韓國經營科學會誌
第34권 第4號
2009年 12月

공급사슬에서 계절적 수요와 추계적 조달기간을 고려한 채찍효과 측도의 개발

조동원* · 이영해*†

Developing the Bullwhip Effect Measure in a Supply Chain Considering Seasonal Demand and Stochastic Lead Time

Dong Won Cho* · Young Hae Lee*

■ Abstract ■

The bullwhip effect means the phenomenon of increasing demand variation as moving up to the upstream in the supply chain. Therefore, it is recognized that the bullwhip effect is problematic for effective supply chain operations. In this paper, we exactly quantifies the bullwhip effect for the case of stochastic lead time and seasonal demand in two-echelon supply chain where retailer employs a base-stock policy considering SARMA demand processes and stochastic lead time. We also investigate the behavior of the proposed measurement for the bullwhip effect with autoregressive and moving average coefficient, stochastic lead time, and seasonal factor.

Keyword : Supply Chain Management, Bullwhip Effect, Seasonal Autoregressive Moving Average Processes, Stochastic Lead Time

1. 서 론

채찍효과(bullwhip effect)는 공급사슬의 각 단계에서 주문하는 주문량 변동이 상위단계로 올라갈수록 더욱더 커지는 현상을 의미한다. 공급사슬에서 채찍효과는 생산의 불균형, 재고의 증가, 재고보충

논문접수일 : 2009년 07월 13일 논문게재확정일 : 2009년 11월 27일
논문수정일(1차 : 2009년 11월 16일)
* 한양대학교 산업경영공학과
† 교신저자

기간의 증가, 수송과 선적 비용의 증가 등의 악영향을 미치기 때문에 결국에는 공급사슬 비용의 증가와 함께 고객 서비스를 저하시킬 수 있는 주요 원인이다(Chopra and Meindl[6]). 그러므로 채찍효과의 효과적인 관리는 공급사슬의 비용을 줄임과 동시에 고객서비스의 향상을 통해 공급사슬의 수익을 향상시킬 수 있다.

공급사슬에서 채찍효과의 발생 원인은 다양하다(Paik et al.[25]). Forrester[10]는 채찍효과의 발생 원인으로 공급사슬에서 제품, 정보 및 자금의 흐름의 역동적인 현상의 결과로 주장하였다. Sterman[26]은 맥주분배게임(beer distribution game)을 이용하여 공급사슬을 구성하고 있는 개별기업에 속한 의사결정자의 시스템적 오류가 채찍효과의 주요 원인으로 지적하였다. Towill et al.[27]와 McCullen and Towill[23]은 제품 및 정보의 지연, 즉, 조달기간의 지연이 채찍효과의 발생에 주요한 원인임을 밝히고 있다. Lee et al.[17-19]은 채찍효과의 발생 원인을 수요예측의 갱신, 배치식 주문, 가격 변동, 할당과 부족분 게임으로 규정하고 이를 정량적인 방법으로 입증하였다. Paik et al.[25]은 채찍효과의 다양한 원인 중에서 수요예측의 갱신, 가격변동, 공급사슬을 구성하는 단계의 수가 가장 큰 영향을 미치며 이를 시뮬레이션을 통해 입증하였다.

이와 같이 채찍효과는 다양한 원인에 의해 발생하는 것으로 알려져 있으나 고객의 수요에 계절성이 포함되어 있으며 또한 재고보충에 필요한 조달기간이 추계적인 경우에 대한 연구는 미흡하였다. 일반적으로 계절적 수요와 함께 추계적 조달기간이 포함된 산업은 식료품, 의류, 전자, 반도체, 항공, 관광, 호텔 등에서 흔히 볼 수 있다(Wei[28]; Box and Jenkins[3]). 그러므로 다양한 산업의 공급사슬에서는 계절적 수요와 함께 추계적 조달기간을 고려한 채찍효과의 관리가 필요하다. 일반적으로 공급사슬을 구성하는 개별기업의 계절적 수요와 추계적 조달기간이 포함되어 있는 경우의 재고보충 계획은 계절적 특성을 고려한 적절한 수요예측기법의 이용과 함께 추계적 조달기간을 고려하여 수립함으로써 예기치 않은 상황에 대처한다(Chopra and Meindl [6]). 그러나 공급사슬의 각 단계에서 계절성과 추계적 조달기간을 고려한 재고보충계획을 수립하여 채찍효과가 발생할 수 있기 때문에 이를 정확히 측정할 수 있는 채찍효과 측도의 개발이 필요하다.

채찍효과 측도는 채찍효과를 정량적으로 측정하기 위한 지표로서 공급사슬에서 채찍효과의 발생 여부를 확인하기 위한 기초적인 자료이다. 일반적으로 공급사슬의 채찍효과 측도로 이용된 지표로는 소매자가 공급자에게 기간별로 주문하는 발주량의 분산에 소매자가 직면하는 고객의 수요량의 분산을 나눈 비율이다(Alwan et al.[1]; Chen et al.[4, 5]; Duc et al.[8, 9]; Lee et al.[18]; Luong[21]; Luong and Phien[22]). 그러나 채찍효과의 측도에 포함된 발주량의 분산과 고객의 수요량의 분산은 고객의 수요모형과 소매자의 수요예측기법, 공급사슬의 환경 등의 특성을 고려하여 개발되어야 한다.

본 연구에서는 공급사슬에서 계절적 수요와 함께 추계적 조달기간이 포함된 경우의 채찍효과의 측도를 개발하기 위해 Duc et al.[9])이 채택한 ARMA (1, 1) 수요모형에 계절적 요소가 추가된 SARMA $(1, 0)X(0, 1)_s$ 수요모형과 함께 추계적 조달기간을 고려한다. 개발된 측도를 통해 계절성과 추계적 조달기간이 채찍효과에 어떤 영향을 미치는지를 확인할 수 있다. 본 연구의 구성으로 제 2장에서는 채찍효과 측도와 관련된 기존연구를 고찰한 후 제 3장에서는 본 연구의 공급사슬 환경에 설명한다. 그리고 제 4장에서는 채찍효과 측도를 개발하고 실험을 통해 특성을 파악한다. 제 5장에서는 결론 및 향후 연구 주제를 제시한다.

2. 기존연구

Kim et al.[16]은 채찍효과 측도의 개발 방법으로 통계적 분석 기법을 이용한 방법과 제어이론에 속하는 전이함수와 스펙트랄 분석 기법을 이용한 방법으로 구분하였으나 본 연구에서는 통계적 분석 기법에 제한하여 고찰한다.

기존연구에서 고객의 수요를 포함한 채찍효과 측도를 개발하는데 포함된 주요한 프로세스는 고객의 수요, 고객의 수요에 대한 수요예측, 재고보충과정 등이 포함된다. 이는 채찍효과 측도에 필요한 고객의 수요에 대한 분산은 고객의 수요모형을 통해 획득되며 그리고 공급자에게 주문하는 소매자의 주문에 대한 분산은 고객의 수요에 대응하는 소매자가 재고를 보충하기 위해 고객의 수요를 예측한 후 재고정책에 따라 기간별로 공급자에게 주문하는 과정을 통해 획득되기 때문이다.

고객의 수요에 대한 시계열 모형은 정상 또는 비정상 수요모형으로 나누어 연구되었다. 고객의 수요가 정상 수요모형의 AR(autoregressive process)을 따르는 경우는 Chen et al.[4, 5], Luong[21]과 Luong and Phien[22]의 연구가 있었다. 이들 연구에서 적용된 수요예측기법으로는 MA(moving average), ES(exponential smoothing) 및 MMSE(minimum mean square error)가 있었으며 재고정책은 order-up-to 재고정책을 채택하였으며 그리고 공급자의 조달기간은 확정적인 경우에 대한 채찍효과 측도를 개발하였다. Duc et al.[8]은 고객의 수요가 ARMA(Autoregressive-moving Average) 수요모형을 따르고 MMSE를 적용하여 고객의 수요를 예측한 후 base-stock 재고정책에 따라 공급자에게 주문하는 경우에 대한 채찍효과 측도를 개발하였다. 조동원, 이영해[1]는 Duc et al.[8]의 연구에서 ARMA 수요모형을 대신하여 계절성이 포함된 SARMA 수요모형을 적용하여 계절성이 없는 경우와 있는 경우를 모두 측정할 수 있는 채찍효과 측도를 개발하였다. Kim et al.[16]은 Chen et al.[4]의 연구를 확장하여 조달기간이 추계적인 경우에 대해 연구하였다. Duc et al.[9]은 AR(1)과 ARMA(1, 1)의 수요모형과 추계적 조달기간을 고려한 채찍효과 측도를 개발하였다.

비정상 수요모형의 주요 연구로서 Graves[13]는 고객의 수요는 IMA(integrated moving-average process)를 따르고 EWMA(exponential-weighted moving average)를 적용하여 수요를 예측하고 공급자에게 기간별로 주문하는 주문량의 결정은 base-stock 재고정책을 통해서 진행되는 프로세스에 대한 채찍효과 측도를 개발하였다. Gilbert[11]와 Gilbert and Chatpattananan[12]는 고객의 수요가 ARIMA(autoregressive integrated moving average process)이고 매 기간 말에 특정 목표의 재고수준을 유지하려는 order-up-to a target 재고정책 하에서 운영되는 프로세스를 대상으로 채찍효과의 측도를 개발하였다. 수요예측기법이 채찍효과에 미치는 영향에 관한 연구로서 Zhang[29]은 고객의 수요는 AR(1)이고 order-up-to 재고정책 하에서 ES, MA, MMSE에 적용하여 비교하였다. Kelle and Milne[15]는 고객의 수요가 정규분포를 따르고 (S, s) 재고정책 하에서 운영되는 경우에 대해 채찍효과의 측도를 개발하였다. 이상과 같이 기존연구에서는 계절수요와 함께 추계적 조달기간이 포함된 채찍효과 측도의 개발이 미흡하였다.

