대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 4, 565-584. Nov 2009

思考口述法을 이용한 數學 英才의 思考 特性 研究[1)]

홍 진 곤* · 강 은 주**

본 연구의 목적은 수학 영재의 인지적 사고 과정 분석을 통해 수학적 사고 특성에 대하여 조망하는 분석틀을 제시하고 수학 영재의 사고 패턴을 구조화시키기 위한 것으로, 이를 위해 사고구술법을 통해 추출된 수학 영재의 사고 특성을 분석한다. 본 연구에서는 학생들의 사고 특성을 추출하는 분석틀과 문제 해결 단계 코드를 이용한 분석틀을 개발하였고, 수학 영재학생들이 문제 해결 과정 중 인지 활동으로 거치게 되는 절차와 사고 특성 지도를 살펴보고 대상 학생들이 여러 번의 시행착오 후 전체적인 과정을 수정하며 수행해 나가게 되는 방법과 문제의 최종적인 해결안을 도출해 내는 경로 탐색 과정을 종합적으로 살펴봄으로써, 수학 영재들의 수학적 사고 특성을 좀 더 과학적인 방법으로 분석하는 준거를 마련하였다.

I. 들어가는 글

고급 수학 두뇌의 양성을 위한 영재 교육에서 가장 중요한 두 가지 사항은 영재성의 정의와 영재의 판별 및 선발이다. 영재의 판별은 그 대상이 영재인지 아닌지를 판정하는 것이라기보다 타고난 잠재력을 계발시키는 것을 목적으로 하는 영재교육 프로그램을 받을 사람과 그렇지 않을 사람을 가려내는 작업이 되어야 한다(송상헌, 1998). 따라서 이와 같은 선발의 중요성에 덧붙여서 영재를 판별한 뒤에는 적합한 교육의 중요성에도 눈을 돌려야 한다. 어느 나라이건 영재의 판별에 힘을 쓰지만 국가의 자산 관리 차원에선 영재의 교육이 더 중요하다고도 볼 수 있다.

이와 같은 영재의 선발과 교육의 관점에서 적합성과 전문성을 확보하기 위해서는 영재들의 산출물뿐만 아닌 그들의 사고 과정을 지켜볼 필요가 있다. 영재의 특성은 어느 한 가지 특정한 능력이 독립적으로 나타나기보다는 여러 가지 능력이 통합적으로 나타난다. 한 문제를 해결하는 과정에서도 여러 가지 사고 특성이 보이고, 예측할 수 없는 창의적인 방법을 사용한 비정형적인 문제 해결의 경우 관찰자의 그릇된 판단으로 오류를 범한 것으로 파악되는 경우도 있다. 흔히 수학 영재성의 특징으로 사고과정의 단축성이나 발산적 사고 등을 들지만 이로 인한 영재들의 사고 과정을 추적하는 연구는 지속적인 관심 분야이었음에도 불구하고 관찰 분석에 따르는 여러 가지 어려움으로 인해 쉽게 이루어지지 않았다.

본 연구는 수학 영재가 문제 해결과정에서 드러내 보이는 사고와 행위, 그리고 그 산출물

* 건국대학교 수학교육과, jinkon.hong@gmail.com
** 건국대학교 수학교육과 대학원, 92rosa84@hanafos.com
1) 이 논문은 2009년도 건국대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임

에 대한 객관적이고 체계적인 분석을 통해, 수학 영재는 어떤 형식과 내용의 사고를 수행하여 문제를 해결해 내는지를 규명하는 것을 목적으로 한다. 또한 수학 영재의 판별과 교육을 위해서 영재들만의 고유한 사고 특성을 보다 종합적이고 과학적인 방법으로 분석하는 것을 제언하고자 한다. 이를 위해 수학 영재의 인지적 사고 분석을 통해 수학적 사고 특성에 대한 이론적 틀을 제시하고 수학 영재의 사고 패턴을 구조화시키는 것에 대해 고찰하며, 수학 영재의 문제 해결과정에서 수학 영재가 어떤 내용과 형식을 사고하고 문제 해결 절차가 어떤 영향으로 이루어지는지를 논리적이고 합리적인 방법으로 분석하고자 한다. 이러한 분석으로 효율적인 수학 영재 선발을 위한 방향설정이 가능하고, 인지적 접근 방식을 통해서 수학 영재 교육을 위한 현실적인 교육 방향을 제시할 수 있으리라 기대한다.

II. 수학영재의 사고과정 연구방법

1. 수학 영재의 사고 과정

가. 문제 해결 과정

문제 해결이란 알고리즘이 쉽게 나오지 않는 어려운 문제를 푸는 과정이라 할 수 있는데, 수학교육에서 다루는 수학적 문제란 다음과 같은 3가지 정보를 가지고 있다(노수영, 2004). (1)식이나 수학적 사실들과 같이 주어진 것(givens) (2)주어진 식이나 수학적 사실을 다른 식으로 전환하는 연산(operations) (3)마지막에 발견하려는 목표(terminal goal). 이러한 문제를 해결하는 과정을 설명한 이론은 여러 가지가 있으나 그 중 가장 널리 알려진 것은 수학적 문제해결의 사고과정을 (1)이해, (2)계획, (3)실행, (4)반성의 4단계로 나눈 Polya의 이론과, 이를 상세히 하여 문제해결에 필요한 발견술을 '문제의 분석과 이해', '해결을 위한 계획', '점진적으로 어려운 문제의 해 구하기', '풀이의 확인' 등으로 설명한 Schoenfeld의 이론이다.

문제 해결 과정과 관련하여 또한 잘 알려진 것이 Wallas(1926; 하현숙, 2002에서 재인용)의 창의적 문제 해결 과정 4단계설인데, 그는 창의적 사고가 (1)준비기, (2)부화기, (3)조명기, (4)검증기의 4단계의 사고 과정을 거친다고 주장하였다. 수학 문제 해결과정과 창의적 문제 해결 과정은 밀접한 관계가 있기에 수학자들과 과학자들은 각각의 문제 풀이 모형을 이와 같은 창의적 사고 과정 모형과 접목시키려는 시도를 하였는데 대표적인 것이 Rossman의 창의적 사고 이론이다(하현숙, 2002). 그는 Wallas의 4단계를 7단계로 확장하여, 문제 해결 과정을 (1)해결이 필요하거나 어려운 문제를 관찰하는 단계, (2)필요한 것을 분석하는 단계, (3)가능한 모든 정보를 탐색하는 단계, (4)모든 객관적 해결책을 형성하는 단계, (5)제안된 해결책의 장단점을 따져 가며 비판적으로 분석하는 단계, (6)새로운 아이디어를 창안하는 단계, (7)가장 유망한 해결책을 검증하고 지금까지의 전반적인 단계를 통해 최종적인 것을 선택하고 완벽하게 하는 단계로 설명하였다. 또 Osborn-Parnes의 '창의적 문제해결'에 의하면 문제해결 과정은 (1)혼란스러운 탐색, (2)자료 탐색, (3)문제 탐색, (4)아이디어 탐색, (5)해결책 탐색, (6)정당성 탐색의 6단계를 거친다.

이와 같은 선행연구를 종합하여 본 연구에서는 수학 창의적 문제해결 과정을 다음과 같은 6단계로 범주화하고 이와 같은 과정을 따라 사고 과정을 추적하고자 한다.

(1) **문제를 인식하는 단계:** 해결이 필요하거나 어려운 문제를 관찰하는 혼란 상태.

(2) **문제해결을 용이하게 하기 위한 준비 단계:** 필요한 것과 분석가능한 모든 정보를 탐색하는 단계.

(3) **정교화 되지 않은 아이디어를 산출하는 단계:** 모든 직관적인 해결책을 형성하는 단계.

(4) **아이디어를 평가하는 단계:** 제안된 해결책의 장단점을 따져 가면서 비판적으로 분석하고 잠정적인 가설을 도출하는 단계.

(5) **해결책을 산출하는 단계:** 새로운 아이디어를 창안하고 해법의 논리적인 골격을 형성하는 단계.

(6) **해결책을 실행하고 검증하는 단계:** 가장 유망한 해결책을 검증하고 지금까지의 전반적인 단계를 통해 최종적인 것을 선택하고 완벽하게 하는 단계.

나. 수학 영재의 사고 특성

남승인(1998)은 초등학교 수준의 수학 영재가 보이는 일반적인 특징으로 수학 영재는 전통적인 학습내용을 보다 빨리 숙달하며, 일반적 수준의 문제해결에서 적용되는 알고리즘을 빨리 일반화하고, 문제 해결 과정에서 중간단계를 생략하는 경향이 있으며 예상치 못한 방식으로 문제를 해결하는 경향이 있고 또한, 문제를 추상적으로 다루려는 경향과 능력을 가지고 있으며 규칙성과 관계를 발견하기를 즐기며 수학적인 추론 과정을 단축할 수 있고 문제 해결방법이 만족스럽지 않을 경우 그 대안을 빨리 찾는 경향이 있다고 하였다. 또한 김홍원(1996, 1997)은 수학영재의 수학적 능력으로 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 수학적 추론 능력, 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력을 들고 있으며, Krutetskii(1976)는 수학 영재의 특성으로 (1)형식화된 인식과 문제의 형식적인 구조의 이해, (2)양적이고 공간적 관계에 대한 논리적 사고와 기호를 이용한 사고 능력, (3)수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화, (3)정신적(암산) 과정의 유연성, (4)수학적 추론의 간략화와 단축된 구조를 이용한 사고 능력, (5)해의 명확성, 단순성, 경제성, 합리성 추구에 대한 노력, (6)수학적 추론의 가역성, (7)정신적(암산) 과정의 신속함과 자유로운 재구성, (8)수학적 관계, 특성, 주장, 증명, 해법 및 문제 해결의 원리에 대한 일반화 기억 등과 그 외에도 특별히 수학적 성향이 있음을 밝혔다. 본 연구에서는 이러한 선행 연구를 종합하여 다음과 같이 수학 영재의 사고특성을 7개의 항목으로 정리, 분류하였다.

