피보나치트리에서 피보나치 에지 번호매김방법
(The Fibonacci Edge Labelings on Fibonacci Trees)

김 용 석 †
(Yong-Seok Kim)

요 약 본 논문에서는 임의의 피보나치 트리에 에지번호매김을 하여 피보나치 수들의 집합 $\{F_k|k \geq 2\}$, $\{F_{2k}|k \geq 1\}$ 그리고 $\{F_{3k+2}|k \geq 0\}$인 세가지 경우의 에지번호 집합을 얻는 7가지의 에지번호매김방법들을 제안한다. 이러한 에지번호들의 집합은 상호연결망의 일종인 원형군의 설계시 점프열로 사용할 수 있으므로 망척도 중 하나인 분지수를 결정한다.
키워드 : 그래프 임베딩, 피보나치 트리, 번호매김, 에지번호, 부그래프, 상호연결망

Abstract In this paper, we propose seven edge labeling methods. The methods produce three case of edge labels-sets of Fibonacci numbers $\{F_k|k \geq 2\}$, $\{F_{2k}|k \geq 1\}$ and $\{F_{3k+2}|k \geq 0\}$. When a sort of interconnection network, the circulant graph is designed, these edge labels are used for its jump sequence. As a result, the degree is due to the edge labels.
Key words : graph embedding, Fibonacci tree, labeling, edge label, subgraph, interconnection networks

1. 서 론

그래프 임베딩 문제는 병렬 컴퓨터 네트워크들 사이의 시뮬레이션 그리고 주어진 자료구조를 다른 자료구조에 시뮬레이션하는 등의 응용분야에서 제기되는 문제이다[1]. 일반적인 그래프들 사이의 임베딩 문제는 매우 어려운 문제이고 임베딩하려는 그래프의 특성에 따라 여러 가지 기법들을 동원하고 있는데 그 중 주어진 제약 조건을 만족하도록 그래프의 정점이나 에지에 번호를 할당하는 문제로 표현한 번호매김에 의한 방법도 하나의 전형적인 방법으로 분류되고 있다[2,3]. 즉 여러가지 임베딩 문제를 그 문제의 특성을 잘 표현하는 간단한 번호매김 문제로 만들어 해결할 수 있다. 현재까지는 대부분 응용분야와 관련되어 잘 알려진 특별한 그래프들 사이의 임베딩이 주로 다루어져 왔다. 상호연결망(interconnection networks)에서 임베딩 문제가 다루어진 그래프들로는 하이퍼큐브, 메쉬, 이진트리, 이항트리 그리고 피보나치트리 등 병렬 컴퓨터의 위상으로 제시된 그래프들과 자료구조에서 자주 쓰이는 그래프 등이 있다. 예를 들면 완전사진트리가 재귀원형군 $G(2^m,2)$의 부그래프임과 완전이진트리와 이항트리가 재귀원형군 $G(2^m,4)$의 부그래프이고[4] $2^i \times 2^{m-i}$ 2-차원 메쉬와 $2^{2i} \times 2^j \times 2^{m-2i-j}$ 3-차원 메쉬가 재귀원형군 $G(2^m,4)$의 부그래프이고[5] 피보나치 트리는 2-에지번호매김이 가능하고[6] 이항트리는 Q-에지번호 매김이 가능함이 밝혀졌다[7].

N_h를 높이 h인 높이균형트리에 있는 최소 노드수라고 하면 최악의 경우 서브트리 중 하나가 $h-1$이며 다른 서브트리의 높이는 $h-2$가 된다. 이 두 서브트리 역시 균형을 이루므로 $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$이며 $N_0 = 0$, $N_1 = 1$, $N_2 = 2$가 된다. N_h의 순환적인 정의나 피보나치트리의 정의 또는 피보나치 수의 정의, 즉 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (F_0 = 0, F_1 = 1)$ 사이에는 유사한 점이 있다$(N_h = F_{h+2} - 1)$. 피보나치 수의 이론에 따르면 $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$일 때 $F_h \approx \Phi^h/\sqrt{5}$이므로 $N_h \approx \Phi^{n+2}/\sqrt{5} - 1$이 된다. 이것은 n 개의 노드가 트리에 있다면, 그 트리의 높이 h의 최대값은 $\log(\sqrt{5}(n+1)) - 2$이라는 것을 의미한다. 따라서 n 개의 노드를 갖는 높이 균형트리의 최대 탐색시간은 $O(\log n)$이다[8]. 즉 높이가 h