3. 문제형성

3.1 기호정의

D_t : 기간 t의 고객 수요량

$\hat{D}_t$: 기간 t의 고객 수요예측값

q_t : 기간 t의 초기의 소매자 발주량

S_t : 기간 t의 목표재고수준

ϕ : 1차 자기회귀계수

e_t : 기간 t의 예측오차(단, $IIDN(0, \sigma_e^2)$)

Θ : 1차 계절이동평균계수

δ : SARMA의 상수

μ_d : 고객 수요량의 평균

σ_d^2 : 고객 수요량의 분산

L_t : 기간 t의 소매자의 조달기간

$D_t^{L_t}$: 기간 t부터 $t+L_t-1$까지의 수요(조달기간 동안의 수요)

$\hat{D}_t^{L_t}$: 조달기간동안의 수요예측값

$\hat{\sigma}_t^{L_t}$: 조달기간동안의 수요예측오차의 표준편차

z : 정규분포의 정규화상수

s : 계절주기($s = 1, 2, \cdots$)

3.2 제안된 공급사슬

공급사슬은 소매자와 공급자로 구성된 2단계 구조이다. 고객의 수요에 대응하여 소매자가 공급자에게 주문하는 재고보충과정에는 다음과 같은 가정이 있다.

1) 공급자는 소매자의 주문에 제한 없이 재고보충이 가능하다.
2) 소매자가 t기간에 제품을 주문해서 받을 때까지의 조달기간 L_t는 추계적이다.
3) 조달기간 L_t는 평균 μ_L이고 분산 σ_L^2이며 동일하고 독립적 분포를 따른다.
4) 소매자의 재고보충계획은 base-stock 재고정책에 따라 수립한다.
5) 소매자의 수요예측은 MMSE기법을 이용하여 예측한다.
6) 소매자가 직면하는 수요와 조달기간은 독립이다.

소매자가 대응하는 고객의 수요는 자기회귀과정의 차수와 계절이동평균과정의 차수가 모두 1인 SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$를 따르고 식 (1)과 같다.

$$D_t = \delta + \phi D_{t-1} + e_t - \Theta e_{t-s}, \quad \text{단, } e_t \sim IIDN(0, \sigma_e^2). \tag{1}$$

시계열 모형에서 중요한 가정은 정상성(stationarity)과 가역성(invertibility)이다. 정상성은 시계열 모형의 확률적 성질이 시간에 따라 변하지 않도록 하는 가정으로서 식 (2)가 성립되도록 한다. SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$가 정상성의 가정을 만족하기 조건으로는 $|\phi| < 1$이다. 그리고 가역성은 시계열 모형을 식별하고 예측하는데 있어 하나의 모형만이 존재하도록 하는 가정으로서 $|\Theta| < 1$이다(Box and Jenkins[3], Wei[28]). 이러한 범위에서 SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$의 평균과 분산은 식 (3)과 식 (4)이다.

$$E[D_t] = E[D_{t-1}] = \mu_d. \tag{2}$$

$$\mu_d = \frac{\delta}{1-\phi}. \tag{3}$$

$$\sigma_d^2 = \frac{1 - 2\Theta\phi^s + \Theta^2}{1-\phi^2}\sigma_e^2. \tag{4}$$

소매자는 base-stock 재고정책으로 제품을 보충하기 때문에 발주량 q_t는 식 (5)와 같다. 특히, 식 (5)의 발주량은 목표재고량 S_{t-1}로 인해 음수인 경우에 Chen et al.[4])의 제안처럼 추가비용 없이 재고가 공급자에게 반품될 수 있도록 한다. 그리고 식 (6)의 목표재고량 S_t에 포함된 z는 고객이 요구한 제품을 재고로부터 즉시 충족할 수 있는 확률을 의미하는 고객 서비스수준의 정규화상수이다.

$$q_t = S_t - S_{t-1} + D_{t-1}. \tag{5}$$

$$S_t = \hat{D}_t^{L_t} + z\hat{\sigma}_t^{L_t}. \tag{6}$$

일반적으로 order-up-to 재고정책으로 운영되는 경우의 최적의 목표재고량 S_t는 재고 및 품절 비용이 주어지면 계산될 수 있다(Heyman and Sobel[14]). 그러나 대부분의 경우에 재고 및 품절 비용의 정확한 추정은 불가능하기 때문에 서비스수준을 도입하여 최적의 목표재고량을 결정한다. 한편, Base-stock 재고정책은 order-up-to 재고정책에 속하므로 서비스수준이 주어지면 S_t는 최적이다(Nahamis[24]; Duc, et al.[8, 9]).

4. 채찍효과 측도

4.1 조달기간 동안의 수요예측값 및 수요예측오차의 분산

조달기간 동안의 수요 $D_t^{L_t}$은 식 (7)이며 조달기간 동안의 수요예측값 $\hat{D}_t^{L_t}$은 식 (8)과 같다. 그리고 소매자의 수요예측은 MMSE 기법이 적용되기 때문에 고객의 수요예측값 $\hat{D}_{t+i}$는 식 (9)의 조건부평균에 의해 결정된다(Box and Jenkins[3]).

$$D_t^{L_t} = D_t + D_{t+1} + \dots + D_{t+L_t-1} = \sum_{i=0}^{L_t-1} D_{t+i}. \quad (7)$$

$$\hat{D}_t^{L_t} = \hat{D}_t + \hat{D}_{t+1} + \cdots + \hat{D}_{t+L_t-1} = \sum_{i=0}^{L_t-1} \hat{D}_{t+i}. \quad (8)$$

$$\hat{D}_{t+i} = E[D_{t+i} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]. \quad (9)$$

식 (7)에 포함된 D_{t+i}는 식 (10)과 식 (11)을 통해 식 (12)를 얻는 것처럼 재귀과정을 통해 식 (13)을 얻을 수 있다.

$$D_{t+i} = \delta + \phi D_{t+i-1} + e_{t+i} - \Theta e_{t-s+i}. \quad (10)$$

$$D_{t+i-1} = \delta + \phi D_{t+i-2} + e_{t+i-1} - \Theta e_{t-s+i-1}. \quad (11)$$

$$D_{t+i} = (1+\phi)\delta + \phi^2 D_{t+i-2} + e_{t+i} + \phi e_{t+i-1} - \Theta e_{t-s+i} - \Theta\phi e_{t-s+i-1}. \quad (12)$$

$$D_{t+i} = (1-\phi^{i+1})\mu_d + \phi^{i+1} D_{t-1} + \sum_{j=0}^{i} \phi^j e_{t+i-j} - \Theta \sum_{j=0}^{i} \phi^j e_{t-s+i-j}. \quad (13)$$

조달기간 동안의 수요 $D_t^{L_t}$은 식 (14)로서 식 (13)을 식 (7)에 대입하여 얻을 수 있다.

$$D_t^{L_t} = \left(L_t - \frac{(1-\phi^{L_t})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t})\phi}{1-\phi} D_{t-1} + \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})}{1-\phi} e_{t+i} - \Theta \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})}{1-\phi} e_{t-s+i}. \quad (14)$$

그리고 식 (13)에 식 (9)를 적용하면 고객의 수요 예측값 $\hat{D}_{t+i}$는 (15)가 된다.

$$\hat{D}_{t+i} = (1-\phi^{i+1})\mu_d + \phi^{i+1} D_{t-1} - \sum_{j=0}^{i} \Theta \phi^j E[e_{t-s+i-j} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]. \quad (15)$$

정리 1. 조달기간 동안의 수요예측값 $\hat{D}_t^{L_t}$는 계절주기 s에 영향을 받으며 식 (16)과 같다.

$$\hat{D}_t^{L_t} = \left(L_t - \frac{(1-\phi^{L_t})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t})\phi}{1-\phi} D_{t-1} - \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})\Theta}{1-\phi} E[e_{t-s+i} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]. \quad (16)$$

증명. 식 (15)를 식 (8)에 대입한 후 정리하면 식 (17)을 얻을 수 있다. 식 (17)의 마지막 항은 계절주기의 값에 따라 결정되기 때문에 계절주기에 영향을 받는다.

$$\begin{aligned}\hat{D}_t^{L_t} &= \sum_{i=0}^{L_t-1} \Big((1-\phi^{i+1})\mu_d + \phi^{i+1} D_{t-1} - \Theta \sum_{j=0}^{i} \phi^j E[e_{t-s+i-j} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots] \Big) \quad (17) \\ &= \left(L_t - \frac{(1-\phi^{L_t})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t})\phi}{1-\phi} D_{t-1} - \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})\Theta}{1-\phi} E[e_{t-s+i} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]. \ \blacksquare\end{aligned}$$

