2 + 4Rr + r^2 - rr_a) \\ &= p^2 + 6r_a^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_a \end{aligned}$$

이로부터  $GO_a^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 6r_a^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_a)$ 을 얻을 수 있다. 이를 이용하여, 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\text{성질 10. } GI^2 + GO_a^2 + GO_b^2 + GO_c^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

4) 삼각형  $ABC$ 의 꼭짓점  $A, B, C$ 에서 그은 중선의 길이  $m_a, m_b, m_c$ 이 각각  $\frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{4}$ ,  $\frac{(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4}$ ,  $\frac{(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{4}$ 이며,  $AG = \frac{2}{3}m_a$ ,  $BG = \frac{2}{3}m_b$ ,  $CG = \frac{2}{3}m_c$ 라는 것으로부터 얻어짐.

증명. Popruzenko(1939, p.39)에 의하면 무게중심과 내심사이에  $GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ 이 성립하며,  $GO_a^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 6r_a^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_a)$ ,  $GO_b^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 6r_b^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_b)$ ,  $GO_c^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 6r_c^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_c)$ 이다. 이들 등식을 더하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} GI^2 + GO_a^2 + GO_b^2 + GO_c^2 &= \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr) + \frac{1}{9}(p^2 + 6r_a^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_a) \\ &\quad + \frac{1}{9}(p^2 + 6r_b^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_b) + \frac{1}{9}(p^2 + 6r_c^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_c) \\ &= \frac{1}{9}\{4p^2 + 2r^2 - 28Rr + 6(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) + 12R(r_a + r_b + r_c)\} \\ &= \frac{1}{9}\{4p^2 + 2r^2 - 28Rr + 6(16R^2 + 8Rr + r^2 - 2p^2) + 12R(4R + r)\} \\ &= \frac{1}{9}(144R^2 - 8p^2 + 8r^2 + 32Rr) = 16R^2 - \frac{4}{9}(2p^2 - 2r^2 - 8Rr) \\ &= 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

이다. 이로부터  $GI^2 + GO_a^2 + GO_b^2 + GO_c^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ 이 성립한다.  $\square$

등식  $GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ 는 Leibniz geometrical theorem에서 임의의 점  $P$ 대신에 내심  $I$ 를 잡아 증명할 수 있다. 즉 <그림 3>에서 직각삼각형  $AID$ 에 피타고라스 정리를 이용하여  $IA^2 = (p-a)^2 + r^2$ 을 얻고, 유사한 방법으로  $IB^2 = (p-b)^2 + r^2$ ,  $IC^2 = (p-c)^2 + r^2$ 을 유도할 수 있다. 이제  $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ 을 생각하면,  $3GI^2 = 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ ,  $GI^2 = r^2 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ 이 된다. 이제  $GI^2$ 의 등식에  $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$ 을 대입하면,  $GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$ 이 얻어진다.

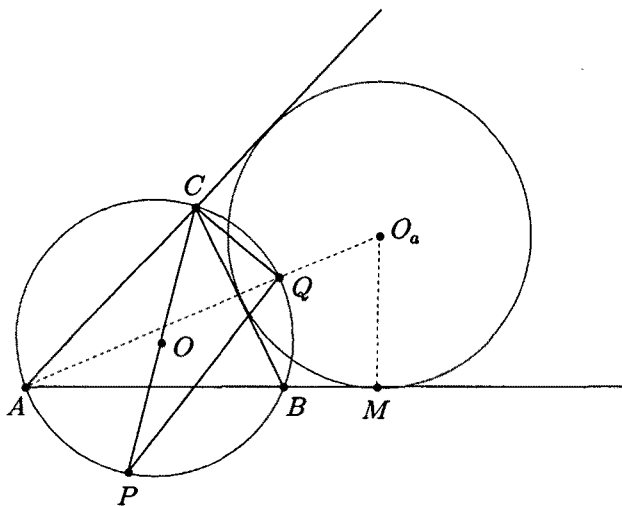
성질 11(방심과 외심사이의 거리).  $OO_a^2 = R^2 + 2Rr_a$

