

가중 합치도 H_ω 와 κ 의 새로운 역설

권나영¹ · 김진곤² · 박용규³

¹가톨릭대학교 의학통계학과, ²가톨릭대학교 의학통계학과, ³가톨릭대학교 의학통계학과

(2009년 8월 접수, 2009년 9월 채택)

요약

두 평정자가 R 개의 순서형 반응 범주로 각 개체를 분류한 $R \times R$ 분할표에 대해, 불합치의 정도를 가중치로 부여한 가중 합치도 H_ω 를 제안하고, 최대 우도추정량 및 분산을 유도하였다. 또한 2×2 분할표에서 Feinstein과 Cicchetti (1990)가 제기한 마지막 역설을 새롭게 정의하고 증명하였으며, κ 의 새로운 역설을 제기하고, κ 와 주변분포의 전반적인 관계를 정리하였다.

주요용어: 순서형 반응 범주, 합치도, 주변분포, κ 의 역설.

1. 서론

두 평정자가 독립적으로 n 개의 동일한 개체를 R 개의 범주로 분류한 경우, 평정자 사이의 합치의 정도를 나타내는 가장 직관적인 척도는 두 평정자 모두 동일한 범주로 분류한 개체들의 비율인 관찰된 합치 비율(p_o)이다. 그러나 두 평정자가 개체들을 우연히 같은 범주로 분류할 경우를 고려해야하므로, 합치도는 관찰된 합치 비율과 완벽한 합치 비율 각각에서 우연에 의해 기대되는 합치 비율(p_e)을 빼 값들의 비로 정의되며, 식 (1.1)과 같다.

$$\frac{p_o - p_e}{1 - p_e} \quad (1.1)$$

지금까지 알려진 여러 합치도들은 p_e 를 어떻게 정의하느냐에 따라 달리 제안된 것이다. 즉, Scott (1955)의 π 는 두 평정자가 주어진 범주에 같은 확률로 개체를 분류할 것이라는 가정하에서 p_e 를 정의하였고, Cohen (1960)의 κ 는 대응하는 주변 확률의 곱을 이용하여 p_e 를 정의하였으며, Holley와 Guilford (1964)의 G 는 p_e 에 관한 추정값으로 분류 범주의 역수 $1/R$ 을 사용하였다. 또한, Gwet (2001)의 AC_1 은 두 평정자가 개체를 무작위로 분류함으로써 평정자 내의 불확실성으로 인해 발생하는 평가 비율과 그 때의 합치 비율의 곱을 이용하여 p_e 를 정의하였다.

명목형 반응 범주를 위한 합치도들은 두 평정자가 개체를 같은 범주로 분류하면 합치, 그렇지 않으면 모두 불합치로 간주하여 계산한 것이다. 그러나 순서형 반응 범주로 분류한 경우에는 두 평정자가 선택한 범주간의 거리에 따라 불합치의 정도를 달리 표현한다. 예를 들어, 정신과 진단의 신뢰성 평가에서 신경증, 인격 장애 그리고 정신병 3가지의 범주가 있다면, 신경증과 정신병 사이의 진단 불합치를 신경증과 인격 장애 사이의 진단 불합치보다 더 심각하다고 생각할 것이다 (Cohen, 1968). 범주 간의 거리에 따른 가중 합치도는 이러한 불합치의 정도를 가중치로 부여하여 구한 합치도를 말한다.

³교신저자: (137-701) 서울시 서초구 반포4동, 가톨릭대학교 의학통계학과, 교수.

E-mail: ygpark@catholic.ac.kr

표 2.1. n 개의 개체를 두 평정자가 순서형 반응 범주로 분류한 결과

평정자 A	평정자 B					합계
	1	...	j	...	R	
1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1R}	n_{1+}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{iR}	n_{i+}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R	n_{R1}	...	n_{Rj}	...	n_{RR}	n_{R+}
합계	n_{+1}	...	n_{+j}	...	n_{+R}	n

Feinstein과 Cicchetti (1990)는 2×2 분할표에서 κ 가 주변분포에 매우 민감하다는 점을 두 가지 역설로 표현하였다. 이러한 κ 의 문제점을 보완하기 위해 박미희와 박용규 (2007)는 2×2 분할표에서의 새로운 합치도 H 를 제안하였고, 김진곤 등 (2009)은 명목형 반응 범주를 가진 $R \times R$ 분할표로 일반화하였다. 본 연구에서는 R 개의 순서형 반응 범주를 가진 분할표를 대상으로 불합치의 정도에 가중치를 부여한 가중 합치도 H_ω 를 제시한다. 또한, Feinstein과 Cicchetti (1990)는 주변분포가 κ 에 미치는 영향을 대칭 주변분포를 위주로 설명하였고, κ 의 마지막 역설을 증명하지 않았다. 따라서 본 연구에서는 κ 의 마지막 역설을 증명하고, 비대칭 주변분포를 중심으로 κ 의 성질을 규명하여, κ 와 주변분포와의 전반적인 관계를 제시하고자 한다.