정리 1의 결과를 통해 고객의 수요에 계절성이 포함되어 있으면 소매자의 수요예측에도 계절성이 반영된다. 한편, 조달기간 동안의 수요예측오차 $D_t^{L_t} - \hat{D}_t^{L_t}$은 식 (18)로서 식 (14)과 식 (17)을 이용하여 얻을 수 있다.

$$D_t^{L_t} - \hat{D}_t^{L_t} = \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})}{1-\phi} e_{t+i} - \Theta \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})}{1-\phi} e_{t-s+i} + \Theta \sum_{i=0}^{L_t-1} \frac{(1-\phi^{L_t-i})}{1-\phi} E[e_{t-s+i} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]. \quad (18)$$

정리 2. 조달기간 동안의 수요예측오차의 분산은 계절주기 s에 영향을 받고 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}_t^{L_t})^2 &= (1+\Theta^2) E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1} \left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2\right] \sigma_e^2 + \Theta^2 E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1} \left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\right] \sigma_e^2 \\ &\quad - 2\Theta E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1} \sum_{j=0}^{L_t-1} \left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L_t-j}}{1-\phi}\right) \times (r_{i,j-s} + r_{i,j} I_{s-j}\Theta)\right] \sigma_e^2,\end{aligned}$$

$$\text{단, } I_k = \begin{cases} 1, & k>0 \\ 0, & o.w \end{cases}, \quad r_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & o.w \end{cases}. \quad (19)$$

증명. 조달기간 동안의 수요예측오차 $D_t^{L_t} - \hat{D}_t^{L_t}$의 조건부 기대값은 식 (20)과 같다.

$$E\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}|L_t=L\right]=E\left[\left(\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{\left(1-\phi^{L_t-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}-\Theta\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{\left(1-\phi^{L_t-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}\\+\Theta\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{\left(1-\phi^{L_t-i}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\end{array}\right)|L_t=L\right]$$

$$=E\left[\left(\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}-\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}\\+\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\end{array}\right)\right]=0. \quad (20)$$

그러므로 조달기간 동안의 수요예측오차의 기대값 $E\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right]$은 식 (21)과 같다.

$$E\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right]=E\left[E\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}|L_t\right]\right]=0. \quad (21)$$

또한 조달기간 동안의 제곱의 수요예측오차의 조건부 기대값은 식 (22)와 같다.

$$E\left[\left(D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right)^2|L_t=L\right]=E\left[\left(\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{\left(1-\phi^{L_t-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}-\Theta\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{\left(1-\phi^{L_t-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}\\+\Theta\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{\left(1-\phi^{L_t-i}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\end{array}\right)^2|L_t=L\right]$$

$$=E\left[\left(\begin{array}{l}\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}-\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}\\+\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\end{array}\right)^2\right]$$

$$=E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}\right)^2\right]+E\left[\left(\Theta\sum_{j=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-j}\right)}{1-\phi}e_{t-s+j}\right)^2\right]$$

$$+\Theta^2E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\right)^2\right]$$

$$-2\Theta E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-j}\right)}{1-\phi}e_{t-s+j}\right)\right]$$

$$+2\Theta E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-j}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+j}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\right)\right]$$

$$-2\Theta^2E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-j}\right)}{1-\phi}E[e_{t-s+j}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\right)\right] \quad (22)$$

식 (22)의 각 항을 $E[e_te_{t+i}]=E[e_t]E[e_{t+i}]=0$과 지시확률변수 $I_k=\begin{cases}1, & k>0\\0, & o.w\end{cases}$와 $r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & o.w\end{cases}$를 이용하여 계산하면 식 (23)을 얻을 수 있다.

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t+i}\right)^2\right]=\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)^2\sigma_e^2,$$

$$E\left[\left(\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\frac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}\right)^2\right]=\Theta^2\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)^2\sigma_e^2,$$

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\right)^2\right]=\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\sigma_e^2,$$

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}e_{t+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-j})}{1-\phi}e_{t-s+j}\right)\right]=\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-j})}{1-\phi}\right)r_{i,j-s}\sigma_e^2,$$

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}e_{t+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-j})}{1-\phi}E[e_{t-s+j}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\right)\right]=0,$$

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}e_{t-s+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-j})}{1-\phi}E[e_{t-s+j}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\right)\right]$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}e_{t-s+i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-j})}{1-\phi}e_{t-s+j}I_{s-j}\right)=\left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-i})}{1-\phi}\right)\left(\sum_{j=0}^{L-1}\frac{(1-\phi^{L-j})}{1-\phi}\right)r_{i,j}I_{s-j}\sigma_e^2.$$

$$E\left[\left(D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right)^2|L_t=L\right]=(1+\Theta^2)\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)^2\sigma_e^2+\Theta^2\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\sigma_e^2$$
$$-2\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L-j}}{1-\phi}\right)(r_{i,j-s}+r_{i,j}I_{s-j}\Theta)\sigma_e^2,$$
$$\text{단, } I_k=\begin{cases}1, & k>0\\0, & o.w\end{cases},\quad r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & o.w\end{cases}. \tag{23}$$

그러므로 조달기간 동안의 제곱의 수요예측오차의 기대 값은 식 (24)와 같다.

$$E\left[\left(D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right)^2\right]=E\left[E\left[\left(D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right)^2|L_t=L\right]\right]$$
$$=(1+\Theta^2)E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2\right]\sigma_e^2+\Theta^2E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\right]\sigma_e^2$$
$$-2\Theta E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\sum_{j=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L_t-j}}{1-\phi}\right)(r_{i,j-s}+r_{i,j}I_{s-j}\Theta)\right]\sigma_e^2,$$
$$\text{단, } I_k=\begin{cases}1, & k>0\\0, & o.w\end{cases},\quad r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & o.w\end{cases}. \tag{24}$$

마지막으로 조달기간 동안의 수요예측오차의 분산은 식 (25)이며 식 (19)와 같다.

$$VAR\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right]=E\left[\left(D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right)^2\right]-\left\{E\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right]\right\}^2=E\left[\left(D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right)^2\right]. \tag{25}$$

한편, 식 (24)에서 조달기간 L_t는 모든 i에 대하여 $E[\phi^{L_t}]=E[\phi^{L_{t+1}}]=\mu_L$이므로 $VAR\left[D_t^{L_t}-\hat{D}_t^{L_t}\right]$은 기간 t에는 영향을 받지 않는 반면에 계절주기 s에는 영향을 받기 때문에 정리 2가 성립한다. ■

4.2 채찍효과 측도의 개발

소매자의 발주량 q_t는 식 (5)에 정리 2의 적용과 함께 조달기간 동안의 수요예측값을 시차에 맞게 대입하여 정리하면 식 (26)을 얻을 수 있다.

$$q_t=S_t-S_{t-1}+D_{t-1}=\left(\hat{D}_t^{L_t}-\hat{D}_{t-1}^{L_{t-1}}\right)+z\left(\hat{\sigma}_t^{L_t}-\hat{\sigma}_{t-1}^{L_{t-1}}\right)+D_{t-1}=\hat{D}_t^{L_t}-\hat{D}_{t-1}^{L_{t-1}}+D_{t-1}$$

$$\doteq\left(L_t-L_{t-1}+\frac{(\phi^{L_t}-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d+\frac{(1-\phi^{L_t+1})}{1-\phi}D_{t-1}-\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}D_{t-2}$$
$$-\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{(1-\phi^{L_t-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]+\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\frac{(1-\phi^{L_{t-1}-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2},D_{t-3},\cdots] \quad (26)$$

정리 3. $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 소매자 발주량의 분산 $VAR(q_t)$와 고객 수요량의 분산 σ_d^2의 비율로서 식 (27)과 식 (28)로 주어지며 계절주기 s에 영향을 받는다.

$$s=1,\quad B(L_t,s,\Theta,\phi)=\frac{2\sigma_L^2\mu_d^2}{\sigma_d^2}+\frac{E\begin{bmatrix}(1-\phi)^2(1-\Theta)(1-\Theta-2\phi^{L_t}(\phi-\Theta))\\+(\phi-\Theta)^2(\phi^{2L_t}+\phi^{2L_{t-1}}-2\phi^{L_t+L_{t-1}+1})\end{bmatrix}}{(1-2\Theta\phi+\Theta^2)(1-\phi)^2}. \quad (27)$$

$s\geq 2,$

$$B(L_t,s,\Theta,\phi)=\frac{2\sigma_L^2\mu_d^2}{\sigma_d^2}+\frac{E\begin{bmatrix}(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^{2L_t+2}+\phi^2(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}))(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2)\\-2\phi^2(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1})(1-\Theta\phi^s+\Theta^2-\Theta\phi^{s-2})\end{bmatrix}}{(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2)(1-\phi)^2}$$
$$+\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}+\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\right)\right]$$
$$-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\right]$$
$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\begin{matrix}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i}I_{s-i}\\-\Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)I_s\end{matrix}\right)\right]$$
$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-2}I_{s-i}\right]$$
$$-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\right]$$
$$-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{s-j}\right)r_{i,j-1}\right]$$
$$\text{단, } I_k=\begin{cases}1, & k>0\\0 & o.w\end{cases},\quad r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\0 & o.w\end{cases}. \quad (28)$$

증명. <부록 A>

정리 3에서 고객의 수요에 계절성이 있으면 소매자의 발주에도 계절성이 반영되어 소매자 발주량의 분산에 영향이 있다. 그러므로 소매자의 발주량의 분산으로 구성된 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$도 계절수요에 영향을 받는다. 이러한 현상으로 $s=1$에 대해 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 계절성이 없는 Duc et al.[9]의 $B(L_t, \theta, \phi)$와 일치한다. 그러나 $s \geq 2$에 대한 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 계절주기의 크기에 따라 다르며 다음과 같은 중요한 결과를 얻을 수 있다.