(1) 문제에 대한 직관적, 구조적 통찰

직관은 문제해결 과정에서 분석·종합과 같은 논리적 추론 방법을 따르지 않고 문제에 주어진 정보나 조건만으로 문제해결의 단서나 해결방법 또는 그 결과를 즉각적으로 떠올릴 수 있는 사고를 의미한다. 선행 연구에서는 번뜩이는 통찰력의 경험(Wormald, 1998), 문제 해결에서의 통찰(Keating,1974), 새로운 자료의 빠른 파악, 자료를 체계화하는 능력(Greenes, 1981) 등으로 직관적, 구조적 통찰을 수학 영재의 사고 특성으로 다루고 있다.

(2) 정보처리 과정의 단축과 능숙함

수학 영재들은 수에 대한 관심, 감각과 빠른 계산 능력을 가지고 있다. 또한 수학적 대상, 관계, 연산에 대해 신속하게 정보를 처리할 수 있는 능력을 가지며, 사고의 속도와 능숙한 과정을 통하여 문제해결에서 새로운 방법이나 다양한 풀이전략을 사용한다. 뛰어난 정보 처리 속도(Stanley, 1984), 정신적(암산) 과정의 유연성, 수학적 추론의 가역성, 정신적(암산) 과정의 신속함과 자유로운 재구성(Krutetskii, 1976), 산출물이 없는 접근은 피하고 쉬운 접근으로 전환하는 특성(Sousa, 2003) 등은 여러 연구에서

수학 영재의 사고과정으로 설명하고 있다.

(3) 패턴의 일반화 및 귀납적 추론

귀납적 추론은 어떤 집합에서 몇 개의 원소에 대한 정보를 이용하여 그 집합의 다른 원소 또는 모든 원소에 대한 일반화를 형성하는 추론을 의미한다. 이는 수학적 패턴과 관계를 찾는 능력(Miller, 1990), 개념을 전이시키는 능력과 일반화시키는 능력(Greenes, 1981), 수학적 관계에 대한 일반화 능력(Feldhusen, Hoover & Sayler, 1990), 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화(Krutetskii, 1976), 패턴의 차이와 유사성을 쉽게 파악(Sousa, 2003)한다는 항목들과 연관을 맺는 수학 영재의 사고특성 범주이다.

(4) 시각적/ 도해적 추론

시각화는 전달하고자 하는 내용을 눈으로 인식 할 수 있는 모든 방법(문자 · 도형 · 그림 등)을 이용하여 나타내는 것이라 할 수 있으며(문광호, 1998), Zimmermann & Cunningham(1991)에 의하면 시각화는 시각적인 정보를 표현, 변형, 전달, 실증, 반성하는 것을 말한다. 시각화 능력은 그래프, 차트, 그림 등에 사용된 시각적 정보를 읽고 이해하고 해석하는 능력과 시각적으로 주어지지 않은 정보를 시각적으로 표현하거나 나타내는 시각적 처리 능력으로 구별된다. 片桐重男(1997)은 이러한 시각화 사고를 '수적인 대상이나 그 대상사이의 관계를 도형이나 도형 사이의 관계로 대체하려는 생각'인 도형화의 생각, '기호로 나타내려는 생각과 더불어, 기호화한 것을 바르게 해석하려는 생각, 또는 수학적 용어를 써서 간결 · 명확히 나타낸다거나 이것을 읽어내려는 생각'인 기호화의 생각, '표현의 기본 원리나 법칙에 따라 합당하게 나타내어 보려는 생각'인 표현의 생각 등으로 설명하고 있다. 여러 연구에서 수학 영재는 시각화하려는 특성이 있음을 지적하였는데, 주어진 도형을 생생하게 머릿속으로 상상하는 능력(Kolmogorov, 2004), 도표, 표, 그래프를 통하여 현재의 정보를 표현하기 좋아하는 것(Sousa, 2003) 등이 그러한 특성이라 할 수 있다.

(5) 논리적 사고 및 수학적 추상화

수학 영재들은 패턴과 사고의 추상화를 찾는 높은 능력과 시각적 추상화 관련 능력을 가지고 있으며 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고능력을 가지고 있다. 여러 연구에서 수학적 개념, 과정과 해를 언어적으로 잘 표현하는 능력 및 효과적인 추론 능력(Feldhusen, Hoover & Sayler, 1990), 양적이고 공간적 관계에 대한 논리적 사고와 기호를 이용한 사고 능력(Krutetskii, 1976), 대수적 조작을 수행하는 능력, 즉 복잡한 문자식을 변형하고, 일반적인 방법으로 접근하는 능력(Kolmogorov, 2004), 변수의 분리와 조절의 형식적 조작, 추상적 사고력(Keating,1974) 등을 영재의 사고 특성으로 다루고 있다.

(6) 발산적 사고 및 독창성

발산적 사고는 문제 해결의 목표가 해답의 산출에 있지 않고 다양하고 독창적인 아이디어를 제안하는 사고의 일종이다. 발산적 사고는 하나의 정답에 초점을 맞추는 생각으로 설명되는 수렴적 사고와 대조되며, 수렴적 사고는 대부분의 지능과 성취도 검사에서 측정되는 것이다. 수렴적 사고는 올바른 답을 산출하지만 발산적 사고는 흥미, 상상력, 가능성이 있는 창의적 사고를 산출한다. 융통성, 창의적 사고와 해를 사용하는 능력(Holton et al, 1994), 하나의 문제를 해결하기 위하여 다양한 방법을 찾는 능력(Feldhusen, Hoover & Sayler, 1990) 등은 수학 영재의 발산적 사고 특성과 관련된다.

(7) 방법을 중시하는 심미적인 경향성

영재들은 경제적으로 생각하며, 문제에 대한 가장 명료하고 논리적이고 바람직한 해법을 찾아내려는 욕구로 인해 처음 결과에 대해 전체

적으로 만족할 수 없는 경우 다른 풀잇법을 찾아낸다. 일반적인 학생들이 해법의 질에는 주의를 기울이지 않는데 비해 우아한 해를 찾아내려는 노력은 영재들만의 특성이다. 지루한 계산은 피하고 완전함을 추구하며(Wormald, 1998), 해의 명확성, 단순성, 경제성, 합리성을 추구하고(Krutetskii, 1976), 어려운 문제 해결을 좋아하며(Feldhusen, Hoover & Sayler, 1990), 수학적 추론을 간략화하고, 합리적이고 경제적인 해를 찾는 능력(NCTM Ed. House, 1987)등이 선행 연구에서 다룬 이와 관련한 능력이다.

2. 연구방법

가. 사고구술법과 프로토콜 분석법

연구 대상자의 문제해결 과정을 추적하여 특정한 사고의 발생을 관찰하기 위하여 많이 사용되고 높은 효율을 보이는 방법이 동시보고법인 사고 구술법(think-aloud method)이다. 사고구술법, 즉 '생각한 것을 입 밖으로 말하는 방법'이란 문제 해결 과정에 이용되는 전략 중의 하나로 과제 수행 시 순간순간 떠오르는 생각을 입으로 중얼거리며 자유롭게 말하는 것이다 (Newell & Simon, 1972). 이것은 문제 해결 과정에서 진행 중인 생각을 그대로 언어로 표현함으로써 관찰 불가능한 사고의 과정을 엿볼 수 있다는 장점을 가지고 있다.

언어 프로토콜 중 연구 대상자가 과제를 해결하는 동안에 소리 내어 말한 것을 그대로 녹음한 것을 구어 프로토콜이라 하고, 이것을 글로 옮겨 적은 것을 문어 프로토콜이라고 한다. 연구 대상자는 과제를 해결하는 동안에 마음속에 떠오르는 어떠한 생각이라도 계속해서 말해야 하며 연구자들이 이 프로토콜을 자료로서 분석한다. 이는 구두자료를 수집하는 다른 기법들과는 다르게, 질문도 없고, 유발을 위해서 재촉도 없기 때문에 과제해결 과정을 방해하지 않는다. 또한 자신의 사고활동에 대해서 해석하지 않고, 추론하지도 않는다. 그저 자신의 과제에 집중해서 수행하며, 생각을 소리 내어 말하기만 하면 되는 것이다. 이렇게 얻어진 프로토콜은 아주 직접적이고 시간의 지연이 없이 동시적인 구두보고로 이루어지기 때문에 기억 오류로 인한 문제가 없다. 또한, 누구나가 접근하여 분석할 수 있는 프로토콜이기 때문에 연구 대상자의 주관적인 해설로 인한 자료의 부정확성의 오류도 벗어날 수가 있다.

나. BPT 코딩시스템 개발 및 코딩 계획

수학 영재의 문제 해결 과정에서 인지 실험을 통해 얻은 데이터를 프로토콜로 만들어 분석하기 위하여, 문헌 연구와 예비실험을 통하여 수학 문제 해결 과정 및 수학 영재의 사고 특성에 대한 분석틀을 개발하였다. 본 연구에서는 연구결과를 좀 더 체계적으로 산출하기 위한 방법으로 선행연구를 고찰하여 피험자의 사고구술 프로토콜을 분석할 때 절차지향적인 방식(process-oriented approach)과 내용지향적인 방식(content-oriented approach)의 두 가지 방식으로 고찰하여 사고 특성을 잘 관찰하고 분석할 수 있도록 하였다. 우선 절차지향적인 방식은 연구 대상자가 문제를 해결하는 단계를 따라가며 문제 해결의 어느 단계에 머무는지 파악하고 각 단계에서 어떤 문제 해결 행동을 하는지를 관찰하는 것이다. 이를 위해 예비 실험을 통한 실증 데이터[2)]에 근거하여 문제 해결 활동의 여러 에피소드들을 수집하여 문제 해결 단계에 해당하는 코딩 시스템을 조직하였다. 이는 <표 II-1>의 내용이며 각 단계에 해단하는 코딩 조직의 개수도 표에 포함되어 있다.[3)] 각

2) III장 1절에서 설명된 실험과정의 '예비연습' 단계 참조.