2절에서는 순서형 반응 범주를 가진 $R \times R$ 분할표에서 가중 합치도 H_ω 와 최대우도추정량, 점근적 대표본 분산을 유도하며, 3절에서는 예제를 통해 기존의 가중 합치도들과 새로운 가중 합치도 H_ω 를 비교한다. 4절에서는 비대칭 주변분포를 가진 2×2 분할표에서의 주변분포와 κ 의 관계를 설명하고, κ 의 새로운 역설을 제시한다. 끝으로 본 연구의 결과 및 의의에 대하여 정리한다.

2. 가중 합치도 H_ω

2.1. $R \times R$ 분할표와 가중치

두 평정자 A와 B가 전체 N 개의 모집단에서 랜덤으로 추출된 n 개의 개체를 각각 독립적으로 $R(R > 2)$ 개의 가능한 순서형 반응 범주 중 하나로 분류한 결과는 표 2.1과 같은 $R \times R$ 분할표로 제시된다.

표 2.1에서 n_{ij} 는 평정자 A와 B가 각각 범주 i 와 j 로 분류한 개체 수이고, 주변합 n_{i+} 는 평정자 A가 범주 i 로 분류한 모든 개체 수들의 합을, 주변합 n_{+j} 는 평정자 B가 범주 j 로 분류한 모든 개체 수들의 합을 각각 나타낸다. 이를 확률로 표현하면 다음과 같다.

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad p_{i+} = \frac{n_{i+}}{n}, \quad p_{+j} = \frac{n_{+j}}{n}. \tag{2.1}$$

관찰된 가중 합치 비율 $p_{o,\omega}$ 는 식 (2.2)와 같다.

$$p_{o,\omega} = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} p_{ij}. \tag{2.2}$$

여기에서 가중치 $\omega_{ij}(i, j = 1, \dots, R)$ 는 일반적으로 다음 성질을 만족하도록 정해준다.

- (i) 모든 불합치는 최대의 가중치보다 작은 가중을 준다. ($0 \leq \omega_{ij} < 1$ for $i \neq j$)

- (ii) 완벽한 합치는 최대의 가중을 준다. ($\omega_{ii} = 1$)
- (iii) 가중치들은 두 평정자에 대해 대칭적으로 부여된다. ($\omega_{ij} = \omega_{ji}$)

주로 사용되는 가중치는 다음과 같다.

- (i) $\omega_{ij} = |i - j|$ (Agresti, 2002),
- (ii) $\omega_{ij} = (i - j)^2$ (Cohen, 1968),
- (iii) $\omega_{ij} = 1 - \frac{|i - j|}{k - 1}$ (Cicchetti와 Allison, 1971),
- (iv) $\omega_{ij} = 1 - \frac{(i - j)^2}{k - 1}$ (Fleiss와 Cohen, 1973).

그 외에도 Kendall과 Stuart (1963)의 3가지의 산포 척도(범위, 분산, 평균차)로 정의된 가중치와 Conger (1980)의 모든 가능한 평가 추이의 합으로 정의된 가중치 등 여러 종류가 있다.

우연에 의해 기대되는 가중 합치 비율 $p_{e,\omega}$ 가 보정된 가중 합치도는 식 (2.3)과 같다.

$$\frac{p_{o,\omega} - p_{e,\omega}}{1 - p_{e,\omega}} \tag{2.3}$$

2.2. 가중 합치도 H_ω

대부분의 합치도는 주변분포가 균형적일 때 가장 안정되고 좋은 추정량을 가지며, Feinstein과 Cicchetti (1990)가 제기한 κ 에 대한 두 가지 역설은 주변분포의 불균형과 비대칭에서 비롯된 것이다. 박미희와 박용규 (2007)는 주변분포의 비대칭과 불균형을 보정하기 위해 조화 평균을 사용하여 우연에 의해 기대되는 합치 비율을 추정하여 합치도 H 를 얻었다.

가중 합치도 H_ω 도 먼저, 비대칭성을 보정하기 위해 각 범주의 두 평정자의 산술 평균 비율 $P_i (i = 1, \dots, R)$ 를 다음과 같이 구한다.

$$P_i = \frac{p_{i+} + p_{+i}}{2} \tag{2.4}$$

균형성을 유지하기 위해서는 개체가 각 범주에 같은 비율로 분류되었다는 조건이 필요하므로 각 범주의 평균 비율 P_i 의 조화 평균을 사용하여 (Ferber, 1931), 식 (2.5)와 같은 보정된 주변 확률을 구한다.

$$\frac{R}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_R}} \tag{2.5}$$

또한 각 주변 확률의 곱에 가중치를 줌으로써 가중치가 결합된 우연에 기대되는 합치 비율 $p_{e,\omega}(H)$ 을 구하면 식 (2.6)과 같다.