관찰 1. 계절주기가 증가할수록 채찍효과에 미치는 영향은 감소하는 특성이 있다. 이는 공급사슬에서 계절성이 있는 수요에 대한 채찍효과의 관리를 위해서는 계절주기가 큰 값을 갖는 경우보다는 작은 값을 갖는 경우에 더욱더 주의 깊은 관리가 필요함을 의미한다.

이러한 특성은 정리 1에서 유도된다. SARMA(1, 0)X(0, 1)$_S$의 시계열 모형은 정상성의 조건으로 $|\phi|<1$이므로 식 (28)에서 $s\rightarrow\infty$이면 ϕ^s은 0이다. 그리고 $E[\phi^{L_t}]=E[\phi^{L_{t-1}}]$이므로 식 (29)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{s\rightarrow\infty}B(L_t, s, \Theta, \phi) &= \frac{2\sigma_L^2\mu_d^2(1-\phi^2)}{(1+\Theta^2)\sigma_e^2}+\frac{E\left[1-\phi^2-2\phi^{L_t+1}+2\phi^{2L_t+2}-\phi^{L_{t-1}+2}+2\phi^{L_t+3}-2\phi^{L_{t-1}+L_t+3}\right]}{(1-\phi)^2}\\ &-\frac{2\Theta^2(1-\phi^2)}{(1+\Theta^2)(1-\phi)^2}E\left[\begin{array}{l}(1-\phi^{L_t+1})(1-\phi^{L_t})-\sum_{i=0}^{L_t-1}(1-\phi^{L_t-i})^2\\ +\sum_{i=0}^{L_t-1}\sum_{j=0}^{L_t-1}(1-\phi^{L_t-i})(1-\phi^{L_t-j})r_{i,j-1}\end{array}\right]\\ &\text{단, } r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0 & o.w\end{cases}.\end{aligned} \tag{29}$$

그러므로 계절주기가 증가하면 채찍효과에 미치는 영향은 감소한다. 특히, 조달기간의 범위가 제한된 경우에는 계절주기의 증가로 인한 채찍효과의 영향은 빠르게 감소하고 일정한 값으로 수렴한다. 이는 계절성을 갖는 수요의 채찍효과의 관리는 조달기간이 짧고 일정하게 되도록 노력할 필요가 있으며 또한 계절주기가 작을 때 더욱더 필요하다.

5. 수치실험

조달기간 L_t와 L_{t-1}은 같은 분포이고 독립이기 때문에 $E[\phi^{L_t}]=E[\phi^{L_{t-1}}]=\mu_L$이고 $E[\phi^{L_{t-1}+L_t}]=E[\phi^{L_{t-1}}]E[\phi^{L_t}]$이다. 수치실험은 Duc et al.[9]에서 다루었던 예제를 대상으로 실험을 실시하여 계절성이 없는 경우와 있는 경우의 결과를 비교 및 분석한다.

5.1 수치예제 1

조달기간 L_t의 확률분포는 $p(1)=0.3$, $p(2)=0.3$, $p(3)=0.4$로서 평균 $\mu_L=2.1$이고 분산 $\sigma_L=0.69$이다. 그리고 $E[\phi^{L_t}]=0.3\phi+0.3\phi^2+0.4\phi^3$이고 $E[\phi^{2L_t}]=0.3\phi^2+0.3\phi^4+0.4\phi^6$이다. $s=2$,

$$\begin{aligned}B(L_t, s, \Theta, \phi) &= \frac{2\sigma_L^2\mu_d^2}{\sigma_d^2}+\frac{E\left[\begin{array}{c}\left(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^2\left(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}+\phi^{2L_t}\right)\right)\left(1-2\Theta\phi^2+\Theta^2\right)\\ -2\phi^2\left(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1}\right)\left(1-\Theta\phi^2+\Theta^2-\Theta\right)\end{array}\right]}{(1-2\Theta\phi^2+\Theta^2)(1-\phi)^2}\\ &+\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\left(E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{2-i}\right]+E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{2-i}\right]\right)\\ &-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i-1}I_{2-i}\right]\\ &+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i}I_{2-i}-\Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)I_2\right)\right]\\ &+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i-2}I_{2-i}\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i-1}I_{2-i}\right] \\
&-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{2-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{2-j}\right)r_{i,j-1}\right], \\
&\text{단, } I_k=\begin{cases}1, & k>0\\ 0 & o.w\end{cases},\quad r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0 & o.w\end{cases}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

그러므로 식 (30)의 각 항을 계산한 후 정리하면 식 (31)와 같다.

$$
E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{2-i}\right]=E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{2-i}\right]=\begin{pmatrix}p(1)+\left((1+\phi)^2+1\right)p(2)\\ +\left((1+\phi+\phi^2)^2+(1+\phi)^2\right)p(3)\end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i-1}I_{2-i}\right]=\left(\frac{1-\phi E\left[\phi^{L_t}\right]}{1-\phi}\right)E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{1-i}I_{2-i}\right] \\
&\quad=\left(\frac{1-\phi E\left[\phi^{L_t}\right]}{1-\phi}\right)\left(\phi p(1)+\left((1+\phi)\phi+1\right)p(2)+\left((1+\phi+\phi^2)\phi+(1+\phi)\right)p(3)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i}I_{2-i}-\Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)I_2\right)\right] \\
&\quad=\left(\frac{1-\phi E\left[\phi^{L_t}\right]}{1-\phi}\right)\begin{pmatrix}\phi^2p(1)+\left((1+\phi)\phi^2+\phi\right)p(2)+\left((1+\phi+\phi^2)\phi^2+(1+\phi)\phi\right)p(3)\\ -\Theta\left(\dfrac{1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]}{1-\phi}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i-2}I_{2-i}\right] \\
&\quad=\left(\frac{\left(1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]\right)\phi}{1-\phi}\right)\left(p(1)+\left((1+\phi)+\phi^{-1}\right)p(2)+\left((1+\phi+\phi^2)+(1+\phi)\phi^{-1}\right)p(3)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{2-i-1}I_{2-i}\right] \\
&\quad=\left(\frac{\left(1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]\right)\phi}{1-\phi}\right)\left(\phi p(1)+\left((1+\phi)\phi+1\right)p(2)+\left((1+\phi+\phi^2)\phi+(1+\phi)\right)p(3)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{2-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{2-j}\right)r_{i,j-1}\right] \\
&\quad=\left(\frac{1-\phi^1}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^1}{1-\phi}\right)I_2I_{2-1}p(1)p(2)r_{0,1-1}+\left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^1}{1-\phi}\right)I_2I_{2-1}p(2)p(2)r_{0,1-1} \\
&\qquad+\left(\frac{1-\phi^3}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^1}{1-\phi}\right)I_2I_{2-1}p(3)p(2)r_{0,1-1}+\left(\frac{1-\phi^1}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi}\right)I_2I_{2-1}p(1)p(3)r_{0,1-1} \\
&\qquad+\left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi}\right)I_2I_{2-1}p(2)p(3)r_{0,1-1}+\left(\frac{1-\phi^3}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^2}{1-\phi}\right)I_2I_{2-1}p(3)p(3)r_{0,1-1} \\
&\quad=p(1)p(2)+(1+\phi)p(2)p(2)+\left(1+\phi+\phi^2\right)p(3)p(2)+(1+\phi)p(1)p(3) \\
&\qquad+(1+\phi)^2p(2)p(3)+\left(1+\phi+\phi^2\right)(1+\phi)p(3)p(3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B(L_t,\ s,\ \Theta,\ \phi) \\
&\quad=\frac{2\sigma_L^2\mu_d^2}{\sigma_d^2}+\frac{\begin{pmatrix}\left(1-2\phi E\left[\phi^{L_t}\right]+\phi^2\left(1-2E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]+E\left[\phi^{2L_{t-1}}\right]+E\left[\phi^{2L_t}\right]\right)\right)\left(1-2\Theta\phi^2+\Theta^2\right)\\ -2\phi^2\left(1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]-\phi E\left[\phi^{L_t}\right]+\phi E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]E\left[\phi^{L_t}\right]\right)\left(1-\Theta\phi^2+\Theta^2-\Theta\right)\end{pmatrix}}{\left(1-2\Theta\phi^2+\Theta^2\right)(1-\phi)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\left(p(1)+\left((1+\phi)^2+1\right)p(2)+\left((1+\phi+\phi^2)^2+(1+\phi)^2\right)p(3)\right) \\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\left(\frac{1-\phi E\left[\phi^{L_t}\right]}{1-\phi}\right)\begin{pmatrix} \phi p(1)+\left((1+\phi)\phi+1\right)p(2) \\ +\left((1+\phi+\phi^2)\phi+(1+\phi)\right)p(3) \end{pmatrix} \\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\left(\frac{1-\phi E\left[\phi^{L_t}\right]}{1-\phi}\right)\begin{pmatrix} \phi^2 p(1)+\left((1+\phi)\phi^2+\phi\right)p(2) \\ +\left((1+\phi+\phi^2)\phi^2+(1+\phi)\phi\right)p(3)-\Theta\left(\frac{1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]}{1-\phi}\right) \end{pmatrix} \\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\left(\frac{\left(1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]\right)\phi}{1-\phi}\right)\begin{pmatrix} p(1)+\left((1+\phi)+\phi^{-1}\right)p(2) \\ +\left((1+\phi+\phi^2)+(1+\phi)\phi^{-1}\right)p(3) \end{pmatrix} \\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\left(\frac{\left(1-E\left[\phi^{L_{t-1}}\right]\right)\phi}{1-\phi}\right)\begin{pmatrix} \phi p(1)+\left((1+\phi)\phi+1\right)p(2) \\ +\left((1+\phi+\phi^2)\phi+(1+\phi)\right)p(3) \end{pmatrix} \\
&-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^2+\Theta^2}\right)\begin{pmatrix} p(1)p(2)+(1+\phi)p(2)p(2) \\ +(1+\phi+\phi^2)p(3)p(2)+(1+\phi)p(1)p(3) \\ +(1+\phi)^2p(2)p(3)+(1+\phi+\phi^2)(1+\phi)p(3)p(3) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

