

## 안정동력학 모형에서 최선 통행료 및 차선 통행료\*

박 구 현\*\*

### First- and Second-best Pricing in Stable Dynamic Models

Koohyun Park\*\*

#### ■ Abstract ■

This study examined the first- and second-best pricing by stable dynamics in congested transportation networks. Stable dynamics, suggested by Nesterov and de Palma (2003), is a new model which describes and provides a stable state of congestion in urban transportation networks.

The first-best pricing in user equilibrium models introduces user-equilibrium in the system-equilibrium by tolling the difference between the marginal social cost and the marginal private cost on each link. Nevertheless, the second-best pricing, which levies the toll on some, but not all, links, is relevant from the practical point of view. In comparison with the user equilibrium model, the stable dynamic model provides a solution equivalent to system-equilibrium if it is focused on link flows. Therefore the toll interval on each link, which keeps up the system-equilibrium, is more meaningful than the first-best pricing. In addition, the second-best pricing in stable dynamic models is the same as the first-best pricing since the toll interval is separately given by each link.

As an effect of congestion pricing in stable dynamic models, we can remove the inefficiency of the network with inefficient Braess links by levying a toll on the Braess link. We present a numerical example applied to the network with 6 nodes and 9 links, including 2 Braess links.

Keyword : Stable Dynamics, User Equilibrium, First-best Pricing, Second-best Pricing, Congestion Pricing, Transportation Network

논문접수일 : 2009년 10월 27일 논문게재확정일 : 2009년 12월 01일

논문수정일(1차 : 2009년 12월 01일)

\* 이 논문은 2008학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

\*\* 홍익대학교 산업공학과

## 1. 서 론

통행료는 공학적 측면과 경제적 측면을 고려하여 부과한다. 공학적 측면이란 교통망에서의 혼잡 트래픽을 효율적으로 분배하기 위해서 부과하는 것을 말하며, 이와 같은 의미에서 통행료 대신에 혼잡통행료라는 용어를 사용하기도 한다. 경제적 측면에서는 도로 건설 등의 특별한 목적의 재원을 확보하기 위해서 통행료를 부과하기도 한다. 본 연구에서는 공학적 측면에서 혼잡통행료에 대해 다룬다.

사회적 관점에서는 어느 도로의 혼잡은 개인들의 비효율적 경로 선택으로 발생된다고 파악한다. 즉 교통망 전체 관점에서 교통망의 어느 링크의 혼잡은 어쩔 수 없는 문제가 아니고 극복할 수 있는 문제이다. 만일 교통망 전체에 하나의 통제센터를 두고 여기서 각 개인의 통행경로를 통제할 수 있다면 혼잡을 피할 수 있는 것이다. 이와 같이 중앙 통제센터에서 모든 개인의 통행시간의 합이 최소가 되도록 각 개인의 통행경로를 결정한 결과를 시스템균형(system equilibrium) 또는 시스템최적(system optimum)이라고 한다.

이에 반해 교통망 전체를 관할하는 통제센터가 없이 각 개인들이 스스로 통행경로를 결정하는 경우, 각 개인은 각자의 목적지까지 최단경로를 선택하여 통행하게 된다. 이와 같은 경우 어느 개인도 현재의 통행경로보다 더 나은 경로가 없게 된 통행배정의 상태를 이용자균형(user equilibrium)의 상태라고 한다. 이용자균형 상태는 Wardrop 제 1원칙이 성립되는 경우이다. 즉 주어진 기종점(출발지-목적지)에 대해 통행량이 배정되지 않은 경로가 있다면 이 경로의 통행시간은 통행량이 배정된 경로의 통행시간보다 길거나 같게 된다는 것이다. 이용자균형과 Wardrop 제 1원칙의 정확한 구분과 같게 되는 경우에 대해서는 참고문헌[4]를 참조할 수 있다.

따라서 이용자균형에서 같은 기종점에 대해 복수개의 경로에 통행이 배정되어 있다면 이들 경로의 경로통행시간에는 차이가 있을 수 없다. 일시적으로 차이가 발생한다면 이용자들이 짧은 경로로 변

경하여 결국 모든 이용경로의 경로통행시간은 같게 된다. 즉 모든 이용자는 공평하다. 그러나 시스템균형과 비교할 때 이용자균형의 상태는 경로통행시간의 총합이 더 크기 때문에 이용자에게 공평성을 유지되게 하기 위해 효율성이 희생되었다고 볼 수 있다.

최선통행료(first-best pricing) 정책이란 각 링크에 통행료를 적절히 부과하여 모든 이용자가 스스로 경로를 선택하여 결정된 이용자균형이 시스템균형이 되도록 유도하는 정책이다. 최선통행료 정책에 의해 이용자균형이 시스템균형이 되기 위해서는 모든 링크에 통행료를 부과해야 한다. 그러나 현실적으로 모든 링크에 대해 통행료를 부과할 수 없기 때문에 일부 링크에 대해서만 통행료를 부과하게 된다. 이와 같이 일부 링크에 통행료를 부과할 때 시스템균형까지는 유도하지 못하더라도 효율성을 가장 증진시키는 통행배정이 되기 위해서 통행료를 어떻게 부과할 것인가를 결정하게 되는데 이러한 통행료 정책을 차선통행료(second-best pricing) 정책이라 한다.

본 논문에서는 이용자균형 모형에서의 최선통행료 및 차선통행료 정책이 안정동력학 모형에서는 어떻게 적용되는가를 연구한다. 안정동력학(stable dynamics) 모형은 이용자균형 모형의 대안으로 제시된 모형이다[4, 5, 14-16]. 이용자균형 모형에서는 링크 통행시간을 통행량의 증가함수(또는 비감소함수)로 가정하고, 경로 통행시간은 경로에 포함된 링크의 통행시간의 합으로 계산한다. 따라서 어느 링크에 통행량이 증가하여 혼잡하게 되면 링크통행시간은 크게 증가한다. 그러나 혼잡 링크에서 실제 관찰되는 것은 링크통행시간은 매우 크나 링크 통과량(통행량)은 실제로 매우 적게 된다. 따라서 이용자균형 모형의 기본가정과 실제 관측과는 차이가 있게 되는데 이용자균형모형에서는 이러한 차이를 통행시간함수의 파라미터를 보정함으로 보완하고 있다.

그러나 Nesterov and de Palma[14]가 제안한 안정동력학 모형은 통행량의 함수로서의 링크통행시간 함수를 이용하지 않고, 대신 물리 원칙과 같은 기본적인 가정으로부터 출발한다. 즉, 링크 $j$ 의 통행

량  $f_j$ 가 링크용량  $\bar{f}_j$ 보다 적으면 최소통행시간  $\bar{t}_j$ 가 걸리고, 통행량  $f_j$ 가 링크용량  $\bar{f}_j$ 와 같으면 최소통행시간  $\bar{t}_j$  이상 걸린다는 원칙이다. 이와 같은 기본적인 가정과 Wardrop 제 1원칙이 만족되도록 모형에 의해 통행량을 배정하고 링크통행시간을 결정한다. 이러한 통행배정 모형은 선형계획모형 또는 다상품 최소비용 네트워크 문제(multicommodity minimum cost network flow problem)가 된다.

안정동력학 모형에서의 통행료 정책을 연구하는 본 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 제 2장에서 이용자균형 모형에서의 최선통행료 및 차선통행료 결정, 선택모형과 통행료 효과, 시간가치 모형에 대한 연구결과를 검토한다. 제 3장은 안정동력학 모형을 위한 기본적인 표현 및 가정들을 소개한다. 그리고 제 4장은 본 연구의 주된 결과로서 제 2장 이용자균형 모형의 통행료 관련내용과 대응되는 안정동력학 모형의 연구 결과를 제시한다. 제 5장에서는 네트워크 적용 예를 보이고, 제 6장에서는 결론 및 추후연구에 대해 간략히 정리한다.

## 2. 이용자균형 모형에서 통행료 결정

링크 비용함수에 기초한 균형통행에는 이용자균형과 시스템균형이 있으며, 이용자균형이란 어떠한 운전자도 현재 경로보다 더 유리한 다른 경로를 발견할 수 없는 상태를 말한다. 링크 비용함수가 연속이면 이용자균형은 Wardrop 제 1원칙으로 표현되는 Wardrop 균형과 일치하게 된다[4]. 이에 비해 시스템균형이란 전체 링크통행시간의 합이 최소가 되도록 중앙센터에서 모든 통행자의 경로를 결정하는 상태를 의미한다.