† 정 회 원 : 서남대학교 컴퓨터정보통신 교수
yskimsky320@naver.com
논문접수 : 2009년 2월 12일
심사완료 : 2009년 10월 6일

정보과학회논문지 : 시스템 및 이론 제36권 제6호(2009.12)

인 AVL 트리 중에서 정점 수가 가장 적은 경우로서 최악의 경우에도 탐색을 $O(\log n)$의 복잡도를 갖는 피보나치 트리에 피보나치 에지번호 매김을 하여 생긴 에지번호들을 대칭적이면서 최대 연결도를 갖는 상호 연결망의 일종인 원형군 그래프의 점프열로 사용하면 스패닝 트리로 피보나치 트리를 갖는 새로운 상호 연결망을 설계할 수 있다[9-12]. 그리고 이러한 에지번호들은 Harary가 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는 최적화 문제를 해결하면서 제시한 Harary 그래프를 일반화한 원형군 그래프는 $C_N(j_1, j_2, \cdots, j_k)$로 표기하고 N개의 노드 $\{0, 1, \cdots, N-1\}$를 가지며, 임의의 두 노드 v, w에 대해서 $v + j_i \equiv w(\text{mod}N), 1 \leq i \leq k$을 만족하는 j_i가 존재할 때 v, w를 잇는 에지가 있고 이때 각각의 j_i를 점프라 하고 각 노드의 분지수가 된다. 그러므로 본 논문에서 피보나치 에지번호매김을 하여 얻어진 에지번호들이 원형군 그래프의 점프로 대치될 수 있고 에지번호들의 제약조건에 따라 원형군 그래프의 점프가 결정되어서 분지수가 에지번호 집합의 원소 개수 * 2인 위상을 설계할 수 있고 어떤 값이 최적인지 알 수 있다. 예를 들면 그림 1에서는 피보나치 트리 FT_3에 에지번호 매김을 하여 얻어진 에지번호의 집합이 $\{1, 2, 3\}$이 되고 이를 이용한 원형군 그래프의 분지수는 6이 된다. 반면에 그림 2에서는 에지번호의 집합이 $\{1, 3\}$이고 이를 이용한 원형군 그래프의 분지수는 4가 된다.

임의의 피보나치 트리 $FT_k, k \geq 2$에 대한 피보나치 에지번호매김이란 $FT_k, k \geq 2$의 임의의노드에 1에서 전체 노드의 개수 $F_{k+3} - 1$까지 서로 다른 자연수를 부여하는 데 이때, 에지번호는 에지에 인접한 두 노드에 할당된 자연수의 차로 정의되고 그 값은 항상 피보나치 수가 된다는 제약조건을 갖는다. 만약 첫 번째 방법에서와 같이 에지번호가 피보나치 수들 중 모든 피보나치 수를 허용한다면 즉 에지번호의 집합이 $\{F_k | k \geq 2\}$가 된다면 전위순회 에지번호매김방법의 경우 에지번호 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{k+2}\}$인데 원형군 그래프가 노드 대칭적이고 전체 노드개수가 F_{k+3}이므로 에지번호가 $(F_{k+3} - 1)/2$ 를 넘으면 피보나치 성질에 의해서($\because F_{k+1} = F_{k+3} - F_{k+2}$) F_{k+2}의 점프가 F_{k+1}이 된다. 그러므로 에지번호 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{k+1}\}$이 되고 중위순회 에지번호매김방법의 경우는 $\{F_2, F_4, \cdots, F_k\}$이고 후위순회 에지번호매김방