$$\begin{aligned} p_{e,\omega}(H) &= \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} \left(\frac{R}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_R}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{R}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_R}} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} \end{aligned} \tag{2.6}$$

표 3.1. 3 × 3 분할표에서 κ 의 첫 번째 역설의 예제

(a) 대칭적 균형 주변분포					(b) 대칭적 불균형 주변분포				
평정자 A	평정자 B			합계	평정자 A	평정자 B			합계
	1	2	3			1	2	3	
1	30	2	2	34	1	85	1	2	88
2	1	29	1	31	2	3	3	1	7
3	2	2	31	35	3	2	1	2	5
합계	33	33	34	100	합계	90	5	5	100

이를 식 (2.3)에 대입하면 식 (2.7)과 같은 가중 합치도 H_ω 를 얻는다.

$$H_\omega = \frac{p_{o,\omega} - p_{e,\omega}(H)}{1 - p_{e,\omega}(H)}. \quad (2.7)$$

여기서 모든 불합치의 가중치를 똑같이 준다면 즉, $\omega_{ij} = 0(i \neq j)$ 이라면, 가중 합치도 H_ω 는 기존의 합치도 H 와 동일하다.

2.3. 가중 합치도의 최대우도추정량과 분산

가중 합치도의 최대우도추정량을 구하기 위해서 p_{ij} 의 최대우도추정량 $\hat{p}_{ij} = n_{ij}/n$ 를 식 (2.2)의 $p_{o,\omega}$ 에, 식 (2.6)의 $p_{e,\omega}(H)$ 에 각각 대입한 후 이를 식 (2.7)에 대입하면 식 (2.8)과 같다.

$$\hat{H}_\omega = \frac{4n \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} n_{ij} - \left\{ R / \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{n_{i+}} + \frac{1}{n_{+i}} \right) \right\}^2 \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij}}{4n^2 - \left\{ R / \left(\sum_{i=1}^R \frac{1}{n_{i+}} + \frac{1}{n_{+i}} \right) \right\}^2 \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij}}. \quad (2.8)$$

또한 단순 무작위 표본추출에 따른 가중 합치도 H_ω 의 점근적 대표본 분산의 유도는 부록에 제시하였으며, 식 (2.9)와 같다.

$$\text{Var}(H_\omega) = \frac{1}{n-1} \frac{p_{o,\omega}(1-p_{o,\omega}) - \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij}(1-\omega_{ij})p_{ij}}{(1-p_{e,\omega}(H))^2}. \quad (2.9)$$

분산의 최대우도추정량도 \hat{H}_ω 를 구하는 방법과 같이 p_{ij} 의 최대우도추정량을 식 (2.9)에 대입하여 구할 수 있다.

3. 예제와 가중 합치도의 성질

3.1. κ 의 역설에 관한 3 × 3 분할표에서 예제

Feinstein과 Cicchetti (1990)가 명목형 반응범주를 가진 2 × 2 분할표에서 제기한 κ 의 두 가지 역설을 순서형 반응범주를 가진 3 × 3 분할표에 접목한 예제를 표 3.1과 3.2에 제시하였다. 여기서 $p_{o,\omega}$ 값과 $p_{e,\omega}$ 값을 구하기 위해서 Fleiss와 Cohen의 가중치를 사용하였다.

표 3.1은 κ 의 첫 번째 역설에 관한 예제로, 이 역설은 $p_{o,\omega}$ 값이 (a)와 (b)에서 모두 0.945로 동일하지만, 대칭적 균형 주변분포보다 대칭적 불균형 주변분포의 $p_{e,\omega}$ 값이 크게 나타나 더 작은 κ_ω 값을 갖는 것이다.

표 3.2. 3×3 분할표에서 κ 의 두 번째 역설의 예제

(a) 대칭적 불균형 주변분포					(b) 비대칭적 불균형 주변분포				
평정자 A	평정자 B			합계	평정자 A	평정자 B			합계
	1	2	3			1	2	3	
1	42	20	1	63	1	17	32	1	50
2	16	12	1	29	2	2	24	3	29
3	1	1	6	8	3	1	1	19	21
합계	59	33	8	100	합계	20	57	23	100

(c) 완전한 대칭적 불균형 주변분포					(d) 불완전한 대칭적 불균형 주변분포				
평정자 A	평정자 B			합계	평정자 A	평정자 B			합계
	1	2	3			1	2	3	
1	75	7	2	84	1	62	5	1	68
2	7	4	1	12	2	8	10	2	20
3	2	1	1	4	3	3	1	8	12
합계	84	12	4	100	합계	73	16	11	100

표 3.3. 여러 가지 가중 합치도들의 $p_{e,w}$

합치도	가중치이 결합된 우연에 기대되는 합치비율
Scott의 π_w	$\sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} P_i P_j$
Holley와 Guilford의 G_w	$\sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} \frac{1}{R^2}$
Cohen의 κ_w	$\sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} p_{i+p+j}$
Gwet의 $AC1_w$	$\frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} P_i (1 - P_j)$

다음으로 표 3.2의 (a)와 (b)는 κ 의 두 번째 역설인 동일한 $p_{o,w}$ 값 0.885를 갖더라도 대칭적 불균형 주변분포는 비대칭적 불균형 주변분포보다 더 작은 κ_w 값을 그리고 (c)와 (d)는 모두 $p_{o,w}$ 값이 0.92로 같지만 완전한 대칭적 불균형 주변분포는 불완전한 대칭적 불균형 주변분포보다 더 작은 κ_w 값을 갖는다는 것을 나타낸 예제이다.