이용자균형 모형에서 링크통행시간 함수로 가장 널리 적용되고 있는 BPR 식은 아래와 같다[4].

$$t_j = \bar{t}_j \left( 1 + A \left( \frac{f_j}{\bar{f}_j} \right)^B \right) \quad (2-1)$$

여기서  $\bar{t}_j$ 은 링크  $j$ 에서의 최소통행시간이고,  $\bar{f}_j$ 는

링크  $j$ 에서의 최대통행량(용량)을 의미하며, 파라미터에 대해서는 미국 BPR(Bureau of Public Roads)에서  $A = 0.15, B = 4.0$ 를 권고하고 있다.

### 2.1 최선통행료 결정과 차선통행료 결정

최선통행료 결정은 한계비용(marginal cost)에 의해 통행료를 결정하는 것을 말한다. 교통망의 모든 링크에서 사회적 한계비용(marginal social cost)과 개인적 한계비용(marginal private cost)의 차이를 통행료로 부과한다. 이러한 차이를 통행료로 모든 링크에 부과함으로써 이용자 스스로 결정한 이용자균형이 하나의 센터에서 교통량을 최적으로 통제하여 얻어지는 시스템균형과 같게 된다[3, 18].

한 사람이 교통망에 새로이 들어옴으로 인해 다른 통행자에게 끼치게 되는 영향은 사회적 한계비용에 해당되므로 사회적 한계비용은 링크 비용함수의 한계비용의 경로 합에 해당된다. 반면 각 개인은 각 링크에서 다른 통행자들과 마찬가지로 평균의 통행비용만을 치르게 될 것으로 기대하게 되므로 개인적 한계비용은 결국 평균 링크 비용함수가 되고 이에 대한 경로 합으로 간주한다. 기종점간 통행 수요가 고정적으로 주어졌을 때에 최선통행료 결정 모형에 대해서는 Sheffi[17]를 참고할 수 있으며, 기종점간 수요가 가변적인 경우의 최선통행료 결정 모형에서 대해서는 Yang and Huang[18, 19]를 참고할 수 있다.

제 4장의 본 연구 주제인 안정동력학 모형에서의 통행료 결정과 비교하기 위해 이용자균형 모형에서의 최선통행료 결정을 좀 더 구체적으로 소개하고자 한다. 이를 위해 다음의 몇 가지 표현을 정의한다.

- $f_j$  = 링크  $j$ 의 링크통행량,  $f$ 는 벡터형태
- $c_j(\cdot)$  = 링크  $j$ 의 링크통행량에 대한 링크통행시간 함수
- $F_p^k$  =  $k$ 번째 기종점을 연결하는 경로  $p$ 의 경로통행량
- $d^k$  =  $k$ 번째 기종점에 대한 수요

이제 이용자균형 관점에서의 통행배정을 최적화 문제로 표현하면 다음과 같다[17].

$$\text{Minimize } Z_1(f) = \sum_{\text{링크 } j} \int_0^{f_j} c_j(w) dw \quad (2-2a)$$

$$\text{Subject to } \sum_{\substack{\text{k번째} \\ \text{경로 } p}} F_p^k = d^k \text{ (기종점 } k \text{ 별)} \quad (2-2b)$$

$$F_p^k \geq 0 \text{ (기종점 } k \text{ 별)} \quad (2-2c)$$

최적화 문제 (2-2)의 목적함수 식 (2-2a)에서 각 링크별로 계산되는 통행시간의 합은 결국 평균통행시간과 통행량의 곱에 해당된다. 이용자들은 각 링크의 통행시간에 대해 평균통행시간으로 생각하기 때문이다. 문제 (2-2)의 의사결정변수는 기종점별 경로통행량  $F_p^k$  이고, 링크통행량  $f_j$  는

$$f_j = \sum_{\text{기종점 } k} \sum_{\text{경로 } p} \delta_{jp} F_p^k \quad (2-3)$$

으로 정의된다. 여기서  $\delta_{jp}$  는 링크  $j$  가 경로  $p$  에 포함되면 1, 아니면 0인 값이다.

이용자균형에서 기종점  $k$  의 경로  $p$  통행량에 대한 목적함수의 도함수는 아래의 식 (2-4)와 같으며, 문제 (2-2)의 Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 최적조건은 Wardrop 제 1원칙이라고 불리우며 식 (2-4)의 도함수가 포함된 등식 및 부등식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1}{\partial F_p^k} &= \sum_{\text{링크 } j} \frac{\partial Z_1}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial F_p^k} \\ &= \frac{\partial}{\partial f_j} \left( \sum_{\text{링크 } j} \int_0^{f_j} c_j(w) dw \right) \frac{\partial f_j}{\partial F_p^k} = \sum_{\text{링크 } j} c_j(f_j) \delta_{jp} \end{aligned} \quad (2-4)$$

이제 시스템균형 관점에서의 통행배정을 최적화 문제로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize } Z_2(f) = \sum_{\text{링크 } j} f_j c_j(f_j) \quad (2-5a)$$

$$\text{Subject to } \sum_{\substack{\text{k번째} \\ \text{경로 } p}} F_p^k = d^k \text{ (기종점 } k \text{ 별)} \quad (2-5b)$$

$$F_p^k \geq 0 \text{ (기종점 } k \text{ 별)} \quad (2-5c)$$

최적화 문제 (2-5)의 목적함수 식 (2-5a)에서 각 링크별로 계산되는 통행시간의 합은 결국 한계통행시간과 통행량의 곱에 해당된다. 실제 시스템에서 소요되는 링크통행시간은 최종 통행량에 의해 통행시간이 결정되기 때문이다. 여기서도 의사결정변수는 기종점별 경로통행량  $F_p^k$  이고, 링크통행량  $f_j$  는 식 (2-3)으로 정의된다.

시스템균형에서 기종점  $k$  의 경로  $p$  통행량에 대한 목적함수의 도함수를 구해보면 아래의 식 (2-6)과 같이 되며, 문제 식 (2-5)의 KKT 최적조건은 Wardrop 제 2원칙이라고 불리우며, 식 (2-6)의 도함수가 포함된 등식 및 부등식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_2}{\partial F_p^k} &= \sum_{\text{링크 } j} \frac{\partial Z_2}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial F_p^k} = \frac{\partial}{\partial f_j} \left( \sum_{\text{링크 } j} f_j c_j(f_j) \right) \frac{\partial f_j}{\partial F_p^k} \\ &= \sum_{\text{링크 } j} (c_j(f_j) + f_j c_j'(f_j)) \delta_{jp} \end{aligned} \quad (2-6)$$

이제 식 (2-4)의 마지막 우변식과 식 (2-6)의 마지막 우변에 주목한다. 사실 문제 식 (2-2)의 KKT 최적조건은 문제 식 (2-5)의 KKT 최적조건과 '기종점  $k$  의 경로  $p$  통행량에 대한 목적함수의 도함수'를 제외하고는 동일한 형태의 조건식이다. 즉, 이용자균형의 최적조건식에서  $c_j(f_j)$  대신에  $c_j(f_j) + f_j c_j'(f_j)$  를 대입하면 시스템균형의 최적조건식이 된다. 통행료 정책과 연관지어 다시 말하면, 이용자균형의 각 링크에 링크통행시간  $c_j(f_j)$  에 통행료  $f_j c_j'(f_j)$  를 부과하면 시스템균형의 최적조건이 얻어지게 된다. 이와 같이 각 링크  $j$  에 통행료  $f_j c_j'(f_j)$  를 부과하는 통행료 결정을 이용자균형 모형에서 최선통행료 정책이라고 한다.

이와 같이 최선통행료 정책은 모든 링크에  $c_j(f_j) + f_j c_j'(f_j)$  과  $c_j(f_j)$  의 차이에 해당되는 비용을 통행료로 부과하는 정책이다. 그러나 모든 링크에서 통행료를 부과하는 것은 현실적으로 적용하기 어렵기 때문에 일부 링크에 대해서만 통행료를 부과하게 된다. 이와 같이 최선의 정책은 아니지만 현실 가능한 차선의 정책으로 일부 링크에 대해서만 부과되는 통행료를 차선통행료라 한다. 차선통행료 결정에

는 2단계-계획문제(Bi-level programming problem)로 모형화할 수도 있고 gap 함수(또는 merit 함수라고도 함)를 이용하여 단일 단계의 최적화문제 또는 변동부등식(variability inequality)으로 모형화할 수도 있다. 2단계-계획문제로 모형화하는 경우, 하위단계 문제는 최적화문제 또는 변동부등식 문제로 모형화된다. 차선통행료 결정모형에 대해서는 Yang and Huang[17, 18]를 참고할 수 있다.