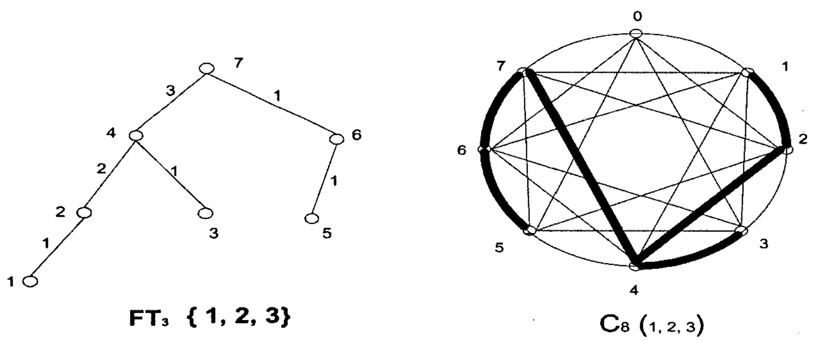


그림 1 에지번호가 피보나치 수들의 집합 $\{F_k | k \geq 2\}$인 경우 중의 한 예

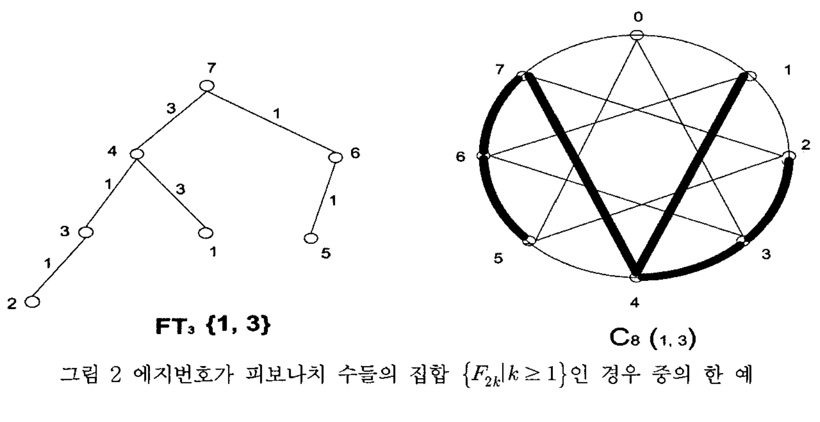


그림 2 에지번호가 피보나치 수들의 집합 $\{F_{2k} | k \geq 1\}$인 경우 중의 한 예

법의 경우는 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{k+1}\}$이 된다. 그리고 두 번째 방법에 의해서 얻어진 에지번호들의 집합이 $\{F_{2k} | k \geq 1\}$가 된다면 $FT_{2k}, FT_{2k+1}, k \geq 1$에 에지번호매김을 하여 얻을 수 있는 에지번호들은 $FT_{2k}, FT_{2k+1}, k \geq 1$의 전체 노드개수가 $F_{2k+3}-1, F_{2k+4}-1, k \geq 1$이므로 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2k+2}, k \geq 1\}$이 될 것이다. 마지막으로 세 번째 방법에 의해서 얻어진 에지번호들의 집합이 $\{f_{3k+2} | k \geq 0\}$가 된다면 $FT_{3k}, FT_{3k+1}, FT_{3k+2}, k \geq 1$에 피보나치 에지번호매김을 하여 얻을 수 있는 에지번호들은 $FT_{3k}, FT_{3k+1}, FT_{3k+2}, k \geq 1$의 전체 노드개수가 $F_{3k+3}-1$, $F_{3k+4}-1$, $F_{3k+5}-1$, $k \geq 1$이므로 $\{F_{3k+2} | k \geq 0\}$이 될 것이다. 이러한 에지번호매김방법들은 어떤 그래프가 다른 그래프의 부그래프인지를 확인하는 방법들 중 하나로서 주어진 제한조건을 만족하도록 그래프의 정점에 번호를 할당하는 문제이다. 본 논문의 구성은 2장에서 관련연구를 언급하고 3장에서는 에지번호가 $\{F_k, k \geq 2\}$인 경우의 세 가지 에지번호매김방법을 4장에서는 $\{F_{2k}, k \geq 1\}$인 경우의 세 가지 에지번호매김방법을 5장에서는 $\{F_{3k+2}, k \geq 0\}$인 경우의 에지번호매김방법을 다루고 6장에서는 결론을 다룬다.

2. 관련 연구

2.1 피보나치 트리

본 논문에서 피보나치 트리는 다음과 같이 정의된다.

정의 1. 피보나치 트리

(1) 하나의 정점을 갖는 피보나치 트리의 높이는 0이다.

(2) $k>0$인 경우, 높이가 k인 피보나치 트리 FT_k는 FT_{k-1}과 FT_{k-2}인 두 서브트리가 루트와 연결되어 만들어진다. 그리고 피보나치 트리의 예가 그림 3에 있다.