코드는 연구 대상자가 각 단계에 머무는 횟수를 프로토콜의 개수로 보여주어 전체 문제 해결 그래프를 한 눈에 볼 수 있도록 해주고, 또한 좀 더 세밀한 자료 분석을 위해 개인의 PBG의 각 항목에 문제해결 단계 코드로 기록되어 연구자의 관찰 결과 내용 분석을 용이하게 할 수 있도록 하는 역할을 한다.

다음으로는 내용지향적인 방식으로서 수학영재의 사고 특성 7범주에 대한 코딩시스템 개발이다. 이는 문제 해결 각 단계에 수집된 각각의 언어 프로토콜에 해당하는 사고 특성 범주와 관련을 맺는 것으로 연구자의 분석 외에 2인의 전문가의 도움을 얻어 자료를 분석하고 최종적인 결과를 종합하여 정리하였다. 수학영재는 여러 가지의 사고 특성이 복합적으로 나타나기도 하므로 하나의 프로토콜에 대하여 여러 개의 범주에 걸친 자료 해석을 얻는 경우도 있다. 내용지향적인 방식의 각 사고 특성에 대한 코딩계획은 <표 II-2>와 같다.

이와 같은 내용을 종합하여 본 연구의 주요 코딩시스템은 각 연구 대상자의 문제 해결 행동을 서술하는 5개의 행동 영역과 앞서 제시한 문제 해결 단계의 6개의 범주 및 오류 범주 1개(M; Make an Error)를 포함한 사고 특성 유형의 7개의 범주를 병렬 나열 또는 교차하여 개발하였다. 각 코딩시스템의 항목은 행동 범주(B; Behavior), 문제 해결 단계 범주(P; Problem Solving Process), 사고 특성 범주(T; Thinking Characteristic)를 나타내고 있으며 이와 같은 코딩 체계를 'BPT 코딩시스템'으로 명명하기로 한다. 이 코딩 시스템은 각 연구 대상자의 문제 해결 절차가 어떻게 진행되는지 살피고 각 문제 해결 단계의 위치별로 수학적 사고의 어떤 특성이 나타나는지 연결 짓는 역할을 한다. 또한 각 문제 해결 단계별 각 사고 특성의 프로토콜의 개수에 대한 그래프를 이용하여 자료를 분석한다.

<표 II-1> 문제 해결 단계 코딩 계획

번	코드	단계	세부요소 코딩번호
1	1u	문제를 인식하는 단계 (Understanding Problem)	1u-1～9
2	2p	문제 해결을 용이하게 하기 위한 준비 단계 (Searching & Preparing)	2p-1～19
3	3c	정교화되지 않은 아이디어를 산출하는 단계 (Conjecturing)	3c-1～35
4	4e	아이디어를 평가하는 단계 (Examining Idea)	4E-1～24
5	5s	해결책을 산출하는 단계 (Producing Solution)	5s-1～28
6	6v	해결책을 실행하고 검증하는 단계 (Solving & verificating)	6v-1～24

<표 II-2> 사고 특성 범주 코딩 계획

번	코드	사고 특성 범주	세부 요소
1	I	문제에 대한 직관적, 구조적 통찰 (Intuitive insight)	정보의 조직화, 직관적 통찰, 인과 관계에 대한 관심
2	E	정보처리 과정의 단축(Curtail)과 능숙함(Efficiency)	속도로 판단되는 정보처리 능력, 수적 유창성, 단축,
3	G	패턴의 일반화 및 귀납적 추론 (Generalization)	패턴 찾기, 수학적 전이, 동형 인식, 일반화, 귀납 추론, 연결성, 사고 과정의 일반화
4	V	시각적 / 도해적 추론 (Visualization)	유용한 생각과 관련된 추상화의 시각화
5	L	논리적 사고 및 수학적 추상화 (Logical Thinking & Mathematical Abstraction)	논리와 기호로 의사소통하는 능력, 연역 추론
6	D	발산적 사고 및 독창성 (Divergent thinking & Originality)	창의력, 융통성, 고정된 생각을 깨는 방법, 발산적 산출물의 생산
7	A	방법을 중시하는 심미적인 경향성 (Aesthetic Attitude)	우아한 해를 찾으려 함, 방법을 중요시, 지구력

3) [표 1]의 세부요소 코딩번호에 관한 설명은 [표 5]를 참조.

<표 II-3> BPT 코딩 시스템

구분	범주	코드	세부 요소
B	행동 및 상태 Behavior	M	동작
		S	상태
		Q	질문
		W	쓰기
		T/A	사고 구술
P	문제 해결 단계 Problem Solving Process	1u	문제 인식 단계
		2p	문제 해결 준비 단계
		3c	아이디어 산출 단계
		4e	아이디어 평가 단계
		5s	해결책 산출 단계
		6v	해결책 실행, 검증 단계
T	사고 특성 Thinking Character--istic	I	Intuitive insight
		E	Curtail, Efficiency
		G	Generalization
		V	Visualization
		L	Logical Thinking & Mathematical Abstraction
		D	Divergent thinking & Originality
		A	Aesthetic Attitude
		M	Make an Error

Ⅲ. 수학영재의 사고과정 분석사례

1. 인지 실험

가. 대상자 선정

본 연구는 같은 학교에 재학 중인 중학교 2, 3학년 학생 4명을 대상으로 하였다. 학생 A, B는 학교 내외의 각종 경시에서 우수한 성적을 거두는 학생들이고 C, D는 교내 수학 학업 성취도는 높으나 경시대회에서는 여타의 특별한 두각을 드러내지 않는 학생들이다. 본 연구에서는 주어진 문제를 해결하는 과정 중의 A, B 학생의 사고 특성과 C, D 학생의 사고 특성의 차이를 알아보고 이 결과를 분석하여 영재성의 근거로 삼고자 한다.

나. 검사 문항 선정

본 연구를 위한 검사 도구는 질적 연구임을 고려하여 총 2문항을 선정하였고, 연구 대상자인 학생들이 중학교 2, 3학년인 것과 교육과정 내의 문제를 능숙하게 잘 다룬다는 점을 고려하여 학생들이 다루어본 경험이 없다고 확인된 KMO기출을 포함한 다른 나라 올림피아드 문제와 우리나라의 국가 선발 고사 기출 문제 중에서 본 실험에 적합한 복잡도와 난이도를 지닌 문항으로 선정하였다. 제한된 시간 안에 문제 해결 과정을 따라 사고 특성을 추적하기 위해 대수 영역으로 한정하여 총 10문항을 사전 선정하였고 이 중 연구 대상자가 아닌 다른 학생에게 예비 실험을 거쳐 본 연구 대상자용으로 준비 문항으로 2문항을 선정하였으며, 이 문항으로 본 연구 이전 연구 대상자들에게 사고구술법을 훈련하였다. 또한 나머지 문항 중 같은 수준의 문제로 2문항을 선정하여 본 연구의 실험을 실시하였다. 본 연구에 사용된 문제는 다음과 같다.

(문제 1) (내용영역: 비례와 방정식)

둘레의 길이가 1200m인 정사각형 ABCD가 있다. 갑, 을 두 사람이 동시에 A를 출발하여 갑은 A에서 B방향으로 을은 A에서 D방향으로 돌다가 변 CD위에 C로부터 105m 인 곳에서 최초로 만났고 변 AB 위에 B로부터 75m 인 곳에서 두 번째로 만났다. 세 번째로 만날 지점을 구하여라. (단 갑, 을은 정사각형의 각 꼭짓점에서 30초씩 쉰다고 한다)

(문제 2) (내용영역: 조합)

네 쌍의 부부가 모인 모임에서 두 사람씩 조를 이뤄 네 경기의 체스게임을 동시에 했다.

여 B씨는 남 E씨와 체스를 두었다.

여 A씨는 여 C씨의 남편과 체스를 두었다.

남 F씨는 남 G씨의 부인과 체스를 두었다.
여 D씨는 여 A씨의 남편과 체스를 두었다.
남 G씨는 남 E씨의 부인과 체스를 두었다.
남 H씨의 부인은 누구인가?

다. 실험 과정

본 연구는 2007년 1월부터 연구의 목적과 방향을 설정하고 여러 선행 연구 자료의 수집을 바탕으로 시작하였다. 연구 주제와 관련된 구체적인 실험은 2007년 4월에서 10월까지 계획된 절차에 의해서 진행되었으며 선정된 4명의 연구 대상자의 녹화 자료를 9월 중 언어프로토콜로 변환하고 작성된 자료를 분석하는 코딩시스템을 개발하였다. 이와 같이 개발된 틀을 이용하여 자료를 분석하고 특성을 비교하였다.