3.2. 가중 합치도 간의 비교

기존의 합치도들의 우연에 의해 기대되는 합치 비율에 가중치 ω_{ij} 를 결합함으로써 여러 가지 가중 합치도들을 정의할 수 있고, 이는 표 3.3과 같다. 여기서 Scott의 π_w 와 Gwet의 $AC1_w$ 의 P_i 는 식 (2.4)에 정의된 값이다.

표 3.4에는 표 3.1과 3.2의 예제 자료로부터 계산된 $p_{o,w}$ 값, 각각의 $p_{e,w}$ 값 그리고 기존 가중 합치도 값과 H_w 값을 제시하였다. 또한 순서형 반응 범주 자료에서 적용되는 Kendall과 Smith (1939)의 일치도 계수 W 값도 제시하였다.

표 3.1과 3.2에서 전반적으로 높은 $p_{o,w}$ 값을 보임에도 불구하고 π_w 와 κ_w 의 값은 작게 나타났고, 반면에 $AC1_w$ 과 H_w 의 값은 $p_{o,w}$ 값에 가깝게 나타난 것을 알 수 있다. G_w 의 경우에는 항상 동일한 $p_{e,w}$ 값을 사

표 3.4. 예제에서의 $p_{o,\omega}$ 의 값, $p_{e,\omega}$ 의 값과 합치도 값

표	$p_{o,\omega}$	$p_{e,\omega}$					합치도					
		π_ω	G_ω	κ_ω	$AC1_\omega$	H_ω	π_ω	G_ω	κ_ω	$AC1_\omega$	H_ω	W
3.2 (a)	0.945	0.66	0.67	0.66	0.67	0.67	0.84	0.84	0.84	0.84	0.84	0.82
(b)	0.945	0.88		0.88	0.46	0.04	0.53		0.53	0.53	0.90	0.94
3.3 (a)	0.885	0.80	0.67	0.80	0.59	0.18	0.44	0.66	0.44	0.72	0.86	0.49
(b)	0.885	0.72		0.71	0.67	0.57	0.58		0.60	0.65	0.73	0.68
(c)	0.92	0.88	0.67	0.88	0.48	0.05	0.33	0.76	0.33	0.85	0.92	0.27
(d)	0.92	0.76		0.76	0.56	0.22	0.66		0.66	0.82	0.90	0.52

표 4.1. κ 의 마지막 역설의 예제

(a) 완전한 대칭적 불균형 주변분포				(b) 불완전한 대칭적 불균형 주변분포			
평정자 A	평정자 B		합계	평정자 A	평정자 B		합계
	1	2			1	2	
1	85	5	90	1	70	10	80
2	5	5	10	2	0	20	20
합계	90	10	100	합계	70	30	100

$p_o = 0.90, p_e = 0.82, \kappa = 0.44$ $p_o = 0.90, p_e = 0.62, \kappa = 0.74$

용하므로, $p_{o,\omega}$ 값이 같으면 주변분포에 관계없이 동일한 값이 된다. 표 3.1의 (a)와 같이 주변분포가 균형적일 때를 제외하고는, W 의 값도 대체적으로 π_ω 와 κ_ω 의 값과 같이 $p_{o,\omega}$ 값에 가깝게 추정되지 못하는 현상을 보이는 것을 알 수 있다.

표 3.1의 (a)와 같이 주변분포가 균형적일 때, 모든 합치도들의 값은 0.84로 동일하다. 그러나 (b)와 같이 주변분포가 불균형적일 때에는 다른 합치도들의 비해 $AC1_\omega$ 와 H_ω 의 값이 $p_{o,\omega}$ 값에 가깝게 추정된다. 즉, 표 3.1의 (a)와 (b)의 결과에서 보듯이 주변분포가 균형이나 불균형이냐에 따라 π_ω 와 κ_ω 는 많은 영향을 받지만 $AC1_\omega$ 와 H_ω 는 거의 영향을 받지 않는 것을 알 수 있다.

표 3.2의 (a)와 (b)의 결과에서 π_ω 와 κ_ω 의 값은 대칭적 불균형 주변분포일 때가 비대칭적 불균형 주변분포일 때보다 작게 나타났고, (c)와 (d)의 결과에서도 π_ω 와 κ_ω 의 값이 완전한 대칭적 불균형 주변분포일 때가 불완전한 대칭적 불균형 주변분포일 때보다 작게 나타남으로써 κ 의 두 번째 역설을 잘 보이고 있다. 그러나 $AC1_\omega$ 와 H_ω 는 주변분포에 영향을 거의 받지 않는, 관찰된 가중 합치 비율에 가까운 값을 제공한다.