$s=2$에 대한 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 식 (31)이며 계절주기가 더욱더 큰 경우에도 동일한 과정을 통해 계산한다. 수치예제 1에 포함된 모수가 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$에 어떤 영향을 미치는지를 파악하기 위해 식 (31)의 첫 번째 항을 A, 나머지 항은 C로 한다.

<표 1>은 수치예제 1의 실험 결과로서 계절주기는 채찍효과에 영향을 미치고 있다. 특히, 계절주기가 100과 101인 경우에는 채찍효과 측도에 포함된 다양한 모수의 변화에도 불구하고 채찍효과는 동일한 값을 갖는다. 이는 정리 3에서 유추된 계절성을 고려한 채찍효과 측도의 특성에 기인한다. 즉, 추계적 조달기간의 범위가 제한된 경우에는 계절주기가 증가하면 채찍효과에 대한 계절주기의 영향은 빠르게 감소하고 채찍효과는 일정한 값으로 수렴한다. 그러므로 계절성을 고려한 채찍효과의 효율적인 관리를 위해서는 조달기간은 짧고 일정한 값이 되도록 노력할 필요가 있다. 또한 계절주기가 큰 값을 갖는 경우보다는 작은 값을 갖는 경우에 대해 더욱더 집중적인 관리가 필요하다.

그리고 고객 수요량의 분산 σ_d^2, 조달기간의 분산 σ_L^2, 고객 수요량의 평균 μ_d가 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$에 일관된 영향을 끼치고 있다. 이것은 계절성이 없는 수요에 대한 채찍효과의 현상과 일치한다(Duc et al.[9]). 이러한 현상의 구체적인 내용은 계절주기 s, 계절이동평균계수 Θ, 자기회귀계수 ϕ의 값에 관계없이 σ_d^2에 포함된 고객 수요량 예측오차의 분산 σ_e^2가 증가(σ_d^2의 증가)할수록 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 감소하며, 반대로 σ_e^2(σ_d^2의 감소)가 감소하면 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 증가한다. 또한 고객 수요량의 평균 μ_d가 감소하면 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$도 감소한다. 그러므로 고객 수요가 많고 변화가 적을수록 주의 깊은 채찍효과의 관리가 필요하다. 또한 σ_L^2이 감소하면 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$도 감소하므로 소매자가 공급자로부터 재고를 보충하는 조달기간이 일정하게 유지되어 분산이 감소되도록 소매자와 공급자간의 협업이 필요하다.

5.2 수치예제 2

조달기간 L_t가 모수 p를 갖는 기하분포로서 평균은 $\mu_L = 1/p$이고 분산은 $\sigma_L^2 = (1-p)/p^2$이다. 그리고 $E\left[\phi^{L_t}\right] = \phi p/(1-\phi+\phi p)$이고 $E\left[\phi^{2L_t}\right] = \phi^2 p/(1-\phi^2+\phi^2 p)$이다.

수치예제 2에서 조달기간의 범위는 무한대이기 때문에 계절주기가 채찍효과에 미치는 영향이 대해 일관된 특징을 발견하기 어려웠으나 그 외의 특성은 수치예제 1과 동일하다. 특히, p가 증가하면 σ_L^2이 감소하여 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$도 감소한다. 이는 조달기간의 분산이 일정하게 유지되도록 노력할 필요가 있음을 지적한다.

〈표 1〉 수치예제 1의 실험 결과($s=1$, $s=2$, $s=100$, $s=101$, $\delta=1$)

$\sigma_e=0.2$, $s=1$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	87.50	1.05	88.55	18.01	1.65	19.67	10.04	2.47	12.51	6.96	2.16	9.12
-0.1	29.17	0.33	29.50	25.52	0.75	26.27	22.69	2.02	24.71	20.42	2.24	22.65
0.1	20.76	0.30	21.06	23.11	0.44	23.55	26.06	1.63	27.69	29.88	2.26	32.13
0.9	7.34	0.30	7.64	10.84	0.02	10.86	20.76	0.09	20.86	245.00	1.20	246.2
$\sigma_e=0.6$, $s=1$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	9.72	1.05	10.77	2.00	1.65	3.65	1.12	2.47	3.58	0.77	2.16	2.94
-0.1	3.24	0.33	3.57	2.84	0.75	3.58	2.52	2.02	4.54	2.27	2.24	4.50
0.1	2.31	0.30	2.61	2.57	0.44	3.01	2.90	1.63	4.53	3.32	2.26	5.58
0.9	0.82	0.30	1.11	1.20	0.02	1.22	2.31	0.09	2.40	27.22	1.20	28.43
$\sigma_e=1.0$, $s=1$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	3.50	1.05	4.55	0.72	1.65	2.37	0.40	2.47	2.87	0.28	2.16	2.44
-0.1	1.17	0.33	1.50	1.02	0.75	1.77	0.91	2.02	2.93	0.82	2.24	3.05
0.1	0.83	0.30	1.13	0.92	0.44	1.37	1.04	1.63	2.67	1.20	2.26	3.45
0.9	0.29	0.30	0.59	0.43	0.02	0.45	0.83	0.09	0.92	9.80	1.20	11.00
$\sigma_e=0.2$, $s=2$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	7.88	0.34	8.22	12.74	1.01	13.75	12.07	2.51	14.57	7.13	2.08	9.21
-0.1	21.22	0.31	21.53	23.96	0.66	24.62	23.68	2.03	25.71	20.58	2.21	22.79
0.1	28.31	0.32	28.63	24.56	0.52	25.08	24.86	1.64	26.50	29.54	2.28	31.82
0.9	48.09	0.80	48.89	14.43	0.32	14.76	15.41	0.45	15.87	132.08	2.58	134.66
$\sigma_e=0.6$, $s=2$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	0.88	0.34	1.22	1.42	1.01	2.43	1.34	2.51	3.85	0.79	2.08	2.87
-0.1	2.36	0.31	2.67	2.66	0.66	3.32	2.63	2.03	4.66	2.29	2.21	4.50
0.1	3.15	0.32	3.47	2.73	0.52	3.25	2.76	1.64	4.40	3.28	2.28	5.57
0.9	5.34	0.80	6.14	1.60	0.32	1.93	1.71	0.45	2.16	14.68	2.58	17.25
$\sigma_e=1.0$, $s=2$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	0.32	0.34	0.66	0.51	1.01	1.52	0.48	2.51	2.99	0.29	2.08	2.36
-0.1	0.85	0.31	1.16	0.96	0.66	1.62	0.95	2.03	2.98	0.82	2.21	3.04
0.1	1.13	0.32	1.45	0.98	0.52	1.50	0.99	1.64	2.63	1.18	2.28	3.47
0.9	1.92	0.80	2.72	0.58	0.32	0.90	0.62	0.45	1.07	5.28	2.58	7.86
$\sigma_e=1.0$, $s=100$, $s=101$												
Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	0.54	0.44	0.98	0.54	0.71	1.26	0.54	1.78	2.32	0.54	2.37	2.91
0.9	0.54	0.38	0.92	0.54	0.70	125	0.54	1.63	2.17	0.54	1.88	2.43