① 사고구술법의 사전 훈련

2007년 4월 중 검사 도구 및 연구 대상 학생을 선정한 후 2007년 8월까지 일주일에 2~3회에 걸쳐 방과 후 사고구술법에 익숙하도록 훈련을 시켰다. 학생들이 처음에는 문제 풀이에 고심하여 입 밖으로 소리 내는 것에 익숙하지 않았으나 차츰 문답식으로 질문하여 대답을 유도하였더니 나중에는 예상 질문에 대한 대답을 미리 하는 것과 같은 형식으로 답변을 준비하며 익숙해졌다. 이와 같은 방법은 학생의 성격과 관련하여 적응도가 다른 것으로 성격이 대범하고 남의 시선을 의식하지 않는 A와 C는 쉽게 익숙해 졌으나 원래 말수가 적은 B와 실수할 것에 염려가 많은 소심한 성격인 D는 적응에 시간이 오래 걸렸다. 사고 구술이 점차 익숙해짐에 따라 연구자가 비디오 카메라로 녹화해서 연구 대상자들에게 보여 주었더니 그에 따라 부족한 부분은 부연 설명도 하는 등 적극적인 자세를 보였다. 초기에 사고 구술을 연습시킬 때는 방법에 익숙해지기를 목표로 하여 학생들에게 낯익은 비교적 쉬운 형태의 문항으로 시작하였고 그에 따라 학생들이 차츰 거부감을 덜고 이 방법에 익숙해졌다.

② 예비 연습

8월 중에 본 연구의 대상자들과 비슷한 수학 재능이 있다고 여겨지는 수준의 4명의 학생들에게 검사 문항으로 선정된 것 중 난이도와 복잡도가 본 연구에 적합한 문항들로 사고 구술 없이 지필 평가를 하였다. 학생들은 방과 후 개별적으로 상담실 안에서 주어진 문제를 해결했으며 한 문항 당 평균 70여분의 시간이 소요되었다. 학생들이 구성한 풀이과정을 참조하여 본 연구 대상자들의 문제 해결 결과를 예측하고 문제 해결 단계 중에 나타나는 사고 특성을 예상하여 행동 요소를 코드화하였다.

③ 실험 과제 수행

9월 중 선정된 대상자를 상대로 실험이 진행되었다. 학생들에게는 사전에 본 실험과 연구의 취지를 미리 알려 제시된 문제를 서로 교환하거나 의견을 나누는 일이 없도록 하였다. 학생들은 미리 예정된 계획에 따라 상담실의 밀폐된 방에서 카메라 녹화가 진행되는 가운데 개별적인 실험에 응하였고 연습한 대로 사고 구술을 병행하며 문제를 해결하였다.

④ 학생 면담 및 부연 설명 채집

각 실험이 끝난 후 학생의 사적인 정보를 얻고 각 문항에 대한 종합적인 마무리를 하고자 면담을 실시하였다. 면담 내용은 수학을 좋아하게 된 동기나 공부 방법 등과 좋아하는 수학 영역이나 문제 패턴 등을 참고로 알아보고 각 실험에 사용된 문제에 대한 종합적인 판단을 내려 볼 수 있는 과정으로 구성하였다.

2. 데이터 분석 방법

가. 프로토콜 수집 및 정리

녹화된 연구 대상자의 사고 구술을 분석하여

각 프로토콜을 나열하고 분석을 위해서 전문가 2인의 도움을 얻었다. 불분명한 부분은 연구 대상자에게 부연 설명을 요구하거나 전문가 2인의 합의된 결론을 도출하여 실험 자료의 신뢰도를 확보하도록 하였다. 본 연구의 결과 각 문항을 해결하는 동안 연구 대상자별로 다음과 같은 시간이 소요되었고 이 시간 동안의 녹화 자료 분석을 통해 <표 III-1>에 제시된 수량의 언어 프로토콜이 수집되었다.

<표 III-1> A, B, C, D 의 언어 프로토콜의 개수

대상자 / 문항	A	B	C	D
문제 1	214	173	208	148
	47(분)	22(분)	148(분)	132(분)
문제 2	62	99	152	77
	18(분)	21(분)	65(분)	78(분)

나. 프로토콜 코딩

전체 프로토콜을 각 하위 요소별로 작은 단위로 구분하여 대하여 <표 II-3>에 제시된 BPT 코딩시스템의 계획을 사용하였다. 행동 범주에 대해서는 동작/상태/질문/쓰기/사고 구술 개개의 영역에 대하여 해당 영역을 표기하였고 이 중 연구자가 질문하거나 답변한 내용을 제외한 연구 대상자의 모든 활동을 넓은 범위의 사고 구술 형태로 포함시켜 자료를 분석하였다. 문제 해결 단계 범주의 코딩은 <표 II-1>의 코딩계획을 세분화한 분석틀에 의하여 각 영역을 표기하였다. <표 III-2>는 <표 II-1>의 코딩 계획을 세분화한 분석틀의 예이다.

<표 III-2> 문제 해결 단계 코딩시스템의 코딩 예

번호	문제 해결 단계	사고 특성	사고특성 관련 행동요소 분석코드
4	1u-4	I	문제를 전체적으로 읽는다
20	2p-11	E	문제와 관련된 수학적 사실이나 공식을 기억한다
25	2p-16	G	경험한 문제와 유사성을 찾는다
30	3c-2	I	핵심적인 질문을 던진다
52	3c-24	G	동치인 문제로 변형한다
56	3c-28	L	문제상황에 기호나 변수를 도입한다
62	3c-34	D	갑작스런 추측을 사용한다
78	4e-15	L	오류를 발견한다
103	5s-16	V	문제 상황을 표나 다이어그램을 이용하여 표현하려 한다
124	6v-9	E	계산을 암산한다
137	6v-22	A	해의 명확성을 위해 점검한다
139	6v-24	M	부분적인 오류를 범한다

<표 III-3>은 이와 같은 BPT 코딩시스템을 이용하여 실제 프로토콜을 분석한 예이다.

<표 III-3> BPT 코딩시스템과 프로토콜 분석의 예 (D의 문항 2 해결과정)

번호	프로토콜	행동 및 상태 (B)					문제해결 단계 (P)						사고특성 구분 (T)							
		동작	상태	질문	쓰기	사고구술	1 u	2 p	3 c	4 E	5 s	6 v	I	E	G	V	L	D	A	M
58	생각에 잠겼다가 고개를 끄덕이고	●						●					●							
59	음 일단 숫자가 너무 크니까 숫자를 줄여보자					●			●						●			●	●	
60	다 5로 나누어 지니까					●			●								●			
61	그림을 다시 그린다					●			●							●	●			
62	300대신 60을 쓰고, 225 대신 45, 75 대신 15,				●				●								●			
63	195 대신 39, 105 대신 21이라고 표시한다.				●				●								●			
64	(그림에서 15의 간격이 21의 간격보다 크다)		●						●											●
65	141과 99를 쓰고 사이에 42를 쓴다				●				●								●			
66	144와 96을 쓰고 사이에 48을 쓴다				●				●								●			
67	39와 21 사이에 ①이라고 쓰고,				●				●								●			
68	45와 15 사이에 ②라고 쓴다.				●				●								●			
69	연구자: 세 번째는 위치가 이디쯤일까?																			
70	세 번째요? 음					●				●						●				
71	여기 어디요.... AD사이를 왔다갔다 한다					●				●						●				
72	일단 여기라고 하고					●			●								●			
73	③을 적는다.					●				●							●			
74	(잠시 생각하다 고개를 끄덕이고)	●								●							●			
75	그림에다가 표시	●								●						●				

다. 사고과정 분석

(1) 문제 해결 단계 그래프 비교

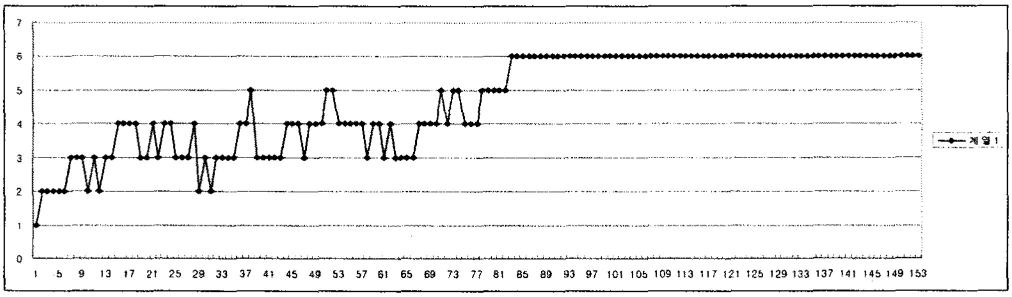
코딩된 프로토콜을 두 가지 방식으로 분석하는데 하나는 연구 대상자가 문제를 해결하는 과정을 살펴보는 것이다. 이는 각 단계에 머무는 지점을 1이라는 숫자에 대입하여 전체 그래프를 그려보는 것으로 이를 이용하면 문제해결 전 과정을 하나의 그림으로 파악할 수 있게 된다. [그림 III-1]과 [그림 III-2]는 B와 C의 문제 해결 단계의 프로토콜을 기록한 그래프이다.

(2) 사고 특성 내용을 포함한 PBG를 통한 문제 해결 단계 비교

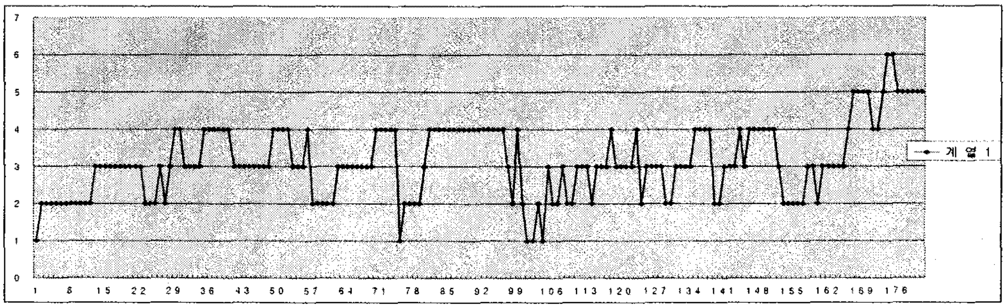
이러한 그래프를 통하여 B와 C의 문제 해결 과정의 차이를 한 눈에 알아볼 수 있다. 이는 또한 연구자가 연구 대상자별로 별도로 작성한 PBG(Problem behavior Graph)를 통하여도 비교 결과를 볼 수 있는데 위의 그래프와 비교하여 보면 각 단계에 나타난 사고 특성 또한 함께 파악할 수 있다는 장점이 있다. 이는 자료 해석의 또 다른 형태이며 프로토콜 분석을 통해 나타난 문제 해결 과정에 대한 자료 분석 결과와는 유의미한 차이가 없음 또한 알 수 있다. 이는 동일한 연구자에 의해 자료 해석에 일관성이 있음을 입증하는 결과이다. [그림 III-3]은 연구자에 의해 작성된 PBG의 예이다.