4. κ 의 또 다른 역설

4.1. 완전한, 불완전한 대칭 불균형 주변분포에 대한 역설

Feinstein과 Cicchetti (1990)가 제기한 ‘완전한 대칭 불균형 주변분포가 불완전한 대칭 불균형 주변분포보다 κ 값이 작다’는 마지막 역설의 예는 표 4.1과 같고, 그들은 이 역설에 대한 증명을 보이지 않았다. 그러나 두 평정자의 평균 불균형 정도는, 표 4.1의 (a)는 90:10, (b)는 75:25로, (a)의 주변분포가 (b)의 주변분포보다 더 불균형이므로, 이 예는 첫 번째 역설에 해당하는 것으로 간주되어야 한다. 따라서 Feinstein과 Cicchetti (1990)의 마지막 역설은 불균형 정도가 동일한 주변분포에서 완전한 대칭과 불완전한 대칭 간을 비교하는, 표 4.2와 같은 예제로 설명되어야 한다.

표 4.2는 (a)와 (b) 모두 동일한 $p_o (= 0.8)$ 와 동일한 두 평정자의 평균 불균형 정도(70:30)를 갖지만, (a)의 p_e 값이 0.58로 (b)의 0.56보다 크게 나타나, (a)의 κ 값 0.52는 (b)의 0.55보다 더 작게 나타난다.

표 4.2. κ 의 마지막 역설의 새로운 예제

(a) 완전한 대칭적 불균형 주변분포

평정자 A	평정자 B		합계
	1	2	
1	60	10	70
2	10	20	30
합계	70	30	100

$p_o = 0.80, p_e = 0.58, \kappa = 0.52$

(b) 불완전한 대칭적 불균형 주변분포

평정자 A	평정자 B		합계
	1	2	
1	60	20	80
2	0	20	20
합계	60	40	100

$p_o = 0.80, p_e = 0.56, \kappa = 0.55$

κ 의 마지막 역설과 주변분포와의 관계를 증명하기 위해, $n_{1+} = v_1n, n_{2+} = v_2n, n_{+1} = w_1n, n_{+2} = w_2n$ 이라 두면, $n_{1+} + n_{2+} = n_{+1} + n_{+2} = n$ 이므로 $v_2 = 1 - v_1$ 이고 $w_2 = 1 - w_1$ 이 된다. 여기서 v_1, v_2, w_1, w_2 의 값은 모두 0에서 1사이의 값을 가지며, 이 값들이 0.5에서 떨어진 정도로 불균형을 나타낼 수 있다. 이를 이용하여 표현한 κ 의 우연에 의한 기대 합치 비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 p_e(\kappa) &= \left(\frac{n_{1+}}{n}\right)\left(\frac{n_{+1}}{n}\right) + \left(\frac{n_{2+}}{n}\right)\left(\frac{n_{+2}}{n}\right) \quad (4.1) \\
 &= \frac{v_1w_1n^2 + v_2w_2n^2}{n^2} \\
 &= v_1w_1 + v_2w_2 \\
 &= v_1w_1 + (1 - v_1)(1 - w_1).
 \end{aligned}$$

또한 $v_1 = 0.5 + v'_1, v_2 = 0.5 + v'_2, w_1 = 0.5 + w'_1, w_2 = 0.5 + w'_2 (v'_1 + v'_2 = w'_1 + w'_2 = 0)$ 로 두면, 식 (4.1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 p_e &= (0.5 + v'_1)(0.5 + w'_1) + (0.5 + v'_2)(0.5 + w'_2) \quad (4.2) \\
 &= (0.5 + v'_1)(0.5 + w'_1) + (0.5 - v'_1)(0.5 - w'_1) \\
 &= 0.5 + 2v'_1w'_1.
 \end{aligned}$$

식 (4.2)에서 v'_1 과 w'_1 은 주변분포가 불균형이고 대칭일 경우 동일한 부호를 가지며, 완전 대칭이면 $v'_1 = w'_1$, 불완전 대칭이면 $v'_1 \neq w'_1$ 가 된다. 또한 불균형의 정도가 같다는 것은 완전 대칭과 불완전 대칭 모두에서 $(v'_1 + w'_1)/2$ 가 동일하다는 것을 의미한다. 식 (4.2)에서

$$2v'_1w'_1 = \frac{(v'_1 + w'_1)^2 - (v'_1 - w'_1)^2}{2}$$

로 표현할 수 있고, 위 식에서 $(v'_1 + w'_1)^2$ 은 불균형의 정도가 같다면 완전 대칭과 불완전 대칭에서 동일한 값을 갖고, $(v'_1 - w'_1)^2$ 은 완전 대칭이면 0, 불완전 대칭이면 양의 값을 가져, p_e 가 불완전 대칭일 때 더 작은 값을 갖는다. 따라서 κ 값이 완전 대칭 불균형 보다 불완전 대칭 불균형일 때 더 크게 나타난다.