〈표 2〉 수치예제 2의 실험 결과

Θ	ϕ -0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
$\sigma_e=0.2, s=2, p=0.3$												
-0.9	972.41	0.24	972.65	1573.31	0.87	1574.18	1489.63	3.08	1492.71	880.68	19.86	900.53
-0.1	2619.91	0.24	2620.16	2958.13	0.64	2958.77	2923.82	2.13	2925.95	2540.69	10.76	2551.45
0.1	3494.73	0.27	3495.01	3032.27	0.53	3032.80	3069.19	1.66	3070.85	3646.40	10.76	3657.16
0.9	5936.59	0.69	5937.28	1781.85	0.30	1782.15	1902.92	0.72	1903.64	16305.6	179.29	16484.9
$\sigma_e=0.6, s=2, p=0.3$												
-0.9	108.05	0.24	108.28	174.81	0.87	175.68	165.51	3.08	168.59	97.85	19.86	117.71
-0.1	291.10	0.24	291.34	328.68	0.64	329.32	324.87	2.13	327.00	282.30	10.76	293.05
0.1	388.30	0.27	388.58	336.92	0.53	337.44	341.02	1.66	342.68	405.16	10.76	415.91
0.9	659.62	0.69	660.31	197.98	0.30	198.28	211.44	0.72	212.15	1811.73	179.29	1991.03
$\sigma_e=1.0, s=2, p=0.3$												
-0.9	38.90	0.24	39.13	62.93	0.87	63.80	59.59	3.08	62.66	35.23	19.86	45.60
-0.1	104.80	0.24	105.04	118.33	0.64	118.96	116.95	2.13	119.08	101.63	10.76	112.38
0.1	139.79	0.27	140.06	121.29	0.53	121.82	122.77	1.66	124.42	145.86	10.76	156.61
0.9	237.46	0.69	238.16	71.27	0.30	71.57	76.12	0.72	76.83	652.22	179.29	831.52
$\sigma_e=1.0, s=2, p=0.6$												
-0.9	0.79	0.31	1.11	1.28	0.60	1.88	1.22	2.95	4.17	0.72	19.01	19.73
-0.1	2.14	0.33	2.46	2.41	0.57	2.99	2.39	1.94	4.32	2.07	3.76	5.83
0.1	2.85	0.36	3.21	2.48	0.55	3.03	2.51	1.59	4.09	2.98	3.43	6.41
0.9	4.85	0.73	5.58	1.45	0.48	1.93	1.55	1.28	2.84	13.31	272.97	286.28
$\sigma_e=1.0, s=2, p=0.9$												
-0.9	0.01	0.47	0.48	0.02	0.35	0.37	0.02	2.80	2.82	0.01	20.43	20.44
-0.1	0.03	0.46	0.49	0.03	0.51	0.54	0.03	1.77	1.80	0.03	2.35	2.38
0.1	0.04	0.46	0.50	0.03	0.56	0.59	0.03	1.55	1.58	0.04	1.92	1.95
0.9	0.06	0.56	0.62	0.02	0.59	0.61	0.02	1.85	1.87	0.16	319.78	319.94

5.3 수치예제 3

조달기간 L_t는 평균과 분산이 $\mu_L=\lambda$이고 $\sigma_L^2=\lambda$인 포아송분포를 따르고 $E[\phi^{L_t}]=e^{(\phi-1)\lambda}$이고 $E[\phi^{2L_t}]=e^{(\phi^2-1)\lambda}$이다. 수치예제 3에서도 조달기간의 범위가 무한대이므로 계절주기가 채찍효과에 미치는 영

향에 대해 일관된 특징을 발견하기 어려웠으나 σ_d^2, σ_L^2, μ_d^2가 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$에 대한 영향의 특성은 수치예제 1과 2의 결과와 동일하다. 수치예제 3에서도 λ가 증가할수록 σ_L^2가 증가하여 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$가 증가하였기 때문에 조달기간의 분산에 대한 관리가 중요하다.

〈표 3〉 수치예제 3의 실험 결과

$\sigma_e = 0.2,\ s = 2,\ \lambda = 0.5$

Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	4.02	2.47	6.48	6.50	0.97	7.48	6.16	1.89	8.04	3.64	37.18	40.82
-0.1	10.83	2.51	13.33	12.22	0.94	13.16	12.08	1.69	13.77	10.50	37.18	47.68
0.1	14.44	2.56	17.01	12.53	0.95	13.48	12.68	1.59	14.27	15.07	37.19	52.26
0.9	24.53	3.15	27.68	7.36	1.03	8.39	7.86	1.39	9.26	67.39	37.38	104.77

$\sigma_e = 0.6,\ s = 2,\ \lambda = 0.5$

Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	0.45	2.47	2.91	0.72	0.97	1.70	0.68	1.89	2.57	0.40	37.18	37.59
-0.1	1.20	2.51	3.71	1.36	0.94	2.30	1.34	1.69	3.03	1.17	37.18	38.35
0.1	1.60	2.56	4.17	1.39	0.95	2.34	1.41	1.59	3.00	1.67	37.19	38.86
0.9	2.73	3.15	5.87	0.82	1.03	1.85	0.87	1.39	2.27	7.49	37.38	44.87

$\sigma_e = 1.0,\ s = 2,\ \lambda = 0.5$

Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	0.16	2.47	2.63	0.26	0.97	1.23	0.25	1.89	2.13	0.15	37.18	37.33
-0.1	0.43	2.51	2.94	0.49	0.94	1.43	0.48	1.69	2.17	0.42	37.18	37.60
0.1	0.58	2.56	3.14	0.50	0.95	1.45	0.51	1.59	2.10	0.60	37.19	37.79
0.9	0.98	3.15	4.13	0.29	1.03	1.32	0.32	1.39	1.71	2.70	37.38	40.08

$\sigma_e = 1.0,\ s = 2,\ \lambda = 1.0$

Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	0.64	13.00	13.64	1.04	1.09	2.13	0.98	2.20	3.19	0.58	68.43	69.01
-0.1	1.73	13.03	14.76	1.96	1.06	3.02	1.93	2.18	4.11	1.68	71.51	73.19
0.1	2.31	13.09	15.40	2.01	1.08	3.09	2.03	2.11	4.14	2.41	71.64	74.05
0.9	3.92	13.80	17.72	1.08	1.22	2.30	1.26	1.83	3.09	10.78	19.72	30.50

$\sigma_e = 1.0,\ s = 2,\ \lambda = 1.5$

Θ \ ϕ	-0.85			-0.25			0.35			0.95		
	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C	A	C	A+C
-0.9	1.45	71.67	73.12	2.34	1.50	3.84	2.22	2.49	4.71	1.31	98.13	99.44
-0.1	3.90	71.69	75.59	4.40	1.47	5.87	4.35	2.60	6.95	3.78	104.24	108.02
0.1	5.20	71.76	76.95	4.51	1.50	6.01	4.57	2.57	7.14	5.42	104.52	109.95
0.9	8.83	72.50	81.33	2.65	1.64	4.29	2.83	2.28	5.11	24.26	2.61	26.87

6. 결 론

본 연구에서는 계절적 수요와 함께 소매자가 공급자로부터 재고보충을 위한 조달기간이 추계적인 경우에 대한 채찍효과 측도의 개발하였다. 개발된 측도를 통해 계절적 수요와 추계적 조달기간은 채찍효과에 영향을 미치고 있다. 특히, 계절주기가 채찍효과에 미치는 영향은 계절주기가 증가하면 채찍효과에 미치는 영향은 감소하고 채찍효과는 일정한 값으로 수렴한다. 그러므로 계절성이 있는 수요의 채찍효과는 계절주기가 큰 값에 비하여 작은 값에 대해 더욱더 주의 깊은 관리가 필요하다.

그리고 고객 수요량의 평균과 분산 및 조달기간의 분산은 채찍효과에 일관된 영향력이 있었다. 고객 수요량의 분산이 감소하면 채찍효과는 증가하고 반면에 고객 수요량의 분산이 증가하면 채찍효과는 감소한다. 또한 고객 수요의 평균이 증가하면 채찍효과가 증가시킨다. 그러므로 고객의 수요량이 많고 변화가 적은 상황에서 채찍효과가 주의 깊은 관리가 필요하다. 마지막으로 조달기간의 분산이 증가하면 채찍효과도 상승하기 때문에 소매자와 공급자는 조달기간이 일정하게 유지될 수 있도록 협업해야 한다. 향후 연구로는 계절주기를 포함한 다양한 시계열 모형과 다양한 재고정책을 고려한 채찍효과의 측도를 개발하여 그 특성을 파악하고자 한다.

참 고 문 헌

[1] 조동원, 이영해, "공급사슬에서 계절적 수요를 고려한 채찍효과 측도의 개발", 「대한산업공학회지」, 제35권, 제3호(2009), pp.203-212.

[2] Alwan, L.C., J. Liu, and D.Q. Yao, "Stochastic Characterization of Upstream Demand Processes in a Supply Chain," *IIE Transactions*, Vol.35, No.3(2003), pp.207-219.

[3] Box, G.E.P. and G.M. Jenkins, *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Revised Edition, Holden-Day, San Francisco, California, 1976.

[4] Chen, F., Z. Drezner, J.K. Ryan, and D. Simchi-Levi, "Quantifying the Bullwhip Effect in a Simple Supply Chain : The Impact of Forecasting, Lead Times, and Information," *Management Science*, Vol.46, No.3(2000a), pp.436-443.

[5] Chen, F., J.K. Ryan, and D. Simchi-Levi, "The Impact of Exponential Smoothing Forecasts on the Bullwhip Effect," *Naval Research Logistics*, Vol.47, No.4(2000b), pp.269-286.

[6] Chopra, S. and P. Meindl, *Supply Chain Management : Strategy, Planning and Operations*, Pearson International Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2007.

[7] Disney, S.M. and D.R. Towill, "Vendor-managed Inventory and Bullwhip Reduction in a Two-level Supply Chain," *International Journal of Operations and Production Management*, Vol.23, No.6(2003), pp.621-651.

[8] Duc, T.T.H., H.T. Luong, and Y.-D. Kim, "A Measure of Bullwhip Effect in Supply Chains with a Mixed Autoregressive-moving Average Demand Process," *European Journal of Operational Research*, Vol.187, No.1(2008a), pp.243-256.