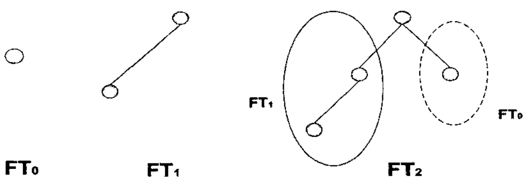


그림 3 피보나치 트리의 예

피보나치 트리에서는 다음과 같은 성질을 만족한다.

성질 1. FT_k의 총 노드개수는 피보나치 수, $F_{k+3}-1$이다.

증명. 정의 1에 의해서 FT_0와 FT_1의 총 노드 개수는 1과 2이다. 그리고 $FT_k, k \geq 2$의 총 노드 개수가 $F_{k+3}-1$이라고 하면 FT_{k+1}의 총 노드 개수 = FT_k의 총 노드 개수 $+FT_{k-1}$의 총 노드 개수 +1 이므로 $(F_{k+3}-1)+(F_{k+2}-1)+1 = F_{k+3}+F_{k+2}-1 = F_{k+4}-1 = F_{(k+1)+3}-1$이다.

성질 2. FT_k의 단말 노드개수는 피보나치 수, F_{k+1}이다.

증명. FT_1의 단말 노드개수는 $F_2=1$이고 $FT_k, k \geq 2$의 단말 노드 개수는 F_{k+1}이라고 가정하면 FT_{k+1}의 총 노드 개수는 $F_{k+4}-1$이고 FT_k의 총 노드 개수는 $F_{k+3}-1$이므로 FT_{k+1}의 단말 노드 개수 = FT_{k+1}의 총 노드 개수 $-FT_k$의 총 노드 개수이다. 즉 $(F_{k+4}-1)-(F_{k+3}-1) = F_{k+4}-F_{k+3} = F_{k+2}$이다. 그러므로 FT_{k+1}의 단말 노드 개수는 F_{k+2}이다.

성질 3. FT_k의 단말 노드를 제거하면 나머지 노드개수는 FT_{k-1}의 노드개수와 같다.

증명. 성질 2에서 FT_k의 총 노드 개수 = FT_{k-1}의 총 노드 개수 $+FT_k$의 단말노드 개수이므로 쉽게 증명된다.

성질 4. 피보나치 수에서 $F_{3m+2} = 4 \cdot F_{3(m-1)+2} + F_{3(m-2)+2}$, $m \geq 2$이 성립한다.

증명. $m=2$인 경우에

$F_8 = 4 \cdot F_5 + F_2 = 4(5)+1 = 21$이다.

$m=k, k>2$인 경우

$F_{3k+2} = 4 \cdot F_{3(k-1)+2} + F_{3(k-2)+2}$가 성립된다고 가정하면 즉, $F_{3k+2} = 4 \cdot F_{3k-1} + F_{3k-4}$이다.

$m=k+1$인 경우

$F_{3(k+1)+2} = 4 \cdot F_{3(k+1-1)+2} + F_{3(k+1-2)+2}$

$= 4 \cdot F_{3k+2} + F_{3k-1}$

$= F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k-1}$

$= F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+1}+F_{3k}+F_{3k-1}$

$= F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+3}+F_{3k+1}$

$= F_{3k+4}+F_{3k+3} = F_{3k+5}$

$= F_{3(k+1)+2}$이다.

$|V(FT_{3m})|$를 피보나치 트리 FT_{3m}에서 전체 노드들의 개수라고 하면

성질 5.

$|V(FT_{3m})| = (F_{3m}-1)+5(F_{3m-1})+F_{3m-4}, m \geq 2$ 가 성립한다.

$m=2$인 경우

$|V(FT_6)| = (F_6-1)+5(F_5)+F_2 = F_9-1$ ($\because$성질1에 의해서)

$m=k$인 경우

$|V(FT_{3k})| = (F_{3k}-1)+5(F_{3k-1})+F_{3k-4} = F_{3k+3}-1$이라고 하면

$m=k+1$인 경우

$$|V(FT_{3(k+1)})|=(F_{3(k+1)}-1)+5(F_{3(k+1)-1})+F_{3(k+1)-4}$$
$$=F_{3k+3}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}$$
$$+F_{3k-1}-1$$
$$=F_{3k+3}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+1}$$
$$+F_{3k}+F_{3k-1}-1$$
$$=F_{3k+3}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+1}$$
$$+F_{3k+1}-1$$
$$=F_{3k+3}+F_{3k+2}+F_{3k+2}+F_{3k+3}+F_{3k+3}-1=F_{3k+3}$$
$$+F_{3k+4}+F_{3k+4}-1$$
$$=F_{3k+5}+F_{3k+4}-1=F_{3k+6}-1=F_{3(k+1)+3}-1$$이다.