4.2. κ 의 새로운 역설

그림 4.1은 두 평정자의 주변분포가 모두 비대칭이지만, (b)가 (a)에 비해 상대적으로 더 심한 불균형을 보이고 있다. 따라서 (b)가 (a)보다 더 높은 불합치를 보이고, 합치도 역시 더 낮은 값이 되리라 예상된다.

이에 대한 예제 자료는 표 4.3과 같다. (a)와 (b)의 p_o 값은 0.60으로 동일하지만, p_e 값이 (a)는 0.50으로 (b)의 0.42보다 크므로, (a)의 κ 값이 0.20으로 (b)의 0.30보다 작게 나타나, 예상과는 달리 비대칭적 불균형분포보다 비대칭적 균형분포의 κ 값이 더 작게 된다는 새로운 역설을 발견하게 된다.

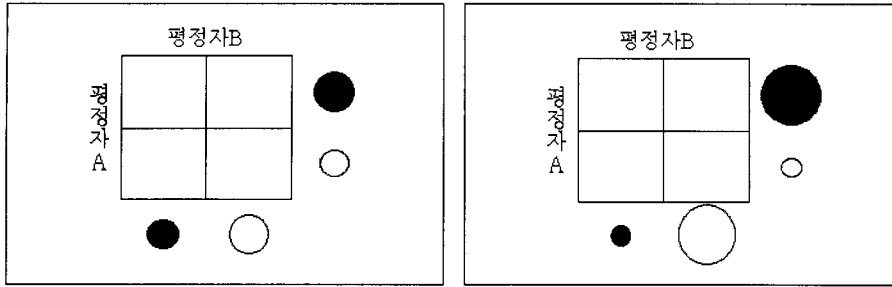


그림 4.1. 새로운 역설의 주변분포의 형태

표 4.3. κ 의 새로운 역설의 예제

(a) 비대칭적 균형 주변분포

평정자 A	평정자 B		합계
	1	2	
1	31	23	54
2	17	29	46
합계	48	52	100

$p_o = 0.60, p_e = 0.50, \kappa = 0.20$

(b) 비대칭적 불균형 주변분포

평정자 A	평정자 B		합계
	1	2	
1	31	39	70
2	1	29	30
합계	32	68	100

$p_o = 0.60, p_e = 0.42, \kappa = 0.30$

주변분포가 불균형이고 비대칭일 때는 v'_1 와 w'_1 는 서로 다른 부호를 가지므로, 식 (4.2)의 $v'_1 w'_1$ 는 음의 값을 갖는다. 따라서 두 평정자의 주변분포가 균형에 가까울수록, 즉 $v'_1 w'_1$ 값이 0에 더 가까운 비대칭적 균형 주변분포가 비대칭적 불균형 주변분포보다 더 큰 p_e 를 갖고, 더 작은 κ 값을 가지게 된다.

4.3. 그 밖의 비대칭적 주변분포와 κ 의 관계

그림 4.2의 (a)와 (b)는 모두 주변분포가 불균형을 이루고 그 정도가 같지만, (a)의 경우는 완전한 비대칭을, (b)는 불완전한 비대칭을 보이고 있다.

이에 대한 예제를 표 4.4에 제시하였다. (a)의 불합치에 대한 주변분포는 $v_1 = w_2 = 0.70$ ($v_2 = w_1 = 0.30$)으로 동일하지만, (b)는 $v_1 = 0.80, w_2 = 0.60$ ($v_2 = 0.20, w_1 = 0.40$)로 동일하지 않고, 불합치 범주의 주변분포에 대한 불균형의 정도는 70:30으로 (a)와 (b) 모두 동일하다. 그러나 표 4.4의 (a)와 (b)는 모두 동일한 p_o 값 (= 0.6)을 가졌지만, (a)의 p_e 값이 0.42로 (b)의 0.44보다 작고, κ 값은 (a)가 0.31로 (b)의 0.29보다 크게 나타난다.

식 (4.2)의 $2v'_1 w'_1$ 는 비대칭 불균형 주변분포일 경우 음의 값을 가지며, $w'_1 + w'_2 = 0$ 이므로 $-2v'_1 w'_2$ 로 표현된다. 또한 불합치 범주에 대한 불균형 정도가 같다는 것은, $(v'_1 + w'_2)/2$ 값이 완전한 비대칭과 불완전한 비대칭 불균형 주변분포에서 동일하다는 것을 의미하므로, 다음의 관계가 성립한다.

$$-2v'_1 w'_2 = \frac{(v'_1 - w'_2)^2 - (v'_1 + w'_2)^2}{2}$$

여기서 $(v'_1 + w'_2)^2$ 는 완전한 비대칭과 불완전한 비대칭 불균형 주변분포에서 동일하고, $(v'_1 - w'_2)^2$ 는 완전한 비대칭의 경우 0이 되고, 불완전한 비대칭인 경우에는 양의 값이 되므로, 불완전한 비대칭 불균형 주변분포가 완전한 비대칭 불균형 주변분포보다 p_e 값이 더 크고, 더 작은 κ 값을 갖는다.