최선통행료 및 차선통행료와 관련하여 국내 연구로는 임용택, 김병관[6]이 가변수요를 갖는 다계층 이용자에 대해서 최선통행료 산정모형을 제시하였으며, 김병관 외[2]는 2단계-계획문제로 모형화된 차선통행료 산정모형에 민감도분석 결과를 이용한 최적해 해법을 제안하였다. 또한 권용석, 박창호[1]는 링크 단위의 통행요금 반영이 갖는 현실적 한계를 극복하기 위해서 경로기반 통행배정모형을 통하여 경로거리에 따라 통행요금을 반영할 수 있는 방법을 제시하기도 하였다.

## 2.2 선택모형, 통행료 효과 및 시간가치(VOT) 모형

통행자는 승용차외에 버스나 전철 등의 대중교통수단을 선택하여 목적지까지 갈 수도 있고, 승용차를 이용한다 하더라도 목적지까지의 경로가 다수 존재할 때 통행시간 외에 다른 원인으로 남들과 다른 경로를 선택할 수도 있다. 일반적인 통행배정모형은 각 통행수단 또는 통행경로에 대해 전부-아니면-전무(all-or-nothing)의 통행량이 할당된다. 그러나 실제 통행자들은 복잡한 원인으로 인해 각 통행대안(통행수단 또는 통행경로)에 대해 다양한 선택을 하게 된다.

선택모형(choice model)이란 2가지 이상의 교통수단 또는 기종점간 복수경로가 존재할 때 통행량이 어떻게 결정되는가를 설명하는 모형이다. 선택모형은 보통 확률모형(stochastic model)으로 표현되며, 여기에는 logit 모형과 probit 모형의 2가지가 있다. logit 모형에서 각 대안의 선택확률은 기대효

용의 지수함수 식으로 표현되며, STOCH 알고리즘으로 불리는 Dial[9]의 방법은 logit 선택모형에 기초한 통행량 배정 알고리즘으로 매우 효율적인 방법으로 평가받고 있다. 이에 반해 probit 선택모형은 각 통행대안의 효용을 확률변수로 나타내고 이들이 정규분포를 따른다고 가정한다. 어느 통행대안이 선택될 확률, 즉 해당 대안의 효용이 가장 클 확률은 Clark 방법으로 알려진 근사방법이나 Monte-Carlo 시뮬레이션을 이용하여 계산할 수 있다[8, 17] (특히 [17]의 <Appendix A.2> 참조).

통행료의 효과를 파악하기 위해서는 먼저 각 통행대안의 효용에 통행료를 포함하여 정의한다. 그러면 선택모형이나 알려진 다른 통행배정모형에 의해 통행량이 결정되므로 이들 관계를 분석함으로써 통행료 효과를 알 수 있다. 황기연 외[7]은 이러한 통행대안의 기대효용에 통행료가 어떻게 포함되는지를 보여준다.  $T_k$  및  $p_k$ 를 통행대안  $k$ 의 통행시간 및 통행료라 할 때, 그들은 통행대안의 기대효용  $V_k$ 는 식 (2-7)으로 표현하였다. 여기서  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ 는 상수 계수들이다.

$$V_k = \alpha_k - \beta_k T_k - \gamma_k p_k \tag{2-7}$$

이용자 균형모형에서 많은 통행배정은 통행시간과 통행료를 통합한 일반화된 통행시간함수에 의해 이루어진다. 즉 각 개인은 본인의 시간가치(value of time, 'VOT'라 함)에 의해 통행료를 시간으로 환산한다. 일반적으로 통행자  $i$ 의 VOT가  $v_i$ 이고 경로  $k$ 를 선택하였다면 경로  $k$ 의 '일반화된 통행시간'  $\Gamma_k(i)$ 는 식 (2-8)로 표현된다.

$$\Gamma_k(i) = T_k + \frac{p_k}{v_i} \tag{2-8}$$

여기서  $T_k$ 는 경로  $k$ 의 경로통행시간이고,  $p_k$ 는 경로  $k$ 에서 지불되는 경로통행료이다. 경로통행료 결정은 경로통행시간  $T_k$  대신에 일반화된 경로통행시간  $\Gamma_k$ 에 의해 최적 통행배정 조건식으로부터 얻을 수 있다. 이러한 경로통행시간이나 경로통행료가

해당 경로에 포함되는 링크통행시간과 링크통행료의 합으로 표현될 때 우리는 가산모형(additive model)이라고 부른다. 즉, 통행자  $i$ 에게 링크  $j$ 의 일반화된 링크통행시간이  $\tau_j(i) = t_j + p_j/v_i$ 로 주어진다 면, 주어진 경로  $k$ 의 일반화된 경로통행시간  $\Gamma_k(i)$ 은 아래 식 (2-9)으로 표현된다.

$$\Gamma_k(i) = \sum_{\text{링크 } j} \delta_{jk} \tau_j(i) = \sum_{\text{링크 } j} \delta_{jk} \left( t_j + \frac{p_j}{v_i} \right) \quad (2-9)$$

여기서  $\delta_{jk}$ 는 링크  $j$ 가 경로  $k$ 에 포함되면 1, 아니면 0인 값이다.

경우에 따라서는 통행시간을 금액으로 환산하여 '일반화된 통행비용'을 이용할 수 있다[12]. 즉, 통행자  $i$ 의 VOT가  $v_i$ 라고 할 때, 통행자  $i$ 의 일반화된 링크통행비용은  $c_j(i) = p_j + v_i t_j$ 이 된다. 이와 같이 통행시간과 통행료의 2개의 통행선택 기준을 통행시간 기준으로 환산하여 일반화된 통행시간으로 통합할 수도 있고, 통행시간을 통행료로 환산하여 일반화된 통행비용으로 통합할 수도 있다. 위에서 소개한 환산식은 VOT가 주어질 때, 모두 선형 환산식을 이용하였으나 환산식이 비선형함수가 될 수도 있다[11, 13]. 통행시간 통합모형이나 통행비용 통합모형도 아닌 통행료와 통행시간에 각각 다른 가중치를 준 일반적인 다기준 모형으로 모형화 할 수도 있다. 이외에도 비가산적(nonadditive) 통행료 모형 및 연속형 VOT 모형 등이 존재한다[12]. 연속형 VOT 모형란 통행자의 VOT를 연속형 확률변수로 보는 것으로 확률분포는 확률밀도함수로 또는 누적분포함수로 표현된다[10].

### 3. 안정동력학 모형에 사용되는 표현과 가정

안정동력학 모형에서는 링크별로 통행량에 따른 통행시간 함수를 고려하지 않는다. 다만 링크에서의 링크통행시간은 교통망 전체를 고려하여 Wardrop 제1원칙이 성립되게 모형에 의해 결정된다. 따라서

혼잡통행료 결정 모형도 이용자균형 모형에서처럼 링크통행시간 함수를 이용한 통행태정 모형으로부터 얻어질 수는 없다. 먼저 안정동력학 모형에서 사용되는 표현들을 아래와 같이 정의한다.

$G = G(N, E)$ , 방향성 네트워크

$N$  = 노드 집합, 첨자  $i$ 는 특정 노드를 의미함.

$E$  = 방향성 링크 집합, 첨자  $j$ 는 특정 링크를 의미함.

$|E|$  = 집합  $E$ 의 원소의 수.

$\bar{f}_j$  = 링크  $j$ 의 최대통행량,  $j \in E$ ,  $\bar{f} \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,  $\bar{f} \geq 0$ ,

$\bar{t}_j$  = 링크  $j$ 의 최소통행시간,  $j \in E$ ,  $\bar{t} \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,  $\bar{t} \geq 0$ ,

$f_j$  = 링크  $j$ 의 통행량(변수),  $j \in E$ ,  $f \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,

$t_j$  = 링크  $j$ 의 통행시간(변수),  $j \in E$ ,  $t \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,

$K$  = 기중점 노드쌍의 집합, 첨자  $k$ 는 특정 기중점을 의미함.

$d^k$  =  $k$ -번째 기중점 통행 수요,  $d \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

$f_j^k$  =  $k$ -번째 기중점 통행을 위한 링크  $j$ 의 통행량(변수),  $f^k \in R^{|E|}$ 는 벡터 형태,

$r_i^k$  =  $k$ -번째 기중점 통행의 노드 의무유출량. 노드  $i$ 가 기중노드이면,  $r_i^k = d^k$ , 노드  $i$ 가 종점 노드이면,  $r_i^k = -d^k$ , 그 외 노드이면  $r_i^k = 0$ .  $r^k \in R^{|N|}$ 는 벡터 형태,

$P^k$  =  $k$ -번째 기중점을 연결하는 경로 집합, 첨자  $p$ 는 특정 경로를 의미함.