증명. 삼각형  $ABC$ 에 외접원, 방점원을 작도하고, 방점원과 변  $AB$ 의 접점을  $M$ 이라 하자(<그림 5>). 이제 삼각형  $CPQ$ 와  $O_aAM$ 이 닮음임을 보이자. 호  $CQ$ 의 원주각으로 각  $CAQ$ 와  $CPQ$ 가 같다. 그리고 방심  $O_a$ 는 각  $A$ 의 이등분선에 속하므로 각  $CAO_a$ 와  $O_aAB$ 가 같다. 그러므로 각

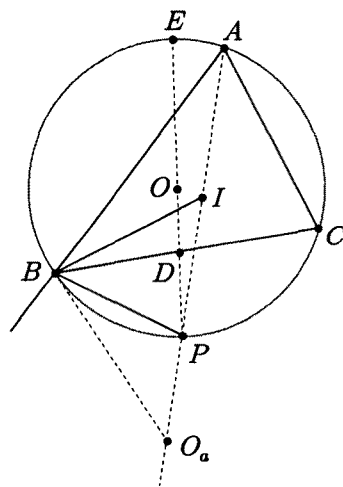
$CPQ$ 와  $O_aAM$ 이 같다. 한편 각  $CQP$ 는 지름  $CP$ 에 대한 원주각이므로 직각이며, 접선의 성질에 의해 각  $O_aMA$ 도 직각이 된다. 이로부터 삼각형  $CPQ$ 와  $O_aAM$ 은 닮음이며,  $\frac{CP}{O_aA} = \frac{CQ}{O_aM}$  이고,  $O_aA \cdot CQ = CP \cdot O_aM$ 이 성립한다. 이때  $CP = 2R$ ,  $O_aM = r_a$ 이므로  $O_aA \cdot CQ = 2Rr_a$ 이다.

이제 직선  $OO_a$ 를 작도하여, 삼각형  $ABC$ 의 외접원과 외접원의 교점을  $O_a$ 로부터 각각  $L, N$ 이라 하자. 그러면 삼각형  $ABC$ 의 외접원과 직선  $AO_a, OO_a$ 에서  $O_aQ \cdot O_aA = O_aL \cdot O_aN$ 이 성립한다. 이때  $O_aN = OO_a + R$ ,  $O_aL = OO_a - R$ 이므로,  $O_aQ \cdot O_aA = OO_a^2 - R^2$ 이 된다.

한편  $O_aQ = CQ$ <sup>5)</sup>이므로  $O_aQ \cdot O_aA = CQ \cdot O_aA$ 이다. 그런데  $O_aA \cdot CQ = 2Rr_a$ 이므로  $2Rr_a = OO_a^2 - R^2$ ,  $OO_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ 이 증명된다. □



<그림 5>



<그림 6>

성질 11에서 방심과 외심사이의 거리 등식  $OO_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ 는 내심  $I$ 과 외심사이의 거리 등식(오일러 공식으로 알려진)  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ 과 유사점을 볼 수 있다. 그리고 방심과 내심이 각의 이등분선들의 교점이라는 공통점이 있다는 것을 감안하면, 내각의 이등분선의 교점인 내심과 외심사이의 거리를 규정하는 오일러 공식  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ 으로부터 외각의 이등분선의 교점인 방심과 외심사이의 거리 공식을 유추하는 교수학적 상황을 생각할 수도 있다. 즉 내심과 외심사이의 거리의 제

5) 삼각형  $QCB$ 가 이등변삼각형이며,  $QBO_a$ 가 이등변삼각형을 생각하면, 선분  $CQ, BQ, QO_a$ 이 같음을 알 수 있음.

곱을 외접원의 반지름의 제곱, 외접원과 내접원의 반지름의 곱을 이용하여 나타내므로, 방심과 외심사의 거리의 제곱을 외접원의 반지름의 제곱, 외접원과 방접원의 반지름의 곱을 이용하여 나타낼 수 있다는 것을 유추하고, 이를 증명을 통해 확인하는 교수-학습 상황을 생각할 수도 있을 것이다.

외접원의 한 성질을 이용한 다른 증명을 살펴보자. 한인기·꾸쉬니르(2008, p.244)에 의하면, 삼각형 ABC의 내심을 I, 직선 AI와 외접원의 교점을 P라 하면(<그림 6>),  $PI=BI$ 가 성립한다.