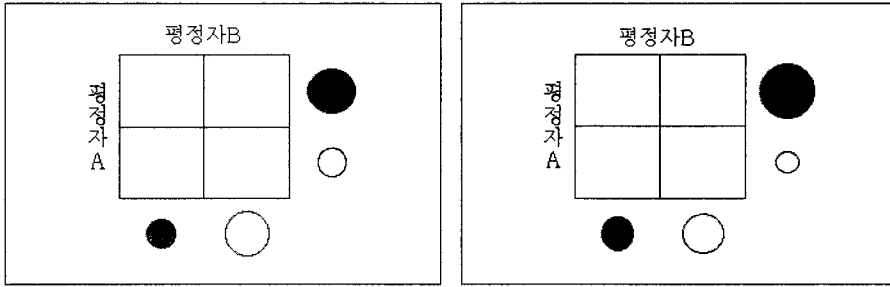


그림 4.2. 그 밖의 주변분포와 κ 의 관계

표 4.4. 그 밖의 비대칭적 주변분포와 κ 의 관계 예제

(a) 완전한 비대칭적 불균형 주변분포

평정자 A	평정자 B		합계
	1	2	
1	30	40	70
2	0	30	30
합계	30	70	100

$p_o = 0.60, p_e = 0.42, \kappa = 0.31$

(b) 불완전한 비대칭적 불균형 주변분포

평정자 A	평정자 B		합계
	1	2	
1	40	40	80
2	0	20	20
합계	40	60	100

$p_o = 0.60, p_e = 0.44, \kappa = 0.29$

5. 결론

본 연구에서는 먼저 κ 의 역설을 해결하기 위해 제안된 합치도 H 로부터, R 개의 순서형 반응 범주를 가질 때의 가중 합치도 H_ω 와 최우도추정량 및 분산을 유도하고, 예제를 이용한 기존의 합치도들과 비교를 통해, H_ω 가 주변분포에 상대적으로 덜 민감한 합치도라는 것을 확인하였다.

또한, Feinstein과 Cicchetti (1990)가 제기한 κ 의 마지막 역설을 새롭게 정의하고, 주변분포와의 관계를 증명하였으며, 주변분포와 κ 간의 전반적인 관계를 보이기 위해 비대칭적 주변분포를 중심으로 κ 의 변화를 살펴보았다. 먼저 비대칭적 주변분포에서는 대칭적 주변분포와는 반대로 동일한 p_o 값을 가짐에도 불구하고, 주변분포가 균형적일수록 κ 값이 작아진다는 새로운 역설을 제기하였고, 불완전 비대칭일 때가 완전 비대칭일 때보다 κ 값이 작게 나타나는 것을 확인하였다. 2×2 분할표에서 제기한 κ 의 새로운 역설과 주변분포와의 관계는, 김진근 등 (2009)이 사용한 방법을 응용하면, 명목형 $m \times m$ 분할표에서도 쉽게 증명할 수 있다. 주변분포의 형태와 κ 의 관계는 그림 5.1로 요약된다.

부록

가중 합치도 H_ω 의 분산은 식 (A.1)과 같다.

$$\text{Var}(H_\omega) = \text{Var} \left[\frac{p_{o,\omega} - p_{e,\omega}(H_\omega)}{1 - p_{e,\omega}(H_\omega)} \right] = \frac{\text{Var}(p_{o,\omega})}{\{1 - p_{e,\omega}(H_\omega)\}^2}. \tag{A.1}$$

두 반응 범주 i 와 j 에 있는 k 번째 개체에 대하여

$$t_{k,ij} = \begin{cases} 1, & \text{평정자 A와 B가 각각 } k\text{번째 개체를 범주 } i\text{와 } j\text{에 분류한 경우,} \\ 0, & \text{그렇지 않은 경우} \end{cases}$$

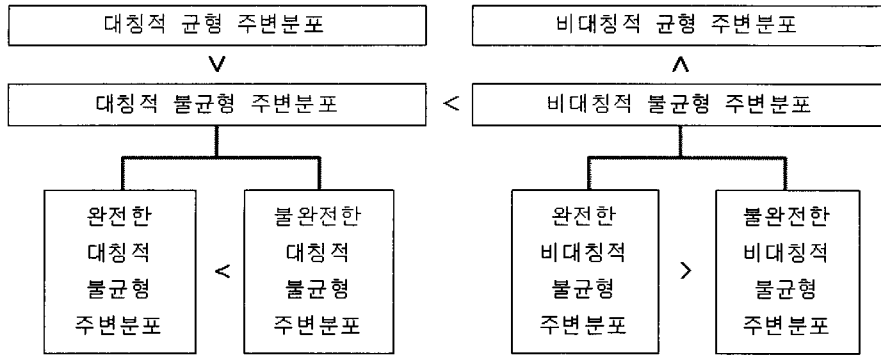


그림 5.1. 주변분포의 형태와 κ 의 대소 관계

로 정의하면, 식 (2.2)의 $p_{o,\omega}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$p_{o,\omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} \left(\sum_{k=1}^n t_{k,ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k = \bar{\eta}, \quad \eta_k = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} t_{k,ij}.$$