$F_p^k$  =  $k$ -번째 기중점의  $p$ -번째 경로 통행량(변수),  $F^k \in R^{|P^k|}$ 는 벡터 형태,

$T_k$  =  $k$ -번째 기중점의 최단경로 통행시간(변수),  $T \in R^{|K|}$ 는 벡터 형태,

$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$  (두 벡터  $x, y$ 의 내적).

안정동력학 모형은 각 링크의 최소통행시간( $\bar{t}_j$ )

과 최대통행량( $\bar{f}_j$ )으로부터 다음의 3가지 가정을 만족하도록 균형해, 즉 각 링크의 링크통행시간( $t_j$ )과 링크통행량( $f_j$ )을 결정한다.

[가정 3-1] (Wardrop 제1원칙) 각 링크의 통행시간이  $t \in R^{L^k}$ 로 주어졌을 때, 각 운전자들은 최단 시간의 경로를 선택하여 목적지까지 간다.

[가정 3-2] 링크  $j \in E$ 의 통행량  $f_j$ 는 최대 링크통행량  $\bar{f}_j$ 를 넘지 않는다. 즉,  $f_j \leq \bar{f}_j$ 이다.

[가정 3-3] 링크  $j \in E$ 의 통행시간  $t_j$ 는 (i)  $f_j < \bar{f}_j$ 이면,  $t_j = \bar{t}_j$ 이고, (ii)  $f_j = \bar{f}_j$ 이면,  $t_j \geq \bar{t}_j$ 이다.

이러한 안정동력학 모형의 균형해를 계산하기 위해 2가지 종류의 범위행렬(incidence matrix)을 정의한다. 첫 번째 행렬  $A$ 는  $|N| \times |E|$  행렬로서 네트워크의 토폴로지를 나타내는 노드-링크 범위행렬이다. 즉 노드  $i$ 가 링크  $j$ 의 시작노드이면  $A_{ij} = 1$ , 노드  $i$ 가 링크  $j$ 의 끝노드이면  $A_{ij} = -1$ , 그 외 노드이면  $A_{ij} = 0$ . 두 번째 행렬  $B^k (k \in K)$ 는  $|E| \times |P^k|$  링크-경로 범위행렬로서, 링크  $j$ 가 경로  $p \in P^k$ 에 포함되면  $B_{jp}^k = 1$ , 아니면  $B_{jp}^k = 0$ 이 된다.

## 4. 안정동력학 모형에서의 최선 통행료 및 차선통행료

### 4.1 안정동력학 모형의 특성

이제 이용자균형 모형에서의 최선통행료 및 차선통행료에 해당되는 혼잡통행료가 안정동력학 모형에서는 어떻게 표현되는지 보고자 한다. 이를 위해 다음 문제를 고려한다.

$$\text{Maximize } \langle d, T \rangle - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (4-1a)$$

$$\text{subject to } \langle B_p^k, t \rangle \geq T^k, p \in P^k, k \in K, \quad (4-1b)$$

$$t \geq \bar{t}. \quad (4-1c)$$

여기서  $B_p^k$ 는 행렬  $B^k$ 의  $p$ 번째 열벡터이다.

문제 (4-1)은 Nesterov and de Palma([14], 정리 8)의 최대흐름모형(max-flow model)에 해당되며 이로부터 결정되는 통행시간은 이용자균형처럼 Wardrop 제 1원칙이 성립된다. 또한 문제 (4-1)의 최적해에서 제약식 (4-1c)의 쌍대 승수(dual multiplier)를  $s^*$ 라고 할 때,  $f^* = \bar{f} - s^*$ 는 최적 통행배정이 된다. 즉 문제 (4-1)의 쌍대문제에 해당되는 쌍대최대흐름모형([14], 기본정리 9)의 최적해가 된다. 쌍대 최대흐름모형은 아래와 같은 다상품 최소비용 네트워크흐름문제가 된다.

$$\text{Minimize } \langle f, \bar{t} \rangle \quad (4-2a)$$

$$\text{subject to } f = \sum_{k \in K} f^k \leq \bar{f}, \quad (4-2b)$$

$$A f^k = r^k, k \in K, \quad (4-2c)$$

$$f^k \geq 0, k \in K. \quad (4-2d)$$

[정리 4-1] 문제 (4-2)의 최적해는 Wardrop 제 1원칙(가정 3-1)과 관련하여 다음의 2가지 경우를 갖는다.

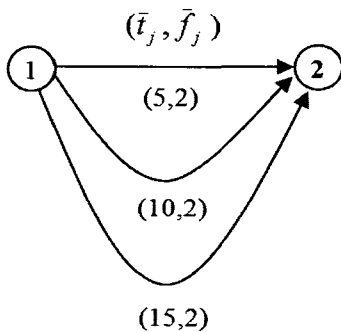
- (i) Wardrop 제 1원칙(가정 3-1)을 보장하지 않아도 된다고 하면, 문제 (4-2)의 최적해는 모든 통행자의 통행시간의 합을 최소로 하는 통행배정이 되며, 이때 링크통행시간은  $\bar{t}$ 가 된다.
- (ii) Wardrop 제 1원칙(가정 3-1)을 보장하여야 한다고 하면, 문제 (4-2)의 최적해는 안정동력학 모형의 최적 통행배정이 되며, 이때 링크통행시간은 문제 (4-1)에 의해 결정된다.

(증명) (i) 안정동력학 모형의 가정 3-3에 의하면 링크  $j$ 의 통행시간  $t_j$ 는  $f_j < \bar{f}_j$ 이면  $t_j = \bar{t}_j$ 이고,  $f_j = \bar{f}_j$ 이면  $t_j \geq \bar{t}_j$ 이다. 즉  $t_j > \bar{t}_j$ 로 결정되는 것은 오직 Wardrop 제 1원칙을 보장하기 위함이다. 따라서 Wardrop 제 1원칙을 보장하지 않아도 된다면 모든 링크통행시간을  $t_j = \bar{t}_j$ 로 놓을 수 있고, 이와 같은 경우 문제 (4-2)는 모든 기종점간 통행수요에 대한 통행시간의 합을 최소로 하는 통행배정

을 구하는 문제가 된다. (ii) Wardrop 제 1원칙(가정 3-1)을 보장하여야 한다고 하면, 안정동력학 모형의 모든 가정을 만족하여야 하는 것이다. 참고문헌 [14]의 제 4.3절에서 보는 바와 같이 문제 (4-2)는 문제 (4-1)의 쌍대문제에 해당되는 최적의 통행배정이다. 이때 링크통행시간은 문제 (4-1)로 결정된다. (증명끝)

정리 4-1의 (i)로부터 이용자균형 모형의 시스템 최적에 해당되는 안정동력학 모형의 통행배정은 문제 (4-2)에 의해 제공되는 통행배정이 되며, 정리 4-1의 (ii)로부터 이러한 통행배정은 또한 안정동력학 모형의 균형해의 통행배정과 같다는 것도 알 수 있다. 따라서 안정동력학 모형의 균형해는 링크통행시간 측면에서 보면 이용자균형(Wardrop 제 1원칙 성립)에 해당되고, 링크통행량 측면에서는 시스템최적(Wardrop 제 2원칙 성립)에 해당된다.

이러한 안정동력학 균형해의 특성을 2개 노드와 3개 링크를 갖는 간단한 네트워크에서 확인한다. [그림 4-1]에서 노드 1과 노드 2를 연결하는 링크를 위에서부터 링크 1, 링크 2, 링크 3이라고 하자.



[그림 4-1] 안정동력학 균형해의 특성을 확인하기 위한 예제 네트워크

이제 기종점(1, 2)의 통행수요가  $d$ 라고 하자. 여기서는 하나의 기종점간 통행수요만 있는 경우이다. 그러면 [그림 4-1]의 네트워크에 대한 문제 (4-1)은 아래와 같이 문제 (4-3)이 된다.

$$\text{Maximize } dT - (2t_1 + 2t_2 + 2t_3) \quad (4-3a)$$

$$\text{subject to } t_1 \geq T, t_2 \geq T, t_3 \geq T, \quad (4-3b)$$

$$t_1 \geq 5, t_2 \geq 10, t_3 \geq 15 \quad (4-3c)$$

문제 (4-3)에 대한 최적해는 통행수요  $d$ 에 따라 <표 4-1>과 같이 결정된다.