(3) BPT 코딩시스템으로 분석한 프로토콜 그래프 비교(행동 영역 제외)

각 연구 대상자별로 사고 특성의 발현을 그래프([그림 III-4])로 나타내어 분석한다. 이 사고의 특성을 살펴 앞서 제시한 선행 연구들의 연구 결과를 참조하면 해당 학생들의 영재성의 근거로 삼을 수 있다. 또한 이를 이용하면 수학 문제 해결 과정에서 어떤 수학적 사고 특성이 어떤 문제 해결 단계 중에 나타나는 지를 살펴볼 수 있다.

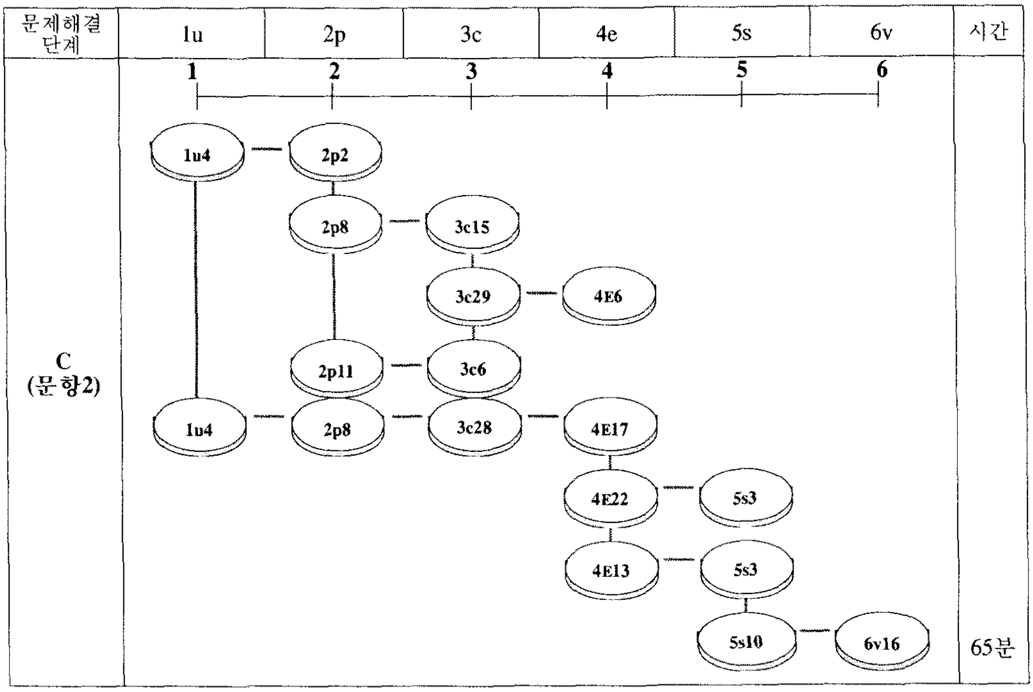


[그림 III-1] B의 문항 1에 대한 문제 해결 단계 그래프

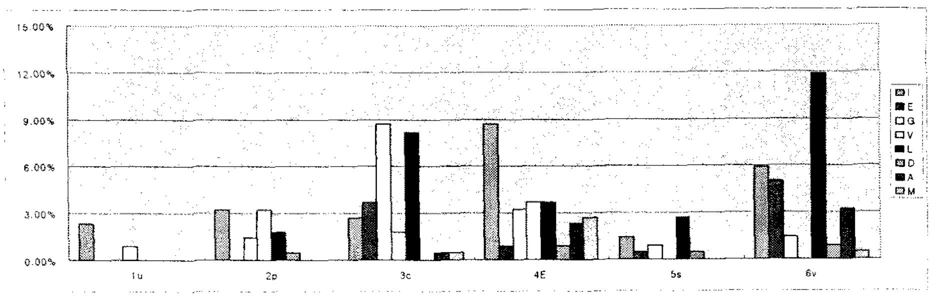


[그림 III-2] C의 문항 1에 대한 문제 해결 단계 그래프

한편, 사고 특성이 나타나는 점유율을 비교해보면 영재 학생과 일반 학생이 사용하는 사고의 패턴에 차이가 있음을 알 수 있다. [그림 III-5]와 [그림 III-6]은 각 문항별로 개인의 사고 특성 점유를 그래프로 나타내고 비교한 것이다.
또한 [그림 III-7]과 같이 연구에 참여한 전 학생의 그래프를 비교할 수도 있다. 전체 영역에 걸쳐 두드러진 사고 특성 및 각 사고 특성 영역 별로 문제 해결 전 과정에 걸쳐 나타나는 분포를 살펴서 비교 분석할 수 있다. 각 사고 특성 범주별로 각 연구 대상자의 사고 과정에 어떤 양적인 차이가 있는지도 살펴볼 수 있는데, [그림 III-8], [그림 III-9], [그림 III-10], [그림 III-11][4]은 이와 같은 분석의 사례이다.

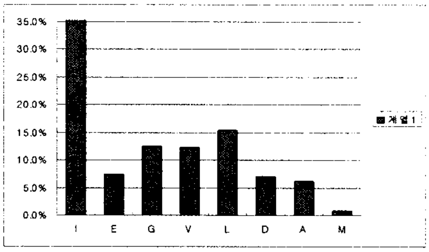


[그림 III-3] PBG 분석의 예(문항 2에 대한 C의 문제해결 과정)

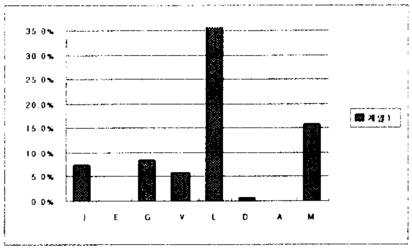


[그림 III-4] 문항 1에 대한 A의 문제해결 단계별 사고특성 발현

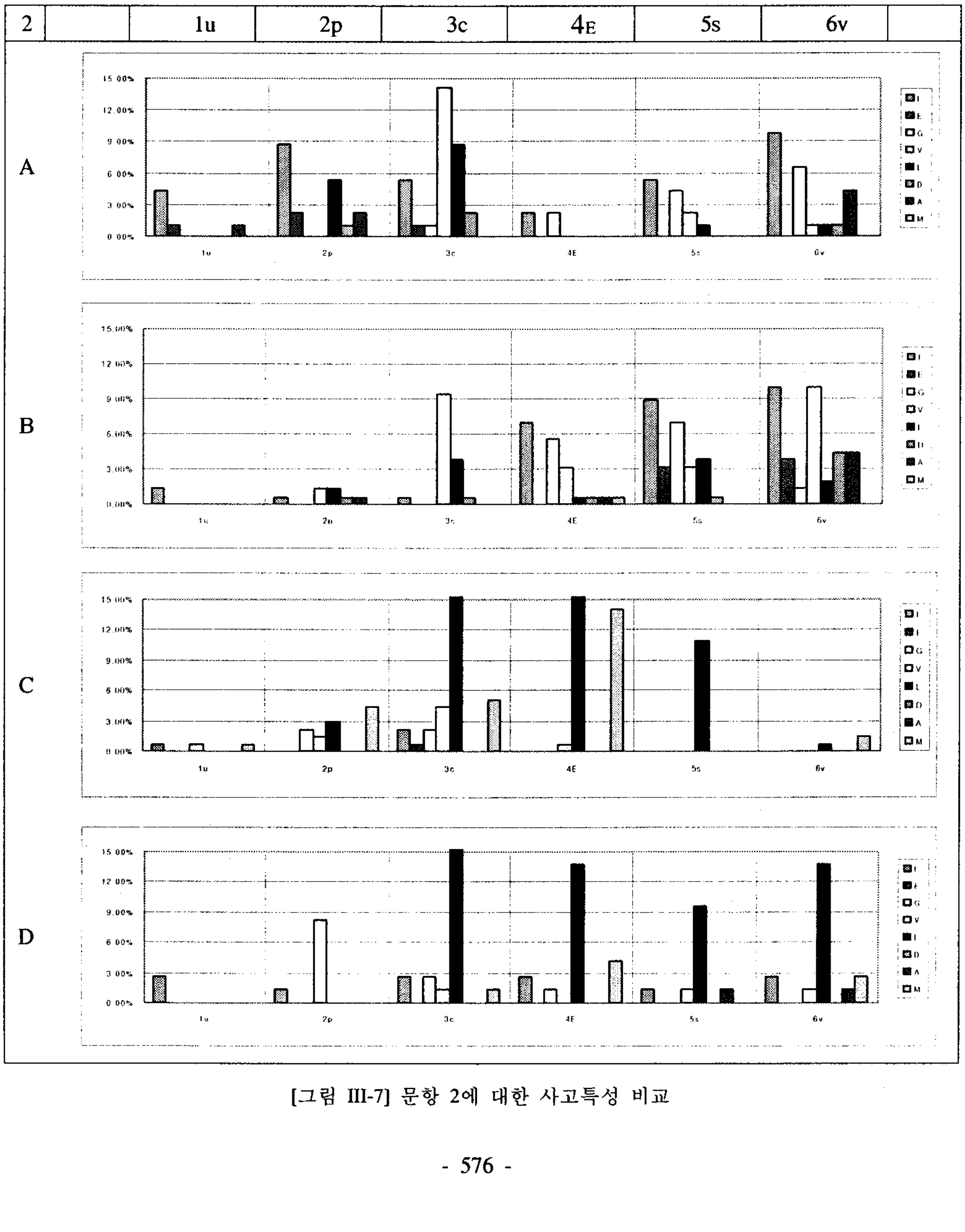
4) 그림의 수평축은 문제해결 6단계를 나타내며 수직축은 문제해결 중에 추출된 프로토콜을 사고특성별로 분류한 다음, 각 사고특성 범주요소의 전체 개수에 대한 각 단계별 점유율을 나타낸 것이다.