이제 각 B의 외각의 이등분선  $BO_a$ 를 그으면, 각  $IBO_a$ 는 직각이 된다. 이로부터 삼각형  $IBO_a$ 는 직각삼각형이며 삼각형  $PBI$ 는  $PI=PB$ 인 이등변삼각형이므로, 삼각형  $PBO_a$ 는 이등변삼각형이고  $PB=PO_a$ 가 성립한다. 한편 P는 호 BC의 중점이므로, 점 O, P를 지나는 직선과 현 BC의 교점을 D라 하면(<그림 6>),  $PB^2=PD \cdot PE$ 가 성립한다<sup>6)</sup>. 이를 이용하면, 성질 11에 대한 다음과 같은 증명을 얻을 수 있다.

성질 11의 다른 증명<sup>7)</sup>. 그림 5에서 선분  $OO_a$ 를 작도하여, 삼각형  $OPO_a$ 를 생각하자. 코사인 정리를 사용하면,  $OO_a^2=OP^2+PO_a^2-2OP \cdot PO_a \cos \angle OPO_a$ 가 얻어진다.

이제 OP의 연장선에  $O_a$ 로부터 수선을 그어 H라 하자. 그러면  $\angle OPO_a=180^\circ-\angle O_aPH$ 이며  $\cos \angle OPO_a=-\cos \angle O_aPH$ 이다. 그러므로  $PO_a \cos \angle OPO_a=-PH$ 이며,  $OO_a^2=OP^2+PO_a^2+2OP \cdot PH$ 이다. 한편  $PB=PO_a$ 이며  $PB^2=PD \cdot PE$ 이므로,  $PO_a^2=PB^2$ ,  $PB^2=2R \cdot PD$ , 즉  $PO_a^2=2R \cdot PD$ 이다. 그리고  $OP=R$ 이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} OO_a^2 &= OP^2 + PO_a^2 + 2OP \cdot PH = R^2 + 2R \cdot PD + 2R \cdot PH \\ &= R^2 + 2R(PD + PH) = R^2 + 2R \cdot DH \end{aligned}$$

이때  $DH=r_a$ 이므로, 구하는 등식  $OO_a^2=R^2+2Rr_a$ 이 얻어진다. □

성질 12.  $IO^2+OO_a^2+OO_b^2+OO_c^2=12R^2$

증명. 성질 11에 의해  $OO_a^2=R^2+2Rr_a$ ,  $OO_b^2=R^2+2Rr_b$ ,  $OO_c^2=R^2+2Rr_c$ 이며, Ponarin(2004)에 의하면  $IO^2=R^2-2Rr$ 이 성립하므로, 이들을 모두 더하자.

$$\begin{aligned} IO^2+OO_a^2+OO_b^2+OO_c^2 &= R^2-2Rr+R^2+2r_aR+R^2+2r_bR+R^2+2r_cR \\ &= 4R^2+2R(r_a+r_b+r_c-r)=4R^2+2R(4R+r-r) \\ &= 12R^2 \end{aligned}$$

6) 호 BP와 CP가 같으므로,  $\angle BEP=\angle CBP$ 가 된다. 그러므로 BP는 세 점 B, D, E를 지나는 원의 접선이 되므로, 등식이 성립함.

7) 이 증명은 Kushnir(2004, p.69)의 접근 방법을 바탕으로 하여 얻어진 것임.

이로부터  $IO^2 + OO_a^2 + OO_b^2 + OO_c^2 = 12R^2$ 임이 증명된다.  $\square$

내심과 외심사이의 거리 공식  $IO^2 = R^2 - 2Rr$ 는 오일러 공식으로 널리 알려져 있다. 삼각형  $ABC$ 의 외접원을 생각하여, 원의 내부에서 교차하는 현의 성질을 이용하면 증명을 얻을 수 있다.

성질 13(방심과 수심사이의 거리).  $HO_a^2 = 4R^2 + r^2 + 2r_a^2 - p^2 + 4Rr$

증명. 삼각형  $ABC$ 에서 외심  $O$ , 무게중심  $G$ , 수심  $H$ 는 한 직선에 속하며,  $OH = 3GO$ 가 성립한다(<그림 7>). 이제 삼각형  $OO_aH$ 를 생각하자. 삼각형  $OO_aH$ 에 코사인 정리를 사용하면,  $HO_a^2 = OO_a^2 + OH^2 - 2OO_a \cdot OH \cos \angle O_aOH$ 이다.