<표 4-1> 통행수요에 따른 문제 (4-3) 최적해

최적해 \ 수요	$0 < d \leq 2$	$2 < d \leq 4$	$4 < d \leq 6$
최적 링크 통행시간	$t_1 = 5,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 10,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 15,$ $t_2 = 15,$ $t_3 = 15$
최단 경로 통행시간	$T = 5$	$T = 10$	$T = 15$

참고)  $\bar{t}_1 = 5, \bar{t}_2 = 10, \bar{t}_3 = 15.$

[그림 4-1]의 네트워크에 대한 문제 (4-3)의 쌍대 최대흐름 모형은 아래와 같이 문제 (4-4)가 된다.

$$\text{Minimize } 5f_1 + 10f_2 + 15f_3 \quad (4-4a)$$

$$\text{subject to } f_1 \leq 2, f_2 \leq 2, f_3 \leq 2, \quad (4-4b)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = d, -f_1 - f_2 - f_3 = -d, \quad (4-4c)$$

$$f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \geq 0 \quad (4-4d)$$

문제 (4-4)에 대한 최적해는 통행수요  $d$ 에 따라 <표 4-2>과 같이 결정된다.

<표 4-2> 통행수요에 따른 문제 (4-4) 최적해 ([그림 4-1] 네트워크 적용)

최적해 \ 수요	$0 < d \leq 2$	$2 < d \leq 4$	$4 < d \leq 6$
최적 링크흐름	$f_1 = d,$ $f_2 = 0,$ $f_3 = 0$	$f_1 = 2,$ $f_2 = d - 2,$ $f_3 = 0$	$f_1 = 2,$ $f_2 = 2,$ $f_3 = d - 4$
최적 목적함수값 전체 통행시간합	$5(d)$	$5(2) +$ $10(d - 2)$	$5(2) + 10(2)$ $+ 15(d - 4)$

참고)  $\bar{t}_1 = 5, \bar{t}_2 = 10, \bar{t}_3 = 15; \bar{f}_1 = 2, \bar{f}_2 = 2, \bar{f}_3 = 2.$

안정동력학 모형의 특성은 안정동력학 균형해의



통행량은 시스템최적에 해당되고, 균형해의 링크통행시간은 이용자균형에 해당되는 Wardrop 제 1원칙을 만족시킨다는 점이다. 이러한 안정동력학 균형해의 특성은 최선통행료 결정에 중요한 근거가 된다. 즉, 어떻게 혼잡통행료를 결정하더라도 안정동력학 균형해로부터 얻어지는 통행배정을 그대로 유지하여야 한다는 것이다. 그러면 각 링크의 최선통행료는 0원인가? 그렇지 않다. 안정동력학 모형에서는 <표 4-1> 및 <표 4-2>에서 보는 바와 같이 동일한 링크통행량에 대해서도 링크통행시간은 달리 결정될 수 있다. 이는 링크통행시간이 해당 링크통행량에 의해 결정되지 않고 네트워크 전체를 포함하는 모형인 문제 (4-1)에 의해 결정되기 때문이다.

4.2 안정동력학 모형에서의 통행료 효과

안정동력학 모형에서 통행료 효과를 파악하기 위해 ‘링크비효용’을 링크통행시간에 링크통행료를 더한 값으로 정의한다. 여기서 링크통행료는 시간으로 환산된 값이라고 가정한다. 즉 링크  $j$ 의 혼잡통행료를  $\pi_j$ 라고 놓는다. 그리고  $\pi \in R^{|E|}$ 는 그 벡터 표현이다. 이제 통행시간으로 표현된 문제 (4-1) 대신 비효용으로 표현된 문제 (4-5)를 고려한다. 이 문제에서 의사결정변수는  $t$ 와  $T_k (k \in K)$ 이고 통행료  $\pi$ 는 파라미터이다.

$$\text{Maximize } \langle d, T \rangle - \langle \bar{f}, t \rangle \tag{4-5a}$$

$$\text{subject to } \langle B_p^k, t + \pi \rangle \geq T_k, \tag{4-5b}$$

$$p \in P^k, k \in K, \tag{4-5b}$$

$$t \geq \bar{t}. \tag{4-5c}$$

[정리 4-2] 문제 (4-5)의 최적해  $t^e$  및  $T_k^e (k \in K)$ 는 경로 비효용에 대해 Wardrop 제 1원칙이 성립된다.

(증명) 주어진 파라미터  $\pi$ 에 대해서 다음의 문제 (4-6)을 고려한다.

$$\text{Maximize } \langle d, T \rangle - \langle \bar{f}, t + \pi \rangle \tag{4-6a}$$

$$\text{subject to } \langle B_p^k, t + \pi \rangle \geq T_k, \tag{4-6b}$$

$$p \in P^k, k \in K, \tag{4-6b}$$

$$t + \pi \geq \bar{t} + \pi. \tag{4-6c}$$

이제  $\tau = t + \pi$ 라고 놓으면 문제 (4-6)은 문제 (4-7)과 동일한 문제이다. 문제 (4-7)은 링크통행시간  $t$  대신에 (링크통행시간+링크통행료)에 해당되는 링크비효용  $\tau$ 에 의해 표현된 안정동력학의 최대흐름 모형이다.

$$\text{Maximize } \langle d, T \rangle - \langle \bar{f}, \tau \rangle \tag{4-7a}$$

$$\text{subject to } \langle B_p^k, \tau \rangle \geq T_k, \tag{4-7b}$$

$$p \in P^k, k \in K, \tag{4-7b}$$

$$\tau \geq \bar{\tau}. \tag{4-7c}$$

여기서  $\bar{\tau} = \bar{t} + \pi$ 이다. 따라서 참고문헌[14]의 정리 8로부터 문제 (4-7)의 해  $\tau^e = t^e + \pi$  및  $T_k^e (k \in K)$ 와  $f^e = \bar{f} - s^e$ 는 링크비효용에 대해 안정동력학 모형의 균형해가 된다. 즉 Wardrop 제 1원칙이 만족된다. 여기서  $s^e$ 는 제약식 (4-7c)의 최적쌍대승수이다. 한편 문제 (4-6)의 목적함수에서  $\langle \bar{f}, \pi \rangle$ 는 상수이므로 목적함수 (4-6a)는 문제 (4-5)의 목적함수 (4-5a)로 대체할 수 있기 때문에 문제 (4-6)과 문제 (4-5)는 동일한 해를 갖게 된다. 따라서 문제 (4-7)의 최적해  $t^e$  및  $T_k^e (k \in K)$ 는 문제 (4-5)의 최적해가 되며, 이는 경로 비효용에 대해 Wardrop 제 1원칙이 성립된다. (증명끝)

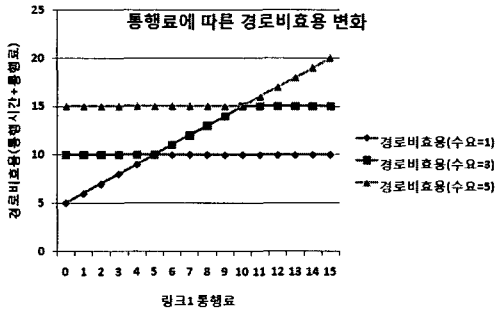
이제 안정동력학 모형에서의 통행료 효과를 [그림 4-1]의 네트워크에 적용하여 본다. 문제 (4-8)은 [그림 4-1]의 네트워크에 적용된 문제 (4-5)이다. 여기서는 링크 1의 통행료만 고려하고 링크 2, 링크 3의 통행료는 없는 것으로 가정한다. 즉  $\pi_2 = \pi_3 = 0$ 이다.

$$\text{Maximize } dT - (2t_1 + 2t_2 + 2t_3) \tag{4-8a}$$

$$\text{subject to } t_1 + \pi_1 \geq T, t_2 \geq T, t_3 \geq T, \tag{4-8b}$$

$$t_1 \geq 5, t_2 \geq 10, t_3 \geq 15 \tag{4-8c}$$

통행수요가 각각 1, 3, 5의 세 경우에 대해 링크 1의 통행료  $\pi_1$ 을 변화시켜가면서 문제 (4-8)의 최적해를 구한다. [그림 4-2]는 링크 1의 통행료  $\pi_1$ 의 변화에 따른 경로비효용의 변화를 보여준다.