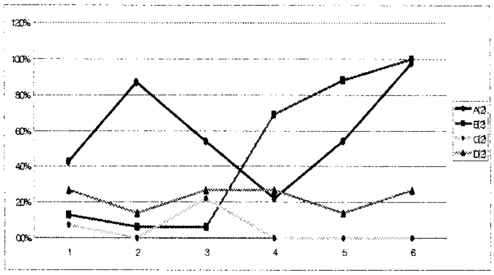
[그림 III-5] 문항 1에 대한 B의 사고특성별 점유율



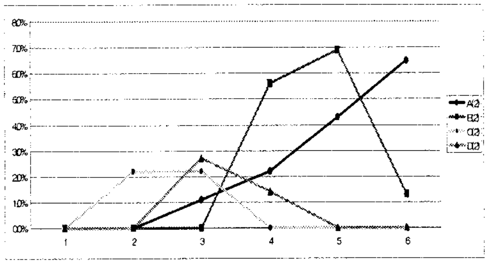
[그림 III-6] 문항 1에 대한 D의 사고특성별 점유율



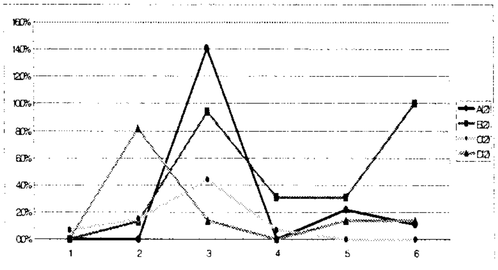
[그림 III-7] 문항 2에 대한 사고특성 비교



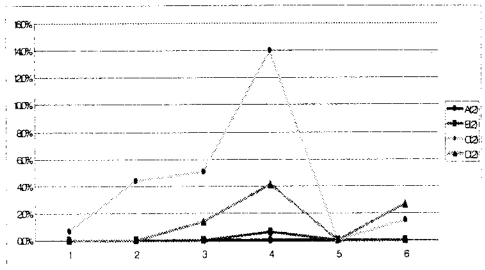
[그림 III-8] 문항 2에 대한 직관적 구조적 통찰력 비교



[그림 III-9] 문항 2에 대한 패턴의 일반화 능력 비교



[그림 III-10] 문항 2에 대한 시각화 능력 비교



[그림 III-11] 문항 2에 대한 오류 비율 비교

3. 실험결과 분석

가. 문제 해결 과정의 특징

A와 B의 문제해결 과정을 살펴보면 A는 문제를 해결하면서 여러 개의 아이디어를 산출하고 검증하는 것을 알 수 있으며 중간 중간의 아이디어를 검증하는 과정 중에 문제풀이에 핵심이 되는 것들을 하나씩 발견해 내며 최종적인 문제 풀이 단계에서는 이 모든 것을 종합하여 결론에 도달함을 알 수 있다. B의 문제해결 과정은 시행착오가 적은 편으로 문제해결까지 자연스럽게 그 흐름이 이어지고 있다. 문제해결의 대부분의 활동은 문제의 해결책을 산출하고 이 해결책을 검증하는 데 사용하고 있으며 문제의 이해와 아이디어를 도출하는 과정은 점진적으로 이루어지고 있다. B는 한 번 문제를 이해한 후 그 이해를 바탕으로 끝까지 문제 풀이 과정으로 이어지고 있으며 이 모든 과정이 빠르게 진행되었다. B의 문항 1에 대한 해결에 걸린 시간은 총 22분이며 총 3개의 아이디어를 도출하였고 아이디어를 검증하는 단계 중에 문제와 관련된 핵심적인 요소를 꺼내었다. A와 B는 문제를 구조적으로 통찰함으로써 문제에서 고도의 추상화된 식이 필요 없음을 판단하였고 처음에 제시한 아이디어의 해결책보다 훨씬 간단하고 아름다운 해결책을 결과물로 내놓았다. 아울러 경험이나 기억에 의존한 것이 아닌 본인의 인지 영역을 사용하여 문제의 질이나 관계에 대한 종합적인 분석 또한 가능하였다.

반면에 C와 D의 초기 단계의 문제 이해 상태는 전체적인 문제를 해결하기에 부족하며 이로 인해 여러 시행착오를 거친 후 다시 처음의 상태로 돌아오기를 반복하였다. 이 과정을 거치는 동안 여러 개의 아이디어를 도출하였지만 그 중 어떤 것이 핵심적인 것인지를 파악하는

구조적인 안목을 갖추지 못하여 실질적인 5단계의 해결책 산출로 이어지지 못했다. 문제의 해결책을 산출한 후에는 더 이상의 실질적인 풀이를 진행하지 않으려 하였다. 또한 D의 문제 해결 과정을 살펴보면 전체적인 그래프의 가지의 개수와 도출한 아이디어의 수는 적은 편이나 매 단계에 머무는 시간이 길어 실제적인 시간이 많이 소요되었다. C와 D는 문제 해결 초기 단계에서 문제의 핵심적인 이해 없이 이것저것 의미 없는 식을 세워보며 아이디어를 얻고자 하는 시도를 하였고 이 같은 결과로 아무런 소득도 얻지 못하자 다시 처음으로 돌아가 좀 더 합리적으로 패턴을 찾고자 하였다.

나. 수학적 사고 특성

앞선 결과 분석에서 볼 수 있듯이 첫째, A, B는 문제 해결에 과정 중에 문제를 전체적으로 조망하며 구조적인 통찰력을 갖추고 있었다. 이로 인해 A, B는 직관적으로 문제를 이해하는 능력이 뛰어나고 문제를 해결하는 과정 동안 이를 통해 길을 안내 받으며 해결안을 검증할 때에도 합리적이고 모순이 없는 결론을 확신할 수 있었다([그림 III-8]).

둘째, A, B가 문제를 푸는 속도는 C, D에 비해서 월등하게 빠르며 조직적이다. A, B는 복잡한 수식을 능숙하게 다루며 수 계산은 대부분 암산으로 처리하거나 빠르고 정확한 필산 능력을 보였다. 이와 같이 A, B는 C, D에 비해 수나 식을 다루거나 전체적인 정보를 처리하는 능력이 뛰어나고 능숙하였다. A, B는 사고 구술을 이용해 자신의 사고를 설명할 때 문제의 구조와 앞으로의 풀이 계획을 설명해가면서 문제 풀이를 진행하였고 사소한 계산 등은 암산으로 처리하면서 언어화하는 과정에서 제외하였다. 그러한 계산의 내용으로는 세 자리 수의 덧셈이나 다항식의 계산 또는 수의 비를 구하는 것 등인데 아마도 그런 것들이 수학적 사고라고 생각하지 않는 것 같았다. 그러나 C, D는 풀이 방법과 식을 푸는 과정 자체를 세세히 설명하였다. 그런 것이 수학적으로 중요한 활동이라 여기고 있고 그런 식을 세우고 푸는 과정 중에 어찌어찌하다 보면 답에 이르게 되거나 답과 관련된 실마리를 얻기를 기대하는 심리가 엿보이기도 하였다.[5]

세 번째, A, B와 C, D 모두 패턴을 일반화하거나 귀납적인 사고로 문제를 해결하는 실마리를 찾으려 하는 공통점이 있었으나 A, B가 문제 아이디어 평가 단계 이후에서 패턴을 일반화하는 반면 C, D는 문제의 아이디어를 도출할 때 귀납적인 방법을 사용하였다([그림 III-9]).

네 번째, A, B와 C, D 모두 그림이나 표를 이용하여 문제의 정보를 표현하고 이를 이용하는 경향이 있었으나 시각적 및 도해적 추론 능력 또한 차이를 보였다. A, B는 문제의 구조를 직관적으로 통찰하기 위해 문제의 핵심적인 것들을 시각화하였는데 C, D는 문제를 풀기 위한 수단의 하나로서 문제의 나열 수준에서 시각화를 할 뿐 그다지 조직적이지 못하였다([그림 III-10]). A, B는 그림을 그릴 때에도 조직적인 방법을 이용해 문제에 불필요한 것을 기록하지 않고 문제에 핵심이 되는 것은 정확하게 그리는 반면 C, D는 그림을 그리고 이에 문제에 나와 있는 모든 정보를 기록함으로써 그로부터 도움을 얻고자 하는 경향을 보였다.

다섯 번째, A, B와 C, D 모두 논리적인 사고를 선호하고 문제 해결 전략으로 사용하였으나 A, B는 문제 해결안을 검증하며 논리적인 이론을 제시한 반면 C, D는 문제 해결에 있어서 논

5) 이 분석의 근거는 [그림 1-3] 등에 근거한 것이며 네 학생의 모든 그래프 비교를 통한 것이나, 지면의 제약으로 모든 내용을 수록하지는 못하였다.

리적인 형식화에 의존하는 경향을 보이는 차이가 있었다. A, B는 문제 풀이에 있어서는 논리적인 것보다는 직관적으로 해결하려는 경향을 보였고 답이 산출된 즉시 확인하려고 하였다. 수학 성취도가 높은 두 집단 모두 공통적으로 논리적인 풀이에 안심하고 정확도가 높을 것이라고 기대하는 심리가 있었다. A, B는 전체적으로는 직관적인 풀이를 많이 사용하는 경향이 있으나 그 해결 방법을 검증할 때는 반드시 논리적인 설명으로 정당화하였다.