2.2 피보나치 에지번호 매김

임의의 그래프에서 임베딩과 관련된 피보나치 에지번호매김은 그래프의 정점에 1에서 정점의 전체개수까지 서로 다른 자연수를 부여하는데 에지번호가 모두 피보나치 수가 된다는 조건을 만족하는 것이다. 여기에서 에지번호는 에지에 인접한 두 정점에 할당된 자연수의 차로 정의된다. 이러한 예가 그림 4에 나타나 있는데 이때

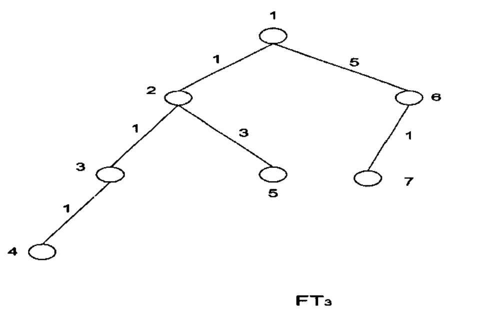


그림 4 FT_3에서의 피보나치 에지번호매김의 예

FT_3에서의 정점의 전체개수는 7이고 에지번호의 집합은 $\{1,3,5\}$임을 알 수 있다.

3. 에지번호가 피보나치 수들의 집합 $\{F_k|k\geq 2\}$인 경우

본 절에서는 에지번호들의 집합이 피보나치 수들의 집합, $\{F_k|k\geq 2\}$인 조건의 경우로서세가지 에지번호 매김방법들을 제안한다. 이것들은 일반적인 트리의 순회방법들인 전위순회, 중위순회, 후위순회이다.

3.1 전위순회 에지번호 매김방법

소정리 1. 임의의 피보나치 트리 $FT_k, k\geq 2$에서 전위순회방법을 사용하여 에지 번호매김을 하면 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{k+2}\}$이 된다.

증명. $FT_k, k\geq 2$에서 루트노드번호는 전위순회방법이므로 항상 피보나치 수 F_2=1이 된다. 그리고 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 루트노드개수인 1을 더한 값이 되고 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 전체 노드개수인 $F_{k+2}-1$(∵ 성질 1)과 루트노드의 개수인 1을 합한 F_{k+2}을 더한 값이 된다. 또한 루트노드번호 1과 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 루트노드번호 2 와의 차인 루트노드와 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 1이 되고 루트노드번호 1과 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 루트노드번호(왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 전체노드개수,$F_{k+2}-1$에 루트노드개수, 1과 자신의 노드개수 1을 더한 값) $F_{k+2}+1$의 차인 루트노드와 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 F_{k+2}임을 알 수 있다. 그러므