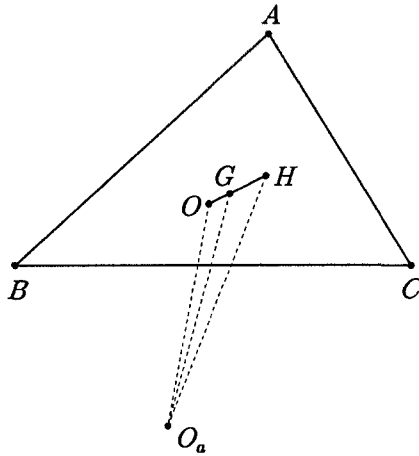
이제  $\cos \angle O_aOH$ 를 생각하자.  $\angle O_aOH = \angle O_aOG$ 이므로, 삼각형  $OO_aG$ 에서 코사인 정리를 이용하여  $\cos \angle O_aOH$ 를 구할 수 있다.  $GO_a^2 = OO_a^2 + OG^2 - 2OO_a \cdot OG \cos \angle O_aOH$ 이므로,  $\cos \angle O_aOH = \frac{OO_a^2 + OG^2 - GO_a^2}{2OO_a \cdot OG}$ 가 된다. 이것을  $HO_a^2$ 의 등식에 대입하자. 이때

$OH = 3GO$ 임을 생각하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} HO_a^2 &= OO_a^2 + OH^2 - \frac{OH}{OG}(OO_a^2 + OG^2 - GO_a^2) \\ &= OO_a^2 + OH^2 - 3(OO_a^2 + OG^2 - GO_a^2) \\ &= OH^2 - 2OO_a^2 - 3OG^2 + 3GO_a^2 = \frac{2}{3}OH^2 - 2OO_a^2 + 3GO_a^2 \end{aligned}$$

$GO_a^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 6r_a^2 - r^2 - 4Rr + 12Rr_a)$ ,  $OO_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ 임을 생각하고, Kushnir(2004, p.8)에 의하면  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ 이 성립하므로, 이들을 얻어진 식에 대입하여 정리하면,  $HO_a^2 = 4R^2 + r^2 + 2r_a^2 - p^2 + 4Rr$ 이 증명된다.  $\square$

등식  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ 은 삼각형  $AOH$ 에 코사인 정리를 사용하여 얻어질 수 있다. 한편 방심과 수심사이의 거리 공식  $HO_a^2 = 4R^2 + r^2 + 2r_a^2 - p^2 + 4Rr$ 에  $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$ 을 대입하여 정리하면, 등식  $HO_a^2 = 2r_a^2 + 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ 을 얻을 수 있다.



<그림 7>

성질 14.  $HI^2 + HO_a^2 + HO_b^2 + HO_c^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$

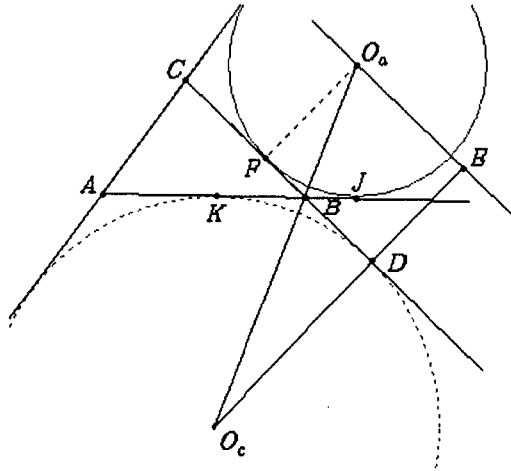
증명.  $HO_a^2 = 4R^2 + 4Rr + r^2 + 2r_a^2 - p^2$ ,  $HO_b^2 = 4R^2 + 4Rr + r^2 + 2r_b^2 - p^2$ ,  $HO_c^2 = 4R^2 + 4Rr + r^2 + 2r_c^2 - p^2$ 이며, Popruzenko(1939, p.39)에 의하면  $HI^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$ 이므로, 다음이 성립한다.

$$HI^2 + HO_a^2 + HO_b^2 + HO_c^2 = 16R^2 + 16Rr + 6r^2 - 4p^2 + 2(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2)$$

한편,  $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2 + 8Rr + r^2 - 2p^2$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$ 이므로  $HI^2 + HO_a^2 + HO_b^2 + HO_c^2 = 48R^2 + 32Rr + 8r^2 - 8p^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$ 이다. 이로부터 등식이 증명된다. □