여섯 번째, A, B는 발산적 사고를 하며 다양한 풀이와 일곱 번째, 좀 더 완결된 해를 구하기 위해 주력한 반면, C, D는 많은 오류를 범하고도([그림 III-11]) 그러한 오류를 판별해내지 못했을 뿐 만 아니라 해의 정당화에는 의미를 적게 두는 대신 해의 산출 자체에 가장 큰 목표를 두었다. A, B는 오류에 빠지면 스스로 판단하고 찾아 나오는 반면 C, D는 한 번 오류에 빠지면 빠져 나오는 시간이 길거나 오류를 판단하지 못하였으며 연구자의 도움이나 힌트 등을 이용해 재도전할 수 있었다.

A, B는 문제 장면에서 전체를 바라보며 구조를 파악한 후 세세한 부분으로 압박해 들어가는 경향을 보이고 C, D는 할 수 있는 범위의 작은 것에서 출발하여 시행착오를 겪으며 전체로 나아가는 경향을 보였다. 이 때문에 C, D의 사례에서 볼 수 있듯이 학생들은 문제를 이해하지 않고도 식부터 세우려는 경향이 있었고 풀이가 나오면 기뻐하면서도 자신의 해결책에 대한 자신감이 부족했다. 이와 같은 결과 분석을 통해 A, B는 앞서 여러 문헌 연구에서 파악한 것과 같이 수학적 재능을 갖춘 수학 영재성을 지니고 있음을 알 수 있다. 또한 이와 같은 사고 분석 모델을 이용하여 개발된 BPT 코딩 시스템이 수학 영재들의 수학적 사고 특성을 잘 나타내주고 있다고 판단할 수 있다.

Ⅳ. 요약 및 결론

본 연구는 수학 성취 우수 집단 중 교육과정 외의 문제를 잘 해결하는 학생 A, B와 단순히 수학 성취도만 높은 수학 우수 학생 C, D 학생 간의 창의력 문제 해결 과정에 나타나는 사고 특성을 비교 분석하였다. 이와 같은 분석을 위해 문헌 연구를 통하여 문제 해결 과정을 체계화하고 수학 영재들의 사고 특성 요소들을 추출하였고 이를 토대로 분석틀을 마련하여 사고 구술법을 이용하여 연구 대상자들의 사고 과정을 추적하였다.

본 연구의 주요 내용 및 성과는 다음과 같다.

첫째, 선행 연구를 고찰하여 수학 영재의 문제 해결 과정 진행 단계와 각 단계에서 나타나는 수학적인 사고 특성 요소를 추출하여 체계적이고 과학적인 사고 특성 분석 모델을 제시하였다. 앞의 결과 분석에서 살펴본 바와 같이 수학 영재가 문제 해결 중 보여주는 여러 사고 특성들은 연구자가 개발한 문제 해결 6단계 범주와 사고특성 7영역 범주를 포함하는 분석 모델을 통해 명확하게 드러났다. 이는 기존 연구를 종합한 토대 위에 좀 더 보완적인 체계를 제안한 것으로 이 후의 관련 연구에 도움을 줄 있으리라 기대된다.

둘째, 실증 데이터에 근거하여 창의적인 문제 해결 단계와 수학 영재의 사고 특성 분석을 위한 코딩 시스템을 개발하였다. 이는 두 가지 방법으로 진행되었는데 하나는 문제해결 단계에 따른 문제 해결 행동 특성을 코드화하고 개인의 PBG를 그려 비교하는 방법과 또 하나는 수학 영재의 사고 특성 요소를 추출하여 각 문제 해결 단계에서 개개의 요소들이 어떻게 나타나는 지를 관찰하여 사고 체계가 다른 두 집단의 비교 분석의 준거로 삼는 것이다. 첫 번째는 과정을 따라가는 절차지향적인 방법으로

볼 수 있으며 두 번째는 각 사고 특성을 추적하는 내용 지향적인 방법으로 볼 수 있다. 이 두 가지 측면의 종합적인 분석을 통해 단순한 관찰 기록 형태의 질적 연구의 한계를 극복하는 새로운 연구 방법의 대안을 제시하였다. 이전의 연구는 영재들의 산출물에 주목하여 후행하는 분석법에 의존하였는데 사고구술법을 통하여 영재들의 사고 과정과 동시에 보고되는 관찰 분석을 진행하는 이와 같은 연구는 회상법 등을 통하여 감추어지고 생략되었던 좀 더 고차원적인 수학적 사고를 추적하고 발견해 내는 데 용이하다. 문제 풀이에서 같은 산출물을 내는 학생들이라도 그 해결 과정이 진행되는 경로와 구사하는 전략 및 태도에서 차이가 나게 되는 이유를 밝히는 것은 이와 같은 과학적인 과정 분석을 통해서만 가능해진다.

셋째, 개발된 코딩시스템을 기준으로 인지과학의 대표적인 질적 연구 방법인 프로토콜 분석 방법을 사용하여 인지 활동을 보다 과학적으로 분석함으로써 문제 해결 과정에서 나타나는 수학 영재의 사고 특성을 파악하였다. 또한 수학 영재 학생들과 일반 수학 성취 우수 학생들 간에 어떤 질적인 사고 발현 상의 차이점이 나타나는지를 비교 분석하였다. 또한 기존 수학 영재 관련한 선행 연구들과 비교하여 같은 항목의 사고 특성 요소라 할지라도 그 사용 목적과 구현되는 형식에 따라 두 그룹 간에 나타나는 질적인 차이에 대해 규명하였다.

또한 본 연구로부터 수학 영재의 사고 특성에 대한 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 수학 영재는 문제를 직관적, 구조적으로 통찰하는 능력이 뛰어나다.

수학 영재 학생들은 문제를 전체적으로 파악하고 정보를 조직하는 능력이 뛰어나며 불필요한 정보와 필요한 정보를 쉽게 파악하였다. 또한 문제를 해결할 때에는 이것저것 시행착오를 거치지 않고 전체 문제의 본질과 성격을 조망한 후에 세부적인 확인과 검증을 통해 아이디어를 산출해 나간다. 영재 학생들은 문제 풀이 후 반드시 확인 작업을 거치는 데 이 단계에서도 문제를 이해하는 단계에서 보여 주었던 구조적인 통찰을 사용하여 전체 정보를 검증하고 확인하였다.

2. 수학 영재는 정보처리 과정이 능숙하다.

수학 영재 학생들은 복잡한 수식을 능숙하게 다루며 수 계산은 대부분 암산으로 처리하거나 빠르고 정확한 필산 능력을 보였다. 그래서 큰 수를 다루어도 주저함이 없다. 반면에 일반 학생은 수가 크면 일단 꼼꼼한 계산으로 실수하지 않으려고 했고 작은 수로 축소하려는 경향이 있었다. 사고구술법으로 수학 영재 학생들의 사고를 추적하는 과정에서 대부분의 이러한 단축된 정보 처리 과정은 생략되어 나타나지 않았다.

3. 수학 영재와 우수 학생 모두 패턴의 일반화는 공통적으로 나타났다.

이러한 귀납적 추론은 시행착오적인 문제 풀이 방법의 한 형태로서 학생들이 주로 사용하는 수학적인 방법 중 하나임을 알 수 있었다. 하지만 우수 학생이 이것저것 해보면서 아이디어를 산출하기 위한 방법으로 이 요소를 주로 사용하는 반면 영재 학생들은 문제를 이해하거나 해결책을 검증하는 과정에서 정확한 추론 과정에 의해 이 요소를 사용하였다.

4. 수학영재의 시각화와 우수 학생들의 시각화는 다르다.

수학 영재 학생들이나 우수 학생들은 모두 그림이나 표를 이용하여 문제의 정보를 표현하고 이를 이용하는 경향이 있다. 그런데 영재 학생들은 그림을 그릴 때에도 조직적인 방법을 이용해 문제에 불필요한 것을 기록하지 않고 문제에 핵심이 되는 것은 정확하게 그리는 반면 우수 학생들은 그림을 그리고 이에 문제에 나와 있는 모든 정보를 기록함으로써 그로부터 도움을 얻고자 하는 경향을 보였다. 예를 들면 문항

1에서 정사각형을 이용할 때 영재들은 정사각형의 네 변의 길이를 같게 그리고 네 꼭짓점에 쉬는 위치를 표시하고 거리의 비를 맞추어 길이를 표시한 반면 우수 학생들은 정사각형이 아닌 직사각형을 그리고 꼭짓점 위에는 아무것도 표시하지 않은 채 문제에서 구할 수 있는 모든 길이를 적어 놓은 것을 볼 수 있다. 이를 보면 영재 학생들에게 그림을 그리는 것은 머릿속에서 일어나는 풀이 과정의 일부를 옮겨 놓은 것으로 볼 수 있지만 우수 학생들은 시각화나 도해 자체가 문제 풀이의 한 방편으로 사용되고 있음을 알 수 있다. 또한 그림을 그려야 하는 상황이라고 예견된 곳에서 영재들이 그림을 생략하는 경우가 있는데 이러한 이유를 머릿속에서 그려보는 것이 더 낫고 심지어 자신이 종이 위에 그린 그림이 머릿속에 그려진 그림에 오히려 방해가 된다고 하며 그림을 그리는 이유는 연구자에게 설명하기 위해서라고 말하였다. 이를 통해 영재들이 시각화를 이용하지만 그 모든 것은 실제로 머릿속에서 직관적이고 단축된 과정으로 많은 부분이 이루어지며 이 같이 사고구술법 등을 통해 언어화 할 수 없는 부분 중 영재들의 사고 과정에서 단축되어 버려진 정보들을 어떻게 추적할 지에 대해서는 앞으로 향후 연구과제로 미루어 두기로 한다.