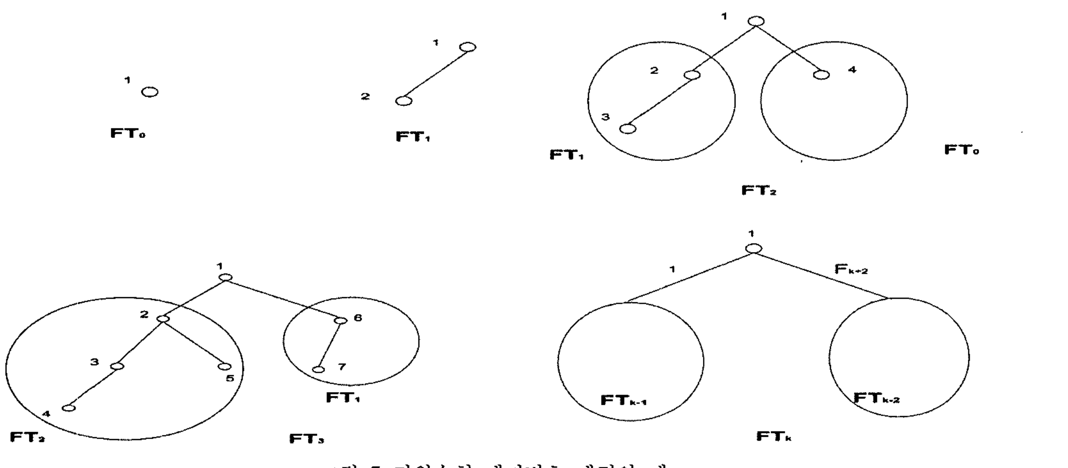


그림 5 전위순회 에지번호 매김의 예

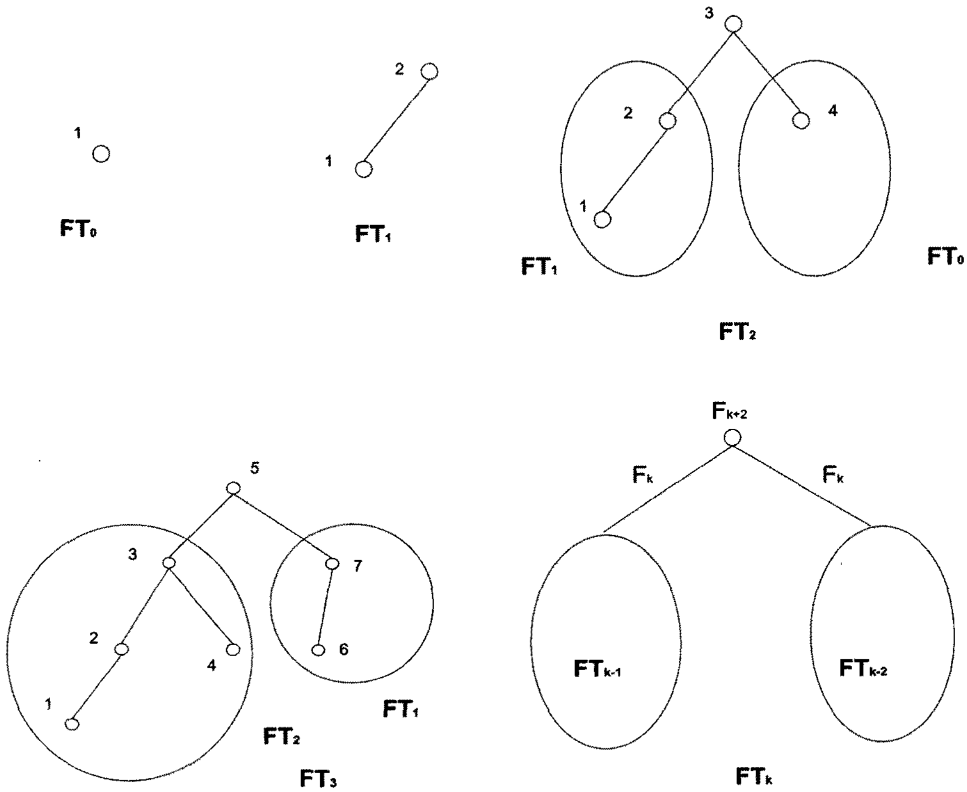


그림 6 중위순회 에지번호 매김의 예

로 FT_k에서 추가되는 에지번호는 F_{k+2}이므로 전위순회 에지번호매김방법으로 얻어지는 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, F_5, \cdots, F_{k+2}\}$임을 알 수 있다.

3.2 중위순회 에지번호 매김

소정리 2. 임의의 피보나치 트리 $FT_k, k \ge 2$에서 중위순회방법을 사용하여 에지번호 매김을 하면 항상 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_3, \cdots, F_k\}$이 된다.

증명. $FT_k, k \ge 2$에서 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 각 노드번호는 FT_{k-1}의 노드번호와 같고 루트 노드번호는 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 전체 노드개수 $F_{k+2}-1$에 자신의 노드개수 1을 더한 F_{k+2}가 되고 오른쪽 서브트리, FT_{k-2}의 각 노드번호는 자신들의 노드번호에 루트노드 번호 F_{k+2}를 더한 값이 된다. 또한 루트노드번호 F_{k+2}와 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 루트노드번호 F_{k+1}과의 차인 루트노드와 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 F_k이고 루트노드번호 F_{k+2}와 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 루트노드번호(루트노드번호,F_{k+2}에 FT_{k-2}의 루트노드번호,F_k 를 더한 값) $F_k + F_{k+2}$의 차인 루트노드와 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 F_k임을 알 수 있다. 그러므로 FT_k에서 추가되는 에지번호는F_k이므로 중위순회 에지번호 매김방법으로 얻어지는 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_3, \cdots, F_k\}$임을 알 수 있다.