성질 15(방심들 사이의 거리).  $O_aO_c^2 = (r_a + r_c)^2 + b^2$

증명. 삼각형 ABC에 방심  $O_a$ 를 지나 변 BC와 평행한 직선을 긋고, 방심  $O_c$ 와 그 접점을 연결한 직선과의 교점을 E라 하자(<그림 8>). 그러면 삼각형  $O_aO_cE$ 가 직각삼각형이므로  $O_aO_c^2 = O_aE^2 + O_cE^2$ 이다. 한편  $O_cD = r_c$ ,  $DE = r_a$ 이므로  $O_cE = r_a + r_c$ 이다. 그리고  $O_aE = FD = FB + BD$ 이다. 이때  $FB = BJ = p - c$  이고,  $BD = CD - CB = p - a$ 이므로  $O_aE = 2p - a - c = b$ 이다. 따라서  $O_aO_c^2 = O_aE^2 + O_cE^2 = (r_a + r_c)^2 + b^2$ 이 성립한다. □



<그림 8>

성질 16.  $O_a O_b^2 + O_b O_c^2 + O_c O_a^2 = 8R(4R+r)$

증명. 성질 15에서  $O_a O_b^2 = (r_a + r_b)^2 + c^2$ ,  $O_b O_c^2 = (r_b + r_c)^2 + a^2$ ,  $O_c O_a^2 = (r_c + r_a)^2 + b^2$  이 얻어지므로, 이들을 서로 더하자.

$$\begin{aligned} O_a O_b^2 + O_b O_c^2 + O_c O_a^2 &= (r_a + r_b)^2 + c^2 + (r_b + r_c)^2 + a^2 + (r_c + r_a)^2 + b^2 \\ &= (r_a + r_b + r_c)^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

한편  $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 16R^2$ 이 성립하므로, 이들을 대입하면  $O_a O_b^2 + O_b O_c^2 + O_c O_a^2 = (4R + r)^2 + 16R^2 - r^2 = 8R(4R + r)$ 이 얻어진다. □

성질 17.  $O_a O_b \cdot O_b O_c \cdot O_c O_a = 16R^2 p$

증명. 삼각형  $O_a O_b O_c$ 의 넓이는  $2Rp$ 가 되는데, 삼각형  $O_a O_b O_c$ 의 넓이를 다른 방법으로 구하여 연립하자. 즉  $S_{O_a O_b O_c} = 2Rp$ ,  $S_{O_a O_b O_c} = \frac{1}{2} O_a O_b \cdot CO_c = \frac{1}{2} O_b O_c \cdot AO_a = \frac{1}{2} O_c O_a \cdot BO_b$ 이다.

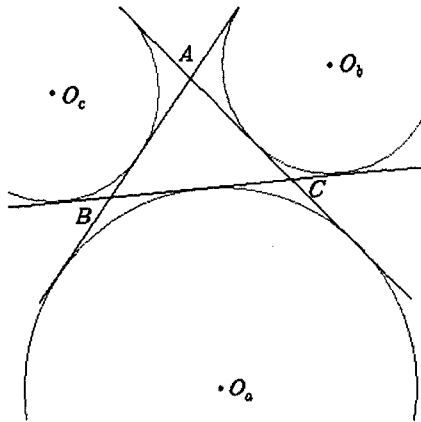
이로부터  $O_a O_b = \frac{4Rp}{CO_c}$ ,  $O_b O_c = \frac{4Rp}{AO_a}$ ,  $O_c O_a = \frac{4Rp}{BO_b}$ 가 성립한다. 이제 얻어진 등식들을 서로 곱하면,

$$O_a O_b \cdot O_b O_c \cdot O_c O_a = \frac{64p^3 R^3}{AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c} = \frac{64p^3 R^3}{4Rp^2} = 16R^2 p \text{이며 등식이 증명된다. } \square$$

증명과정에 사용된 삼각형  $O_a O_b O_c$ 의 넓이가  $2Rp$ 인 것을 자세히 살펴보자. <그림 9>에서 삼각형  $O_a O_b O_c$ 의 넓이는 삼각형  $ABC$ ,  $O_a BC$ ,  $O_b CA$ ,  $O_c AB$ 의 넓이의 합과 같다. 삼각형  $ABC$ 의