[그림 4-2] 통행료에 따른 경로비효용 변화(통행수요가 1, 3, 5인 경우)

[그림 4-1] 네트워크의 세 링크의 링크용량이 모두 2이기 때문에 통행수요가 1인 경우는 하나의 링크만 선택되어 통행수요가 배정된다. 이때 링크1의 통행료가 0에서 5까지 증가될 때 경로선택의 변화는 없고 경로비효용(통행시간+통행료)이 5에서 10까지 증가한다. 그러나 통행료가 5이상 될 때는 링크 1 대신 링크 2가 선택되기 때문에 경로비효용은 10을 유지하게 된다.

통행수요가 3인 경우는 2개의 링크가 선택되어진다. 링크 1의 통행료가 0에서 5까지 증가될 때 경로선택의 변화는 없고 경로비효용(통행시간+통행료)은 링크 1 및 링크 2 모두 10으로 유지된다. 그러나 통행료가 5이상 10까지 증가하면 링크 1의 경로비효용이 증가되므로 링크 1 및 링크 2의 경로비효용은 통행료 증가에 따라 15까지 증가하게 된다. 그러나 통행료가 10 이상이 되면, 링크 1 대신에 링크 2와 링크 3가 선택되어 링크비효용은 15로 일정하게 유지된다.

통행수요가 5인 경우는 3개의 링크가 모두 선택되어진다. 링크 1의 통행료가 0에서 10까지 증가될 때 경로비효용(통행시간+통행료)은 링크 1, 링크 2 및 링크 3 모두 15로 유지된다. 그러나 링크1의 통행료

가 10이상으로 증가하면 이에 따라 링크 1의 경로비효용이 증가되므로 링크 1, 링크 2 및 링크 3의 경로비효용은 통행료 증가에 따라 모두 증가하게 된다.

다음 표는 통행수요별 문제 (4-8)에서 안정동력학 모형의 균형 통행배정이 그대로 유지되는 통행료 범위를 정리한 것이다.

<표 4-3> 안정동력학 모형에서 통행수요별 균형 통행배정이 유지되는 통행료  $\pi_1$ 의 범위

통행 수요	$d=1$	$d=3$	$d=5$
균형 통행량이 유지되는 통행료 $\pi_1$ 범위	$\pi_1 \leq 5$	$\pi_1 \leq 10$	$\pi_1 < \infty$
균형 통행량이 유지되는 최대통행료일 때의 경로비효용	$T^* = 10$	$T^* = 15$	-

참고)  $\bar{t}_1 = 5, \bar{t}_2 = 10, \bar{t}_3 = 15$ ;  $\bar{f}_1 = 2, \bar{f}_2 = 2, \bar{f}_3 = 2$ .

### 4.3 안정동력학 모형에서의 최선통행료 및 차선통행료 결정

제 4.1절에서 언급한 바와 같이 안정동력학 모형의 특성은 안정동력학 균형해의 링크통행량은 시스템최적 통행량에 해당되고, 균형해의 링크통행시간은 이용자균형에 해당되는 Wardrop 제 1원칙을 만족시킨다는 점이다. 또한 전절에서 본 바와 같이 통행료를 부과하면 경로통행시간과 경로통행료의 합에 해당되는 경로비효용에 대해 Wardrop 제 1원칙을 만족되도록 통행량이 배정되는 것을 보았다.

이제 안정동력학 모형에서 최선통행료를 결정하고자 한다. 최선통행료라는 용어는 이용자균형 모형에서 시스템최적이 아닌 통행배정에 대해 통행료를 부과함으로써 시스템최적 통행배정이 유도되기 때문에 붙여진 것이었다. 그러나 안정동력학 모형에서는 통행료 없이 얻어진 모형의 통행배정이 이미 시스템최적이므로 최선통행료란 용어의 의미는 없고, 이미 얻어진 시스템최적의 통행배정이 유지되는 통행료 범위가 의미를 갖는다. 전절의 통행료의 효과에 대한 <표 4-3>에서 보는 바와 같이 통행료가 어느 범위에 있을 때 시스템최적 통행량에 변화

가 없는 것을 확인할 수 있다. 즉 시스템최적이 유지되었다.

따라서 안정동력학 모형에서의 최선통행료는 이 용자균형 모형에서의 의미처럼 최선이 아닌 통행배정을 최선의 통행배정으로 유도하기 위한 통행료 부과가 아니고, 통행료가 없는 안정동력학 모형에서 이미 도달된 최선의 통행배정이 유지되는 통행료의 범위가 어떻게 되는가를 의미한다. 정리 4-3은 이를 나타낸 것이다.

[정리 4-3] 문제 (4-1)의 최적해가  $t^*$  및  $T_k^*(k \in K)$

일 때, 통행료  $\pi$ 가  $0 \leq \pi \leq t^* - \bar{t}$  이면  $t^e = t^* - \pi$  및  $T_k^*(k \in K)$ 는 문제 (4-5)의 최적해가 되며, 문제 (4-1)로부터 얻어지는 최적 링크통행량  $f^* = \bar{f} - s^*$ 도 문제 (4-5)에 대응되는 최적 링크통행량이 된다. 여기서  $s^*$ 는 제약식 (4-1c)의 최적쌍대승수이다. 역으로 문제 (4-5)의 최적해를  $t^e$  및  $T_k^*(k \in K)$ 라고 하면, 문제 (4-1)의 최적해는  $t^* = t^e + \pi$  및  $T_k^*(k \in K)$ 이 되며, 각각 대응되는 최적 링크통행량은 변화 없이 유지된다.

(증명) 증명을 다음과 같이 세 부분을 나눈다.

- (i) 문제 (4-1)의 최적해  $t^*$  및  $T^*$ 가  $0 \leq \pi \leq t^* - \bar{t}$  이면  $t^e = t^* - \pi$  및  $T^*$ 는 문제 (4-5)의 최적해가 되는 것 증명
- (ii) 문제 (4-1)로부터 얻어지는 최적 링크통행량  $f^* = \bar{f} - s^*$ 이 문제 (4-5)에 대응되는 최적 링크통행량이 됨을 증명
- (iii) 역으로 문제 (4-5)의 최적해가  $t^e$  및  $T^*$ 이면  $t^* = t^e + \pi$  및  $T^*$ 가 문제 (4-1)의 최적해가 되며, 각각 대응되는 최적 링크통행량은 같음을 증명

(i) 먼저  $t^e = t^* - \pi$  및  $T_k^*(k \in K)$ 가 문제 (4-5)의 가능해가 됨을 다음의 두 식이 보여준다. 식 (4-9)에서 부등식은  $t^*$  및  $T^*$ 가 문제 (4-1)의 최적해, 즉

가능해이기 때문이고, 식 (4-10)은 정리의 가정으로부터 성립된다.

$$\langle B_p^k, t^e + \pi \rangle = \langle B_p^k, t^* \rangle \geq T_k^*, \quad (4-9)$$

$$p \in P^k, k \in K,$$

$$t^e = t^* - \pi \geq \bar{t} \quad (4-10)$$

이제  $t^e = t^* - \pi$  및  $T^*$ 가 문제 (4-5)의 최적해임을 증명한다. 이를 위해 문제 (4-5)의 최적해를  $t'$  및  $T'$ 라고 가정한다. 그러면  $(t' + \pi)$  및  $T'$ 는 문제 (4-1)의 가능해가 된다. 따라서  $t^*$  및  $T^*$ 가 문제 (4-1)의 최적해라는 것으로부터

$$\begin{aligned} \langle d, T^* \rangle - \langle \bar{f}, t^* \rangle &\geq \\ \langle d, T' \rangle - \langle \bar{f}, t' + \pi \rangle &\end{aligned} \quad (4-11)$$

이 되며 이를 다시 정리하면 다음의 식 (4-12)를 얻는다.  $t'$  및  $T'$ 가 최대화 문제 (4-5)의 최적해라고 했으므로 식 (4-12)가 등식으로 성립될 수밖에 없고  $t^e = t^* - \pi$  및  $T^*$ 는 문제 (4-5)의 최적해가 된다.

$$\begin{aligned} \langle d, T^* \rangle - \langle \bar{f}, t^* - \pi \rangle &\geq \\ \langle d, T' \rangle - \langle \bar{f}, t' \rangle &\end{aligned} \quad (4-12)$$

(ii) 문제 (4-5)의 제약식 (4-5c)의 최적쌍대승수와 문제 (4-1)의 제약식 (4-1c)의 최적쌍대승수가 같음을 보이고자 한다. 그러면 문제 (4-1)에서 얻어지는 최적 링크통행량  $f^* = \bar{f} - s^*$ 은 문제 (4-5)에 대응되는 최적 링크통행량이 된다. 이를 위해  $\tau = t + \pi$  및  $\bar{\tau} = \bar{t} + \pi$ 라고 놓으면 문제 (4-5)는 아래의 문제 (4-13)와 동치 문제가 된다. 제약식은 동일하고 다만 목적함수에 있어서 상수값인  $\langle \bar{f}, \pi \rangle$  차이가 나지만 동일한 최적해와 동일한 최적쌍대승수를 제공하게 된다.