여기서 $p_{o,\omega} = \bar{\eta}$ 이므로,

$$\text{Var}(p_{o,\omega}) = \text{Var}(\bar{\eta}) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n \eta_k^2 - n\bar{\eta}^2 \right)$$

이고, $t_{k,ij}^2 = t_{k,ij} (k = 1, 2, \dots, n)$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n \eta_k^2 = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij}^2 n_{ij} = np_{o,\omega} - \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij} (1 - \omega_{ij}) n_{ij}$$

이다. 따라서 $p_{o,\omega}$ 의 분산은 다음과 같다.

$$\text{Var}(p_{o,\omega}) = \frac{1}{n-1} \left(p_{o,\omega}(1-p_{o,\omega}) - \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij}(1-\omega_{ij})p_{ij} \right). \tag{A.2}$$

식 (A.2)를 (A.1)에 대입하면 가중 합치도 H_ω 의 분산은 식 (A.3)과 같다.

$$\text{Var}(H_\omega) = \frac{1}{n-1} \frac{p_{o,\omega}(1-p_{o,\omega}) - \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \omega_{ij}(1-\omega_{ij})p_{ij}}{\{1 - p_{e,\omega}(H_\omega)\}^2}. \tag{A.3}$$

참고문헌

김진근, 박미희, 박용규 (2009). $m \times m$ 분할표에서의 합치도 H , <한국통계학회논문집>, **16**, 753-762.
 박미희, 박용규 (2007). COHEN의 합치도의 두 가지 역설을 해결하기 위한 새로운 합치도의 제안, <응용통계연구>, **20**, 117-132.
 Agresti, A. (2002). *Categorical data analysis*, Wiley, New York.

- Cicchetti, D. V. and Allison, T. (1971). A new procedure for assessing reliability of scoring EEG sleep recordings, *The American Journal of EEG Technology*, **11**, 101–109.
- Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales, *Educational and Psychological Measurement*, **20**, 37–46.
- Cohen, J. (1968). Weighted kappa: Nominal scale agreement with provision for scaled disagreement or partial credit, *Psychological Bulletin*, **70**, 213–220.
- Conger, A. J. (1980). Integration and generalization of kappa for multiple raters, *Psychological Bulletin*, **88**, 322–328.
- Feinstein, A. R. and Cicchetti, D. V. (1990). High agreement but low kappa: 1. The problems of two paradoxes, *Journal of Clinical Epidemiology*, **43**, 543–549.
- Ferger, W. F. (1931). The nature and use of the harmonic mean, *Journal of the American Statistical Association*, **26**, 36–40.
- Fleiss, J. L. and Cohen, J. (1973). The equivalence of weighted Kappa and the intraclass correlation coefficient as measures of reliability, *Educational and Psychological Measurement*, **33**, 613–619.
- Gwet, K. (2001). *Handbook of Inter-Rater Reliability*, STATAXIS Publishing Company, Gaithersburg.
- Holley, J. W. and Guilford, J. P. (1964). A note on the G index of agreement, *Educational and Psychological Measurement*, **24**, 749–753.
- Kendall, M. G. and Smith, B. B. (1939). The problem of m rankings, *The Annals of Mathematical Statistics*, **10**, 275–287.
- Kendall, M. G. and Stuart, A. (1963). *The Advanced Theory of Statistics*, Hafner, New York.
- Scott, W. A. (1955). Reliability of content analysis: The case of nominal scale coding, *Public Opinion Quarterly*, **19**, 321–325.

Weighted H_w and New Paradox of κ

Na-Young Kwon¹ · Jin-Gon Kim² · Yong-Gyu Park³

¹Department of Biostatistics, Catholic University

²Department of Biostatistics, Catholic University

³Department of Biostatistics, Catholic University

(Received August 2009; accepted September 2009)

Abstract

For ordinal categorical $R \times R$ tables, a weighted measure of association, H_w , was proposed and its maximum likelihood estimator and asymptotic variance were derived. We redefined the last paradox of κ and proved its relation to marginal distributions. We also introduced the new paradox of κ and summarized the general relationships between κ and marginal distributions.

Keywords: Ordinal categories, measure of agreement, marginal distributions, paradoxes of κ .

³Corresponding author: Professor, Department of Biostatistics, The Catholic University of Korea, Seoul 137-701, Korea. E-mail : ygpark@catholic.ac.kr