[9] Duc, T.T.H., H.T. Luong, and Y.-D. Kim, "A Measure of the Bullwhip Effect in Supply Chains with stochastic lead time," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol.38, No.11~12(2008b), pp.1201-1212.

[10] Forrester, J.W., *Industrial Dynamics*, MIT Press, Cambridge, 1969.

[11] Gilbert, K.C., "An ARIMA Supply Chain Model," *Management Science*, Vol.51, No.2(2005), pp.305-310.

[12] Gilbert, K.C. and V. Chatpattananan, "An ARIMA Supply Chain Model with a Generalized Ordering Policy," *Journal of Modeling in Management*, Vol.1, No.1(2006), pp.33-51.

[13] Graves, S.C., "A Single-Item Inventory Model for a Nonstationary Demand Process," *Manufacturing and Service Operations Management*, Vol.1, No.1(1999), pp.50-61.

[14] Heyman, D. and M. Sobel, *Stochastic Models in Operations Research*, McGraw-Hill, New York, 1984.

[15] Kelle, P. and A. Milne, "The Effect of (s, S) Ordering Policy on the Supply Chain," *International Journal of Production Economics*, Vol.59, No.1-3(1999), pp.113-122.

[16] Kim, J.G., D. Chatfield, T.P. Harrison, and J.C. Hayya, "Quantifying the Bullwhip Effect in a Supply Chain with Stochastic Lead Time," *European Journal of Operational Research*, Vol.173, No.2(2006), pp.617-636.

[17] Lee, H.L., K.C. So, and C.S. Tang, "The Value of Information Sharing in a Two-Level Supply Chain," *Management Science*, Vol.46, No.5(2000), pp.626-643.

[18] Lee, H.L., V. Padmanabhan, and S.G. Whang, "The Bullwhip Effect in Supply Chain," *Sloan Management Review*, Vol.38, No.3(1997a), pp.93-102.

[19] Lee, H.L., V. Padmanabhan, and S.G. Whang, "Information Distortion in a Supply Chain : The Bullwhip Effect," *Management Science*, Vol.43, No.4(1997b), pp.546-558.

[20] Lin, C.H. and Y.T. Lin, "Mitigating the Bullwhip Effect by Reducing Demand Variance in the Supply Chain," *The International Journal of Advanced Manufacturing*, Vol.28, No.3-4(2006), pp.328-336.

[21] Luong, H.T., ""Measure of Bullwhip Effect in Supply Chains with Autoregressive Demand Process," *European Journal of Operational Research*, Vol.180, No.3(2007), pp.1086-1097.

[22] Luong, H.T. and Phien, "Measure of Bullwhip Effect in Supply Chains : The case of high order autoregressive demand process," *European Journal of Operational Research*, Vol.183, No.1(2007), pp.197-209.

[23] McCullen, P. and D. Towill, "Diagnosis and Reduction of Bullwhip in Supply Chains," *Supply Chain Management : An International Journal*, Vol.7, No.3(2002), pp.164-179.

[24] Nahamis, S., *Production and Operations Analysis*, 3rd ed., Irwin McGraw-Hill, New York, 1997.

[25] Paik, S.-K. and P.K. Bagchi, "Understanding the Causes of the Bullwhip Effect in a Supply Chain," *International Journal of Retail and Distribution Management*, Vol.35, No.4 (2007), pp.308-324.

[26] Sterman, J.D., "Modeling Managerial Behavior : Misperceptions of Feedback in a Dynamic Decision Making Experiment," *Management Science*, Vol.35, No.3(1989), pp.321-339.

[27] Towill, D.R., M.M. Naim, and J. Wikner, "Industrial Dynamics Simulation Models in the Design of Supply Chains," *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, Vol.22, No.5(1992), pp.3-13.

[28] Wei, W.W.S., *Time Series Analysis : Univariate and Multivariate Methods*, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1990.

[29] Zhang, X., "The Impact of Forecasting Methods on the Bullwhip Effect," *International Journal of Production Economics*, Vol.88, No.1(2004), pp.15-27.

〈부록 A〉

소매자 발주량의 조건부 기대값은 식 ($A1$)이고 소매자 발주량 기대값은 식 ($A2$)이다.

$$
\begin{aligned}
E[q_t|L_t, L_{t-1}] &= E\left[\left(\begin{array}{c} \left(L_t - L_{t-1} + \frac{(\phi^{L_t}-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t+1})}{1-\phi}D_{t-1} \\ -\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}D_{t-2} - \sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{(1-\phi^{L_t-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots] \\ + \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\frac{(1-\phi^{L_{t-1}-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots] \end{array}\right) \middle| L_t, L_{t-1}\right] \\
&= \left(L_t - L_{t-1} + \frac{(\phi^{L_t}-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t+1})}{1-\phi}\mu_d \\
&\quad - \frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\mu_d + \Theta E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\frac{(1-\phi^{L_{t-1}-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right] \\
&\quad - \Theta E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{(1-\phi^{L_t-i})}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right] = (L_t - L_{t-1} + 1)\mu_d.
\end{aligned}
\quad (A1)
$$

$$E[q_t] = E[E[q_t|L_t, L_{t-1}]] = E[(L_t - L_{t-1} + 1)\mu_d] = (\mu_L - \mu_L + 1)\mu_d = \mu_d. \quad (A2)$$

또한 소매자 발주량 제곱의 조건부 기대값은 식 ($A3$)와 같다.

$$
\begin{aligned}
E[q_t^2|L_t, L_{t-1}] &= E\left[\left(\begin{array}{c} \left(L_t - L_{t-1} + \frac{(\phi^{L_t}-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t+1})}{1-\phi}D_{t-1} \\ -\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}D_{t-2} - \sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{(1-\phi^{L_t-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots] \\ + \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\frac{(1-\phi^{L_{t-1}-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots] \end{array}\right)^2 \middle| L_t, L_{t-1}\right] \\
&= E\left[\left(\begin{array}{c} \left(L_t - L_{t-1} + \frac{(\phi^{L_t}-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\mu_d + \frac{(1-\phi^{L_t+1})}{1-\phi}D_{t-1} \\ -\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}D_{t-2} - \sum_{i=0}^{L_t-1}\frac{(1-\phi^{L_t-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots] \\ + \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\frac{(1-\phi^{L_{t-1}-i})\Theta}{1-\phi}E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots] \end{array}\right)^2\right]
\end{aligned}
\quad (A3)
$$

식 ($A3$)의 각 항을 다음과 같이 정의하면 식 ($A4$)가 된다.

$$a = L_t - L_{t-1} + \frac{(\phi^{L_t}-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi},\ b = \frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi},\ c = \frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi},\ d_i = \frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi},\ f_i = \frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}$$

$$
\begin{aligned}
&E[q_t^2|L_t, L_{t-1}] \\
&= a^2\mu_d^2 + b^2E[D_{t-1}^2] + c^2E[D_{t-2}^2] + 2ab\mu_d E[D_{t-1}] - 2ac\mu_d E[D_{t-2}] - 2bcE[D_{t-1}D_{t-2}] \\
&\quad + \Theta^2E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}d_iE[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right)^2\right] + \Theta^2E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}f_iE[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$-2a\Theta\mu_d E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]+2a\Theta\mu_d E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$
$$-2b\Theta E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]+2b\Theta E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$
$$+2c\Theta E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]-2c\Theta E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$
$$-2\Theta^2 E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1} f_j E[e_{t-s+j-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right)\right]. \tag{A4}$$

식 (A4)의 각 항들을 X와 Y로 나눈 후 X의 각 항과 함께 a, b, c의 값들을 대입한 후 정리하면 식 (A5)이 된다. 그리고 식 (A5)의 X의 두 번째 항을 W라 두면 식 (A6)과 같다.

$$X=a^2\mu_d^2+b^2E[D_{t-1}^2]+c^2E[D_{t-2}^2]+2ab\mu_d E[D_{t-1}]-2ac\mu_d E[D_{t-2}]-2bcE[D_{t-1}D_{t-2}]$$
$$E[D_{t-1}^2]=E[D_{t-2}^2]=\sigma_d^2+\mu_d^2,\ \ E[D_{t-1}D_{t-2}]=\mu_d^2+\phi\sigma_d^2-\Theta\phi^{s-1}\sigma_e^2.$$
$$X=a^2\mu_d^2+b^2(\sigma_d^2+\mu_d^2)+c^2(\sigma_d^2+\mu_d^2)+2ab\mu_d^2-2ac\mu_d^2-2bc(\mu_d^2+\phi\sigma_d^2-\Theta\phi^{s-1}\sigma_e^2)$$
$$=(L_t-L_{t-1}+1)^2\mu_d^2+\frac{\begin{pmatrix}(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^{2L_t+2}+\phi^2(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}))(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2)\\ -2\phi^2(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1})(1-\Theta\phi^s+\Theta^2-\Theta\phi^{s-2})\end{pmatrix}}{(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2)(1-\phi)^2}\sigma_d^2. \tag{A5}$$
$$X=(L_t-L_{t-1}+1)^2\mu_d^2+W. \tag{A6}$$

$$Y=\Theta^2E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right)^2\right]+\Theta^2E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right)^2\right]$$
$$-2a\Theta\mu_d E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]+2a\Theta\mu_d E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$
$$-2b\Theta E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]+2b\Theta E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$
$$+2c\Theta E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]-2c\Theta E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$
$$-2\Theta^2 E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1} f_j E[e_{t-s+j-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right)\right].$$

Y의 포함된 각 항에 d_i, f_i의 값을 대입한 후 $E[e_te_{t+i}]=E[e_t]E[e_{t+i}]=0$(단, $i\ge 0$) 및 $\sigma_e^2=E[e_t^2]-E[e_t]^2=E[e_t^2]$와 다음과 같이 정의된 지시확률변수 $I_k=\begin{cases}1, & k>0\\ 0, & o.w\end{cases}$와 $r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & o.w\end{cases}$를 이용하여 계산한 후 정리하면 식 (A7)을 얻을 수 있다.