$$\text{Maximize } \langle d, T \rangle - \langle \bar{f}, \tau \rangle \quad (4-13a)$$

$$\text{subject to } \langle B_p^k, \tau \rangle \geq T_k, p \in P^k, k \in K, \quad (4-13b)$$

$$\tau \geq \bar{\tau}. \quad (4-13c)$$

따라서, 최적해에서 제약식 (4-5c)의 최적쌍대승수는 문제 (4-13c)의 최적쌍대승수와 같다. 또한 문제 (4-13)은 문제 (4-1)과 동일한 형태이다. 다만 문제 (4-1)의 최적쌍대승수는 KKT 조건식에서 제약식 (4-13c)에 해당되는  $\tau - \bar{\tau} \geq 0$ 에 대응되는데  $\tau - \bar{\tau} = t - \bar{t}$ 이므로  $t - \bar{t} \geq 0$ 인 제약식 (4-1c)와 동일하다. 따라서 문제 (4-5)의 제약식 (4-5c)의 최적쌍대승수와 문제 (4-1)의 제약식 (4-1c)의 최적쌍대승수는 같게 된다.

(iii) (i)의 증명 및 (ii)의 증명이 대응되는 문제의 동치로부터 유도되었기 때문에 반대방향으로 (i) 및 (ii)의 증명을 적용하면 된다. 이는 생략한다.

(증명끝)

정리 4-3에 의해 시스템최적이 유지되면서 비효율에 대한 Wardrop 제 1원칙이 성립되는 링크  $j$ 의 최선통행료  $\pi_j$ 는 모든 링크에 대해 아래 범위 조건을 만족하면 된다.

$$0 \leq \pi_j \leq t_j^* - \bar{t}_j, j \in E \tag{4-14}$$

그러면 이때의 링크통행시간  $t_j^*$ 는 아래 식과 같이 된다.

$$t_j^* = t_j^* - \pi_j \tag{4-15}$$

안정동력학 모형에서는 일부 링크에 대해서만 통행료를 부과하는 차선통행료 정책은 최선통행료 정책과 구별되지 않는다. 왜냐하면 정리 4-3로부터 얻은 식 (4-14)의 범위조건이 링크별로 주어지므로 이미 차선통행료를 포함하고 있기 때문이다.

안정동력학 모형에서의 최선통행료 범위를 [그림 4-1]의 네트워크에 적용하여 보고자 한다. 문제 (4-16)은 [그림 4-1]의 네트워크에 적용된 문제 (4-5)이다.

$$\text{Maximize } dT - (2t_1 + 2t_2 + 2t_3) \tag{4-16a}$$

$$\text{subject to } t_1 + \pi_1 \geq T, t_2 + \pi_2 \geq T,$$

$$t_3 + \pi_3 \geq T, \tag{4-16b}$$

<표 4-4> 통행료와 통행수요에 따른 문제 (4-16) 최적해 및 최선통행료 범위 만족 여부

통행료	통행수요		(1)	(2)	(3)	식 (4-14) 최선통행료 범위조건
	최적해		$0 < d \leq 2$	$2 < d \leq 4$	$4 < d \leq 6$	
$\pi_1 = 0,$ $\pi_2 = 0,$ $\pi_3 = 0$	링크통행시간		$t_1 = 5,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 10,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 15,$ $t_2 = 15,$ $t_3 = 15$	통행수요 (1) (2) (3) 모두만족
	경로통행시간		$T = 5$	$T = 10$	$T = 15$	
$\pi_1 = 1,$ $\pi_2 = 0,$ $\pi_3 = 0$	링크통행시간		$t_1 = 5,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 9,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 14,$ $t_2 = 15,$ $t_3 = 15$	통행수요 (2) (3) 경우만 만족
	경로비효율		$T = 6$	$T = 10$	$T = 15$	
$\pi_1 = 2,$ $\pi_2 = 1,$ $\pi_3 = 0$	링크통행시간		$t_1 = 5,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 9,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 13,$ $t_2 = 14,$ $t_3 = 15$	통행수요 (3) 경우만 만족
	경로비효율		$T = 7$	$T = 11$	$T = 15$	
$\pi_1 = 3,$ $\pi_2 = 2,$ $\pi_3 = 1$	링크통행시간		$t_1 = 5,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 9,$ $t_2 = 10,$ $t_3 = 15$	$t_1 = 13,$ $t_2 = 14,$ $t_3 = 15$	모든 경우 만족 않음
	경로비효율		$T = 8$	$T = 12$	$T = 16$	

참고)  $\bar{t}_1 = 5, \bar{t}_2 = 10, \bar{t}_3 = 15; \bar{f}_1 = 2, \bar{f}_2 = 2, \bar{f}_3 = 2.$

$$t_1 \geq 5, t_2 \geq 10, t_3 \geq 15 \quad (4-16c)$$

문제 (4-16)에 대한 최적해는 링크통행료  $\pi$ 에 따라 <표 4-4>와 같이 결정된다.

이용자균형 모형에서는 최선통행료 및 차선통행료 정책이 시스템균형 또는 보다 효율적인 통행배정으로 유도하기 위함이라고 한다면, 이미 시스템균형을 이루고 있는 안정동력학 모형에서 최선통행료 및 차선통행료 정책이 갖는 의미는 무엇인가? 첫째는 경제적 목적으로 통행료를 부과할 때, 현재의 효율적인 통행배정을 유지하기 위한 통행료 범위를 제공한다는 것이고, 둘째는 브라이스 링크처럼 비효율적인 링크가 포함되어 있는 경우 통행료 부과로 비효율적인 링크를 피하는 효율적인 통행배정으로 유도할 수 있다는 것이다. 이에 대한 네트워크 적용 예는 제 5장에서 본다.

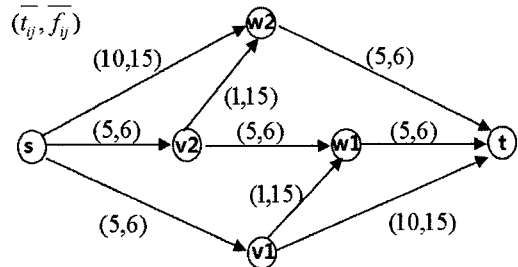
#### 4.4 안정동력학 모형에서의 선택모형 및 시간 가치

이용자균형 모형에서는 링크통행시간이 링크 통행량에 의해 결정되고, 최적 링크통행량은 모형에 의해 결정된다. 그러나 안정동력학 모형에서는 링크통행량과 링크통행시간이 모두 모형에 의해 결정된다. 따라서 안정동력학 모형에서의 선택모형은 이용자균형 모형과는 다른 접근방식으로 전개되어야 할 것으로 생각된다. 아직 안정동력학 모형에서 선택모형에 대한 연구는 알려져 있지 않고 있으며 이에 대해서는 추후연구로 남긴다. 다만 이용자 균형모형에서 개인별로 시간가치(VOT)에 의해 통행료를 시간으로 환산하였던 것처럼 안정동력학 모형에서도 개인별 시간가치가 다르기 때문에 주어진 링크통행료에 대한 시간 환산이 다를 수밖에 없다. 즉 통행자  $i$ 의 VOT가  $v_i$ 이고 링크통행료가  $\pi_j$ 라고 한다면, 통행자  $i$ 의 링크  $j$ 에 대한 링크비효용 및 경로  $k$ 에 대한 경로비효용  $\Gamma_k(i)$ 은 식 (4-17)이 됨을 알 수 있다. 아래 식에서  $\delta_{jk}$ 는 링크  $j$ 가 경로  $k$ 에 포함되면 1, 아니면 0인 값이다.

$$\tau_j(i) = t_j + \frac{\pi_j}{v_i} \quad \text{및} \quad \Gamma_k(i) = \sum_{\text{링크 } j} \delta_{jk} \tau_j(i) \quad (4-17)$$

### 5. 네트워크 적용 예

간단한 예지만 [그림 4-1]의 네트워크에서 혼잡 링크에서의 통행료 부과가 어떤 영향을 주는지 보았다. 이제 다소 복잡한 네트워크에 대해 비효율적인 링크를 포함한 경우 통행료부과의 영향을 보고자 한다. [그림 5-1]은 노드가 6개, 링크가 9개인 네트워크이다. 여기서 링크  $(v1, w1)$ 과  $(v2, w2)$ 는 비효율적인 브라이스 링크이다[16]. 이제 이 두 링크에 통행료를 부과할 때 안정동력학 모형의 최적 통행배정의 변화를 보고자 한다. 단일 기종점 s-t를 가정하고, 통행수요 15를 가정한다.