넓이는  $r_a(p-a)$ 이며, 삼각형  $O_aBC$ ,  $O_bCA$ ,  $O_cAB$ 의 넓이는 각각  $\frac{1}{2}ar_a$ ,  $\frac{1}{2}br_b$ ,  $\frac{1}{2}cr_c$ 이므로, 이들의 합을 구하자. 그러면  $O_aO_bO_c$ 의 넓이는  $-\frac{1}{2}ar_a + \frac{1}{2}br_b + \frac{1}{2}cr_c + pr_a$ 이 된다. 이제  $ar_a = p(r_a - r)$ ,  $br_b = p(r_b - r)$ ,  $cr_c = p(r_c - r)$ 인 것을 이용하면, 삼각형  $O_aO_bO_c$ 의 넓이가  $2Rp$ 임이 유도된다.



<그림 9>

살펴본 바와 같이, 방심과 내심의 거리  $IO_a$ ,  $IO_b$ ,  $IO_c$ ,  $IO_a^2$ ,  $IO_b^2$ ,  $IO_c^2$ , 방심과 외심의 거리  $OO_a^2$ ,  $OO_b^2$ ,  $OO_c^2$ , 방심과 수심의 거리  $HO_a^2$ ,  $HO_b^2$ ,  $HO_c^2$ , 방심과 무게중심의 거리  $GO_a^2$ ,  $GO_b^2$ ,  $GO_c^2$ , 방심들의 거리  $O_aO_b^2$ ,  $O_bO_c^2$ ,  $O_cO_a^2$ 를  $R$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$  등을 이용하여 나타내고, 이를 증명하였다. 그리고 이들 거리를 나타내는 등식을 이용하여,  $IO_a \cdot IO_b \cdot IO_c$ ,  $GI^2 + GO_a^2 + GO_b^2 + GO_c^2$ ,  $IO^2 + OO_a^2 + OO_b^2 + OO_c^2$ ,  $HI^2 + HO_a^2 + HO_b^2 + HO_c^2$ ,  $O_aO_b^2 + O_bO_c^2 + O_cO_a^2$ ,  $O_aO_b \cdot O_bO_c \cdot O_cO_a$ 에 대한 등식을 증명하였고, 이 등식의 변형 가능성에 대한 몇몇 논의를 제시하였다.

#### 4. 결론

본 연구는 삼각형의 방접원에 관련된 다양한 대수적 성질을 탐구한 선행연구들의 확장으로, 선행 연구의 결과들을 바탕으로 방접원의 중심인 방심과 꼭짓점, 방심과 내심, 외심, 무게중심, 수심사이의 거리에 관련된 다양한 등식들을 탐구하였다. 특히 본 연구에서는 잘 알려지지 않은 이들 등식을 재발명 또는 발명하고, 등식들의 다양한 변형들을 제시하였으며, 중등학교 수학의 수준에서 이해될 수

있는 평이한 증명들을 제시하였다.

방심과 꼭짓점사이의 거리에 관련하여서는  $AO_a$ ,  $BO_b$ ,  $CO_c$ , 이들의 제곱  $AO_a^2$ ,  $BO_b^2$ ,  $CO_c^2$ 에 대한 등식을 증명하였고,  $AI \cdot AO_a$ ,  $BI \cdot BO_b$ ,  $CI \cdot CO_c$ ,  $AO_a + BO_b + CO_c$ 에 대한 등식을 유도하였다. 그리고 이를 바탕으로 방심과 꼭짓점사이의 거리에 대해 관련된 등식  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = 4Rp^2$ ,  $\frac{bc}{AO_a^2} + \frac{bc}{AO_b^2} + \frac{ca}{BO_b^2} + \frac{ab}{CO_c^2} = 1$ ,  $AO_a \cdot BO_b \cdot CO_c = 4Rr_a^2$  등을 증명하였으며, 이들 등식의 다양한 변형을 제시하였다.