5. 수학 영재는 논리적 사고 및 수학적 추상화에 능숙하다.

수학의 본질이 논리성이고 형식화된 논리로서 추상화하는 작업이 또한 수학이라고 할 때 문제해결에서의 논리 정연함과 형식 연역 추론을 포함한 여러 가지 추상화 작업은 수학적인 능력을 보여 준다. 수학 영재들은 논리에 맞는 합리성을 추구하는 경향이 있으며 조금이라도 모순이 생기면 “이건 논리에 맞지 않는데요.”라고 스스로에게 의문을 제기하였다. 또한 추상화된 수학의 일면이라고 볼 수 있는 형식 기호를 사용한 연역적 추상화를 사용하여 문제해결 방법을 찾아내는 것도 능숙하였다

6. 일반적으로 수학영재는 독창적이며 발산적인 사고 경향을 보인다.

이는 직관적 구조적 사고의 통찰과도 관련을 맺고 있다. 단순히 수학 우수 학생이 주어진 지엽적인 풀잇법에 한정하여 자신의 사고를 점점 확대해 나가고 있을 때 수학 영재 학생들은 좀 더 전체적인 접근을 통해 종합적인 풀이를 완성하다보니 예상치 못한 풀이 방법을 발견해 내는 경우가 많다. 또한 지루하거나 단순하고 전형적인 해법을 기피하려하다 보니 그런 취지로 풀이 과정을 단축하려는 습성 속에 이 같은 발산적인 사고가 발현되기도 한다.

7. 수학 영재는 해법의 산출 외에 해법의 수학적인 심미성에도 주력한다.

문제를 해결하며 수학 영재들은 눈에 보이는 정해진 길을 가는 것이 아닌 좀 더 핵심적인 아이디어에 골몰하여 지름길을 가려고 시도하는 면을 보였다. 또한 문제의 해답을 도출하고도 정확한 답이라는 확신이 들 때까지 신중하게 검증을 거친 후에 답이라고 결정하였다. 분명히 완전한 정답이라는 확신이 든 후에도 반드시 자신의 풀이를 점검한 후 더 나은 간결하고 우아한 해법을 찾아보려는 경향을 보였다. 이와 같은 태도는 우수 학생들이 하나의 답이 나올 때마다 해결책을 찾은 것으로 우선 선언부터 하고 보는 태도와는 확연한 차이를 보인다. 우수 학생들은 답을 검증할 것을 요구받으면 자신감 없는 태도로 망설이며 머뭇거리는 것을 볼 수 있는데 이는 해답을 부분적으로 조합하여 시행착오 속에 불완전한 답을 먼저 던져 보는 식의 태도에 기인하며 정답인지 확신이 들지 못하는 이러한 태도는 문제를 완전히 해결하지 못한 것으로 판단할 수 있다. 우수 학생들이 비록 학교 수업 및 학교의 정규 고사에서는 빈틈없는 실력 발휘를 하지만 미지의 문제를 접하면 수학적 능력을 동원한다기보다

는 자신이 이미 획득한 여러 능력 중 기억력이나 유추 등의 모방적인 태도를 통하여 문제 풀이에 임하고 있어 영재 학생들과는 본질적인 차이가 있음이 관찰되었다.

위와 같은 연구 목적의 달성은 수학 영재들에게 나타나는 수학적 사고의 본질을 밝히고 수학영재 선발 및 교재 개발과 교수 방법에 많은 시사점을 찾게 해 주었다. 이상에서 논의하였던 본 연구의 결론을 바탕으로 후속 연구 및 수학 영재의 판별과 교육을 위해 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 먼저 과학적 인지과정 분석틀인 코딩시스템의 개발은 이 후의 연구에 참고자료로서 도움을 줄 수 있을 것이다. 본 연구에서 사용한 사고구술법과 프로토콜 분석법은 효과적인 인지과정 분석 방법으로서 비록 그 기법 자체에 많은 시간이 소요되고 그 방법을 적용하는 데 있어서 부분적인 오차를 발생시키는 단점을 지니고 있으나 수학 영재들의 사고 특성뿐만 일반 학생들의 수학 학습과 그 환원 과정을 파악하거나 학습 부진학생들의 문제점을 분석하는 데에도 유용하게 활용될 수 있으므로 수학교육 분야에 맞는 인지과정 관찰 방법으로서 더욱 발전시킬 필요가 있다.

또한, 이러한 사례 연구를 통하여 수학 영재들과 수학 우수 학생들의 사고 특성을 비교한 것은 수학 영재의 판별과 교육 및 평가 체제와 방식에 있어서 방향성을 제시해 준다. 수학 영재들과 수학 우수 학생들의 사고 특성에는 질적인 차이가 있으며 이는 획일적인 교재나 폐쇄적인 검사 도구, 산출물 위주의 평가 등으로는 판별과 육성에 있어서 적합하지 않다. 이러한 관점에서 보면 우리나라 전역에서 이루어지고 있는 수학 영재 교육 프로그램의 운영 방향을 전반적으로 점검할 필요가 있다. 본 연구의 결과를 고려할 때 수학 영재를 위한 교육 방향은 교육 주체를 생산하는 하부 단위에서부터 지속적인 관찰과 실험을 통해 영재를 판별하고 단발적인 아닌 지속적인 추이 평가로 그 결과를 검증하며 좀 더 열린 시각으로 접근하여 치우치지 않는 전체적이고 장기적인 입장에서 준비되어야 한다. 본 연구의 결과로써 잠재성이 높은 수학 영재에게 적합한 교육 기회와 종합적인 평가 방안 및 교육 방법을 제공하고 더 나아가 수학 영재를 지도하기 위한 교사 육성과 프로그램 개발에 유용하게 활용될 것으로 기대한다.

참고문헌

김홍원, 김명숙, 송상헌(1996). **수학영재 판별 도구 개발연구(Ⅰ)**, 한국교육개발원.

남승인(1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰. **수학교육세미나 2**, p35-57. 한국수학교육학회.

노수영(2004). 수학 문제해결 과정에 나타난 메타인지 분석. 서울교육대학교 석사학위 논문.

문광호(1998). **중·고등학교 수학의 시각화에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위 논문.

송상헌(1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.

片桐重男(1997), 이용률, 성현경, 정동권, 박영배 역. **수학적인 생각의 구체화**, 서울: 경문사.

하현숙(2002). 영재아를 위한 Parnes의 창의적인 문제 풀이에 관한 연구. 부산교육대학교 석사학위 논문.

황동주(2005). **수학영재 판별의 타당도 향상을 위한 수학 창의성 및 문제 해결력 검사개발과 채점방법에 관한 연구**. 단국대학교 박사학위 논문.

Feldhusen, J. F., Hoover, S. M. & Sayer, M. F.(1990). Identifying and educating gifted students at the secondary level. NY: Trillium.

Greenes, C.(1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28.

Holton, D. & Graffney, M.(1994). Teaching talented student. In J. Neyland (ED.), *Mathematics Education A Handbook for Teachers, 1*, 397-409. Wellington, New Zealand: Wellington College of Education.

House, P. A.(1987). Providing opportunities for the mathematically gifted, K-12. Reston, Virginia: NCTM.

Keating, D. P.(1974). The study of mathematically precocious youth. In Stanley, J. C., Keating, D. P. & Fox, L. H., (Ed.), *Mathematical Talent: Discovery, Description, and Development* (pp.23-45). Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Koublanova, E.(2003). Identification of gifted students in introductory logic courses. *Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students*. August, 3-9, 2003, Rousse, Republic of Bulgaria.

Krutetskii, V. A.(1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Miller, R. C.(1990). *Discovering mathematical talent* (ERIC Digest No. E321487). Teston, VA: The Council for Exceptional Children. ERIC Clearinghouse on Disabilities and Gifted Education.

NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newell, A and Simon, H, A.(1972). *Human Problem Solving*, Prentice-Hall, N. J.

Organ, L. J.(1981). *An investigation into mathematics education for gifted elementary students*. Unpublished Doctoral dissertation, Fairleigh Dickinson University.

Sousa, D. A.(2003). *How the gifted brain learns*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press. Inc.

Stanley, J. C.(1984). Use of general and specific aptitude measures in identification: Some principles and certain cautions. *Gifted Child Quarterly*, 28(4).

Treffinger, D. J. & Feldusen, J. F.(1983). *Creative thinking and problem solving in gifted education*.

Wormald, C.(1998). Mathematics for gifted student. *Proceedings of the 7th AAEGT Conference*. June. 18-20.

Zimmermann, W. and Cunningham, S. (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington: MAA.

An Analysis on Thinking Processes of Mathematical Gifted Students Using Think-aloud Method

Hong, Jin-Kon (Konkuk University)
Kang, Eun-Joo (Konkuk University, Graduate School)

This study is aimed at providing the theoretical framework of characteristics of mathematical thinking processes and structuring the thinking process patterns of the mathematical gifted students through the analysis of their cognitive thinking processes. For this purpose, this study is trying to analyze characteristics of mathematical thinking processes of the mathematical gifted students in an objective and a systematic way, by using think-aloud method.

For comparative study, the analysis framework with the use of the thinking characteristic code as a content-oriented method and the problem-solving processes code as a process-oriented method was developed, and the differences of thinking characteristics between the two groups chosen by the coding system which represented the subjects' thinking processes in the form of the language protocol through thinking-aloud method were compared and analyzed.

* **key words** : mathematically gifted(수학 영재), thinking characteristics(사고 특성), think-aloud method(사고구술법), problem-solving process(문제해결 과정).

논문 접수 : 2009. 10. 6
논문 수정 : 2009. 11. 7
심사 완료 : 2009. 11. 16