[그림 5-1] 브라이스 링크가 2개 포함된 네트워크

링크의 순서를  $(s-v1), (s-v2), (s-w2), (v1-w1), (v2-w1), (v2-w2), (v1-t), (w1-t), (w2-t)$ 로 정하면, 최대 링크통행량  $\bar{f}$ , 최소 링크통행량  $\bar{t}$ 와 문제 (4-1) 및 문제 (4-2)의 최적해  $t^*, T^*$  및  $f^*$ 는 아래와 같다.

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t^* = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 10 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad T^* = 23, \quad f^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

만약 링크  $(v1, w1)$ 과 링크  $(v2, w2)$ 가 없다면, 즉

통행할 수 없는 링크라면 문제 (4-1) 및 문제 (4-2)의 최적해는 아래와 같다.

$$t^* = \bar{t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, T^* = 15, f^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

즉 목적지까지의 경로통행시간이 23에서 15로 단축됨을 알 수 있다. 링크(v1, w1)과 링크(v2, w2)가 없을 때의 경로통행시간이 이들 링크를 추가할 때보다 더 나쁜 결과를 얻게 되는데 이와 같은 현상을 브라이스 역설이라고 하고, 이러한 결과를 주는 비효율적인 링크들을 브라이스 링크라고 한다. 안정동력학 모형에서의 브라이스 역설과 이를 발견하는 방법에 대해서 참고문헌 [16]을 참조할 수 있다.

이제 이 두 링크에 대해 각각 통행료를  $\pi_1, \pi_2$  만큼 부과한다고 할 때 기종점간 경로통행시간이 어떻게 변화하는지를 아래 표에서 정리하였다. <표 5-1>에서 보는 바와 같이 통행료가 없을 때 경로통행시간이 23이던 것이 두 링크의 통행료가 모두 4

이상일 때 경로통행시간이 15가 되어 비효율적인 브라이스 링크가 없었을 때와 같은 상황이 됨을 알 수 있다. 이와 같이 안정동력학 모형에서 통행료의 효과는 최선통행료의 개념보다 비효율적인 브라이스 링크의 사용을 회피하도록 하는 효과가 있음을 알 수 있다.

### 6. 결론 및 추후연구

본 연구에서는 이용자균형 모형에서의 최선통행료 및 차선통행료가 안정동력학 모형에서는 어떻게 표현되는가에 대해 살펴보았다. 먼저 안정동력학 모형의 균형해는 링크통행량으로 보면 시스템균형에 해당되고 링크통행시간으로 보면 Wardrop 제1원칙이 성립됨을 보였다. 따라서 이용자균형 모형에서와 같이 이용자균형의 통행배정을 시스템균형의 통행배정으로 유도하기 위한 최선 통행료 개념과 일부 링크에 대해서 통행료를 부과하여 시스템의 효율을 향상시키는 차선통행료 개념은 안정동력학 모형에서는 성립되지 않는다.

다만 안정동력학 모형에서는 시스템균형이 유지되는 통행료 범위가 의미가 있으며, 이러한 범위가 어떻게 결정되는지 본 연구에서 제시하였다. 또한

<표 5-1> 링크(v1, w1) 및 링크(v2, w2)의 통행료 변화에 따른 경로통행시간 변화추이

경로통행시간 $T^*$		링크(v1-w1) 통행료 $\pi_1$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
링크 (v2-w2) 통행료 $\pi_2$	0	23	22	21	20	19	19	19	19	19	19	19
	1	22	21	20	19	18	18	18	18	18	18	18
	2	21	20	19	18	17	17	17	17	17	17	17
	3	20	19	18	17	16	16	16	16	16	16	16
	4	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15
	5	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15
	6	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15
	7	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15
	8	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15
	9	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15
	10	19	18	17	16	15	15	15	15	15	15	15

제시된 통행료 범위는 링크별로 주어지므로 안정동력학 모형에서의 차선통행료 정책은 해당 링크에 대한 통행료 범위만을 주목하면 된다. 안정동력학 모형에서 통행료 효과의 하나로서 비효율적인 브라이스 링크에 통행료를 부과함으로써 비효율성을 제거할 수 있음을 보였다. 이는 노드가 6개, 링크가 9개인 네트워크를 통해 실제 네트워크 적용 예를 보였다.

이용자균형 모형에서 선택모형은 보통 확률모형으로 표현되고 개인의 시간가치와 연관된다. 여기에는 logit 모형과 probit 모형의 2가지가 있음을 제 2.2절에서 언급하였다. 링크통행시간이 링크통행량 함수에 의해 결정되는 이용자균형 모형과는 달리 안정동력학 모형에서는 링크통행량과 링크통행시간이 모두 모형에 의해 결정된다. 따라서 안정동력학 모형에서의 선택모형은 이용자균형 모형과는 전혀 다른 접근방식이 요구되며 이에 대해서는 추후연구로 남긴다.

## 참고 문헌

- [1] 권용석, 박창호, “통행료체계에서의 경로기반 통행배정모형 개발”, 『대한교통학회지』, 제18권, 제6호(2000), pp.77-88.
- [2] 김병관, 임용택, 임강원, “민감도 분석을 이용한 혼잡통행료 산정 모형 개발”, 『대한교통학회지』, 제22권, 제5호(2004), pp.139-149.
- [3] 문용주, “일반균형에서 최적 혼잡통행료”, 『대한교통학회지』, 제18권, 제2호(2000), pp.91-101.
- [4] 박구현, “교통망에서 다차종 통행을 고려하는 통행배정모형 수립”, 『한국경영과학회지』, 제32권, 제3호(2007), pp.63-80.
- [5] 박구현, “안정동력학에 의한 가변수요 통행배정 모형”, 『한국경영과학회지』, 제34권, 제1호(2009), pp.61-83.
- [6] 임용택, 김병관, “혼잡통행료 산정모형의 개발 및 계층간 형평성 연구”, 『대한교통학회지』, 제25권, 제5호(2007), pp.183-193.
- [7] 황기연, 김익기, 이우철, “교통수요관리 정책의 효과분석을 위한 다항로짓 모형의 적용”, 『대한교통학회지』, 제16권, 제4호(1998), pp.53-63.
- [8] Daganzo, C.F. and Y. Sheffi, “On stochastic models of traffic assignment,” *Transportation Science*, Vol.11, No.3(1977), pp.253-274.
- [9] Dial, R.B., “A model and algorithm for multicriteria route-mode choice,” *Transportation Research B*, Vol.13(1979), pp.311-316.
- [10] Leurent, F., “Cost versus time equilibrium over a network,” *European Journal of Operational Research*, Vol.71, No.2(1993), pp.205-221.
- [11] Hensher, D.A. and T.P. Truong, “Valuation of travel savings,” *Journal of Transport Economics and Policy*, (1985), pp.237-260.
- [12] Gabriel, S.A. and D. Bernstein, “The traffic equilibrium problem with nonadditive path costs,” *Transportation Science*, Vol.31(1997), pp.337-348.
- [13] Larsson, T., P.O. Lindberg, M. Patriksson, and C. Rydergren, “On traffic equilibrium models with a nonlinear time/money relation,” Chapter 2 of *Transportation Planning, Applied Optimization*, Vol.64(2002), pp.19-31.
- [14] Nesterov, Y. and A. de Palma, “Stationary dynamic solutions in congested transportation networks : Summary and perspectives,” *Networks and Spatial Economics*, Vol.3(2003), pp.371-395.
- [15] Nesterov, Y. and A. de Palma, “Park and ride for the day period and morning-evening commute,” *Mathematical and Computational Models for Congestion Charging, Applied Optimization 101*, Springer US, (2006), pp.143-157.
- [16] Park, K., “Detecting Braess paradox based on stable dynamics in general congested tran-

- sportation networks," *Networks and Spatial Economics*, (2009), doi : 10.1007/s11067-009-9101-3.
- [17] Sheffi, Y., *Urban Transportation Networks : Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, (1985), New Jersey.
- [18] Yang, H. and H.-J. Huang, "Principle of marginal-cost pricing : How does it work in a general road network?," *Transportation Research A*, Vol.32, No.1(1998), pp.45-54.
- [19] Yang, H. and H.-J. Huang, *Mathematical and Economic Theory of Road Pricing*, Elsevier, Amsterdam, 2005.