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right)^2\right]=\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\sigma_e^2,$$
$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right)^2\right]=\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\sigma_e^2,$$

$$E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right] = E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right] = 0,$$

$$E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right] = E\left[\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right] = 0,$$

$$E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right] = E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)D_{t-1}e_{t-s+i}I_{s-i}\right] = \sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)E[D_{t-1}e_{t-s+i}]I_{s-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\sigma_e^2,$$

$$E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$

$$= E\left[D_{t-1}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)E[D_{t-1}e_{t-s+i-1}]I_{s-i} = \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i}\sigma_e^2 I_{s-i} - \Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)\sigma_e^2 I_s,$$

$$E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_t-1} d_i E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right] = E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)E[D_{t-2}e_{t-s+i}]I_{s-i} = \sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-2}I_{s-i}\sigma_e^2 \text{ (단, } s \ge 2)$$

$$E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1} f_i E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$

$$= E\left[D_{t-2}\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)E[D_{t-2}e_{t-s+i-1}]I_{s-i} = \sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\sigma_e^2,$$

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+i}|D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)E[e_{t-s+j-1}|D_{t-2}, D_{t-3}, \cdots]\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)e_{t-s+i}I_{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)e_{t-s+j-1}I_{s-j}\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{s-j}\right)r_{i,j-1}\sigma_e^2.$$

$$Y = \Theta^2\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\sigma_e^2 + \Theta^2\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\sigma_e^2 - 2\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\Theta\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\sigma_e^2$$

$$+2\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\Theta\left(\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i}I_{s-i}\sigma_e^2 - \Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)I_s\sigma_e^2\right)$$

$$+2\left(\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\Theta\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-2}I_{s-i}\sigma_e^2 \text{ (단, } s \ge 2)$$

$$-2\left(\frac{(1-\phi^{L_{t-1}})\phi}{1-\phi}\right)\Theta\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\sigma_e^2$$

$$-2\Theta^2\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{s-j}\right)r_{i,j-1}\sigma_e^2.$$

$$\text{단, } I_k=\begin{cases}1, & k>0\\ 0, & o.w\end{cases},\quad r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & o.w\end{cases}. \tag{A7}$$

$E[q_t^2 \mid L_t, L_{t-1}]=(L_t-L_{t-1}+1)^2\mu_d^2+W+Y$이기 때문에 $E[L_t^2]=E[L_{t-1}^2]=\sigma_L^2+\mu_L^2$이고 $E[L_t\, L_{t+1}]=E[L_t]E[L_{t+1}]=\mu_L^2$을 이용하여 소매자 발주량에 대한 기대값은 식 $(A8)$과 같다. 그리고 소매자 발주량의 분산은 식 $(A9)$과 같다.

$$E[q_t^2]=E[q_t^2 \mid L_t, L_{t-1}]=E[(L_t-L_{t-1}+1)^2\mu_d^2+W+Y]=(1+2\sigma_L^2)\mu_d^2+E[W]+E[Y]. \tag{A8}$$

$$VAR(q_t)=E[q_t^2]-\{E[q_t]\}^2=(1+2\sigma_L^2)\mu_d^2+E[W]+E[Y]-\mu_d^2=2\sigma_L^2\mu_d^2+E[W]+E[Y]. \tag{A9}$$

다음으로 $(A9)$에 W와 Y의 값을 대입한 후 식 (4)를 이용하여 정리하면 식 $(A10)$와 같다.

$$\begin{aligned}
VAR(q_t)=&\,2\sigma_L^2\mu_d^2+\frac{E\begin{bmatrix}\left(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^{2L_t+2}+\phi^2\left(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}\right)\right)\left(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2\right)\\ -2\phi^2\left(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1}\right)\left(1-\Theta\phi^s+\Theta^2-\Theta\phi^{s-2}\right)\end{bmatrix}}{\left(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2\right)(1-\phi)^2}\sigma_d^2\\
&+\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}+\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\right)\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\right]\sigma_d^2\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i}I_{s-i}\\ -\Theta\left(\dfrac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)I_s\end{pmatrix}\right]\sigma_d^2\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-2}I_{s-i}\right]\sigma_d^2\ (\text{단, } s\ge 2)\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{s-j}\right)r_{i,j-1}\right]\sigma_d^2.
\end{aligned}$$

$$\text{단, } I_k=\begin{cases}1, & k>0\\ 0, & o.w\end{cases},\quad r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & o.w\end{cases}.\ \blacksquare \tag{A10}$$

그러나 식 $(A10)$은 제한적인 계절주기가 적용될 수 있는 항이 있기 때문에 식 $(A11)$과 식 $(A12)$로 나누어 질 수 있다.

$s=1$,

$$VAR(q_t)=2\sigma_L^2\mu_d^2+\frac{E\begin{bmatrix}\left(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^{2L_t+2}+\phi^2\left(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}\right)\right)\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)\\ -2\phi^2\left(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1}\right)\left(1-\Theta\phi+\Theta^2-\Theta\phi^{-1}\right)\end{bmatrix}}{\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)(1-\phi)^2}\sigma_d^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{1-i}+\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{1-i}\right)\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{-i}I_{1-i}\right]\sigma_d^2\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\begin{matrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{1-i}I_{1-i}\\ \displaystyle-\Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)\end{matrix}\right)\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{-i}I_{1-i}\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{1-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)I_{1-j}\right)r_{i,j-1}\right]\sigma_d^2\\
&=2\sigma_L^2\mu_d^2+\frac{E\left[\begin{matrix}\left(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^{2L_t+2}+\phi^2\left(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}\right)\right)\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)\\-2\phi^2\left(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1}\right)\left(1-\Theta\phi+\Theta^2-\Theta\phi^{-1}\right)\end{matrix}\right]}{\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)(1-\phi)^2}\sigma_d^2\\
&+\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\left(\frac{1-\phi^{L_t}}{1-\phi}\right)^2+\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)^2\right)\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L_t}}{1-\phi}\right)\right]\sigma_d^2\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)\phi-\Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)\right)\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)\right]\sigma_d^2\\
&=2\sigma_L^2\mu_d^2+\frac{E\left[\begin{matrix}(1-\phi)^2(1-\Theta)\left(1-\Theta-2\phi^{L_t}(\phi-\Theta)\right)\\+(\phi-\Theta)^2\left(\phi^{2L_t}+\phi^{2L_{t-1}}-2\phi^{L_{t-1}+L_t+1}\right)\end{matrix}\right]}{\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)(1-\phi)^2}\sigma_d^2.
\end{aligned}
\tag{A11}
$$

$s\geq 2$,

$$
\begin{aligned}
VAR(q_t)&=2\sigma_L^2\mu_d^2+\frac{E\left[\begin{matrix}\left(1-2\phi^{L_t+1}+\phi^{2L_t+2}+\phi^2\left(1-2\phi^{L_{t-1}}+\phi^{2L_{t-1}}\right)\right)\left(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2\right)\\-2\phi^2\left(1-\phi^{L_{t-1}}-\phi^{L_t+1}+\phi^{L_{t-1}+L_t+1}\right)\left(1-\Theta\phi^s+\Theta^2-\Theta\phi^{s-2}\right)\end{matrix}\right]}{\left(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2\right)(1-\phi)^2}\sigma_d^2\\
&+\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-1}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}+\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)^2 I_{s-i}\right)\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\right]\sigma_d^2\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{1-\phi^{L_t+1}}{1-\phi}\right)\left(\begin{matrix}\displaystyle\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i}I_{s-i}\\ \displaystyle-\Theta\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}}}{1-\phi}\right)I_s\end{matrix}\right)\right]\sigma_d^2\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-2}I_{s-i}\right]\sigma_d^2\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\frac{\left(1-\phi^{L_{t-1}}\right)\phi}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-i}}{1-\phi}\right)\phi^{s-i-1}I_{s-i}\right]\sigma_d^2
\end{aligned}
$$

$$-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^2}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right)E\left[\left(\sum_{i=0}^{L_t-1}\left(\frac{1-\phi^{L_t-i}}{1-\phi}\right)I_{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{L_{t-1}-1}\left(\frac{1-\phi^{L_{t-1}-j}}{1-\phi}\right)I_{s-j}\right)r_{i,j-1}\right]\sigma_d^2$$

단, $I_k=\begin{cases}1, & k>0\\ 0, & o.w\end{cases}$, $r_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & o.w\end{cases}$. (A12)

그러므로 채찍효과 측도 $B(L_t, s, \Theta, \phi)$는 소매자 발주량의 분산 $VAR(q_t)$에 고객 수요량의 분산 σ_d^2를 나눔으로써 식 (27)과 식 (28)을 얻을 수 있다.