방심과 다른 중심사이의 거리에서는 방심과 내심, 외심, 수심, 무게중심 사이의 거리, 방심들 사이의 거리에 관련된 등식들을 체계적으로 기술하고, 증명하였다. 특히 방심과 이들 중심사이의 거리에 대한 네 가지 등식  $IO_a^2 = a^2 + (r_a - r)^2$ ,  $GO_a^2 = r_a^2 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{3}a(b+c) + \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ ,  $OO_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ ,  $HO_a^2 = 4R^2 + r^2 + 2r_a^2 - p^2 + 4Rr$ ,  $O_aO_c^2 = (r_a + r_c)^2 + b^2$ 의 증명을 제시하였고, 이들의 변형을 제시하였다. 한편 이들 거리사이의 관계로 등식  $IO_a \cdot IO_b \cdot IO_c = 16R^2r$ ,  $GI^2 + GO_a^2 + GO_b^2 + GO_c^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ ,  $HI^2 + HO_a^2 + HO_b^2 + HO_c^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$ ,  $O_aO_b^2 + O_bO_c^2 + O_cO_a^2 = 8R(4R+r)$ ,  $O_aO_b \cdot O_bO_c \cdot O_cO_a = 16R^2p$ 을 제시하고 이를 증명하였다. 이들 중의 몇몇은 참고문헌에서 찾아보기 힘든 것들로, 본 연구의 과정에서 발명 또는 재발명의 과정을 통해 얻어졌으며, 이에 대한 자세한 증명을 제시하였다.

본 연구를 통해 방심과 다른 점사이의 거리에 관련된 다양한 관계식들이 체계적으로 정리될 수 있을 것으로 기대되며, 이들 자료는 중등학교 또는 과학영재교육원에서 삼각형의 각들, 특히 외각의 성질 탐구에 관련된 심화학습에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌

- 공선혜 · 한인기 (2008). 대수적 방법을 이용한 방접원에 관련된 삼각형 작도문제의 해결 연구, 한국학교수학회논문집 11(3), pp.399-420.
- 김경선 · 한인기 (2007a). 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질 탐구, 한국학교교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 21(3), pp.385-406.
- 김경선 · 한인기 (2007b). 삼각형의 넓이  $S = \sqrt{rr_a r_b r_c}$ 에 관련된 방접원의 다양한 성질 탐구, 중등교육연구 19, pp.131-142.
- 김수현 · 최윤상 (2007). 삼각형의 결정과 합동의 분석, 한국학교수학회논문집 10(3), pp.341-351.
- 김주봉 (1987). Menelaus의 정리와 Ceva의 정리에 관하여, 과학과 수학교육 논문집 11, pp.78-103.

- 도종훈 (2007). 평면도형 탐구의 기본 요소로서 삼각형의 재조명, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **46(4)**, pp.493-502.
- 유익승·한인기·신현용 (2006). 삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **20(1)**, pp.9-18.
- 최영기·이지현 (2007). 수학사적 관점에서 본 피타고라스 정리의 증명, 학교수학 **9(4)**, pp. 523-533.
- 한인기·꾸쉬니르 (2008). 뇌를 자극하는 수학공부, 서울: 경문사.
- Coxeter H. S. M., & Greitzer S. L. (1967). *Geometry Revisited*, Washington: MAA.
- Kushnir I. (2004). *Treugolik i Tetraedr*, Kiev: Fakt.
- Ponarin Ya. (2004). *Elementarnaya Geometriya*, Moskva: MtsNMO.
- Popruzenko M. (1939). *Sbornik Geometricheskih Zadach*, Moskva: UChPEDGIZ.
- Sharygin I. F. (1999). *Matematika. 2000 Zadach po Geometrii dlya Shkolnikov i Postupayushih v Vuzy*, Moskva: Drofa.
- Sharygin I. F. (2006). *Geometriya 7-9*, Moskva: Drofa.

## A Study on metric properties of triangle's excenter

**Han, Inki**

Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea

E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

**Oh, Sung-Joo**

Hapchon High School, Hapchon-eup Hapchon-gun, Gyeongsangnamdo, 678-801, Korea

E-mail : osjmath@naver.com

In this paper we study metric equalities related with distance between excenter and other points of triangle. Especially we find metric equalities between excenter and incenter, circumcenter, center of mass, orthocenter, vertex, prove these formulas, and transform these formulas into new formula containing another elements of triangle. We in detail describe proof process of these equalities, indicate references of some formulas that don't exist within secondary school curriculum.

---

\* ZDM Classification : D53

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

\* Key Words : triangle, excenter, incenter, circumcenter, center of mass, orthocenter