3.3 후위순회 에지번호 매김

소정리 3 임의의 피보나치 트리 $FT_k, k \ge 1$에서 후위순회방법을 사용하여 에지번호 매김을 하면 항상 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_3, \cdots, F_{k+1}\}$이 된다.

증명. $FT_k, k \ge 2$ 에서 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 각 노드번호는 FT_{k-1}의 노드번호와 같고 오른쪽 서브트리, FT_{k-2}의 각 노드번호는 자신들의 노드번호에 왼쪽 서브트리,FT_{k-1}의 전체노드개수 $F_{k+2}-1$을 더한 값이 되고 루트노드번호는 자신의 노드개수 1에 왼쪽 서브트리, FT_{k-1}의 전체노드개수 $F_{k+2}-1$와 오른쪽 서브트리, FT_{k-2}의 전체노드개수 $F_{k+1}-1$를 더한 값 $F_{k+3}-1$이 된다. 또한 루트노드번호 $F_{k+3}-1$과 왼쪽 서브트리, FT_{k-1}의 루트노드번호 $F_{k+2}-1$의 차인 루트노드와 왼

쪽 서브트리,FT_{k-1}의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 F_{k+1}이 되고 루트노드번호 $F_{k+3}-1$와 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 루트노드번호(왼쪽 서브트리, FT_{k-1}의 전체노드개수 $F_{k+2}-1$과 오른쪽 서브트리, FT_{k-2}루트노드번호$F_{k+1}-1$ 을 더한 값) $F_{k+3}-2$의 차인 루트노드 와 오른쪽 서브트리,FT_{k-2}의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 1이 됨을 알 수 있다. 그러므로 FT_k에서 추가되는 에지번호는F_{k+1}이므로 후위순회 에지번호매김방법으로 얻어지는 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_3, \cdots, F_{k+1}\}$임을 알 수 있다.

4. 에지번호가 피보나치 수들의 집합 $\{F_{2k}|k \geq 1\}$인 경우

본 절에서는 임의의 피보나치 트리 FT_{2k}, FT_{2k+1}, $k \geq 1$에 번호매김을 했을 때 에지번호가 피보나치 수 $F_{2k}, k \geq 1$가 되는 변형된 전위, 중위, 후위 순회방법들을 제안한다.

4.1 변형된 전위순회 에지번호매김방법

소정리 4. 임의의 FT_{2k}, FT_{2k+1}, $k \geq 1$에서 변형된 전위 순회방법을 사용하여 번호매김을 하면 항상 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2k+2}\}$이다.

증명. 임의의 $FT_{2k}, k \geq 1$인 경우에 루트 노드번호는 1이고 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 루트노드개수 1을 더한 값이 되고 오른쪽 서브트리 FT_{2k-2}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 전체 노드 개수 $F_{2k+2}-1$와 루트노드 개수 1을 더한 값이다. 이때 루트 노드번호 1과 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 루트 노드번호 2 와의 차인 루트 노드와 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 1이 되고 루트 노드번호 1과 오른쪽 서브트리 FT_{2k-2}의 루트 노드번호 $F_{2k+2}+1$(루트 노드개수 1에 FT_{2k-2}의 루트노드개수 1과 FT_{2k-1}의 전체 노드 개수 $F_{2k+2}-1$을 합한 값)의 차인 루트 노드와 오른쪽 서브트리 FT_{2k-2}의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 F_{2k+2}가 된다. 그리고 $FT_{2k+1}, k \geq 1$인 경우에 루트 노드번호는 1이고 오른쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 각 노드번호는 FT_{2k}에서 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 노드번호와 같고, 왼쪽 서브트리 FT_{2k}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 오른쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 전체 노드개수 $F_{2k+2}-1$과 루트노드개수 1을 합한 F_{2k+2}을 더한 값이 된다. 이때 루트 노드번호 1과 오른쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 루트 노드번호 2

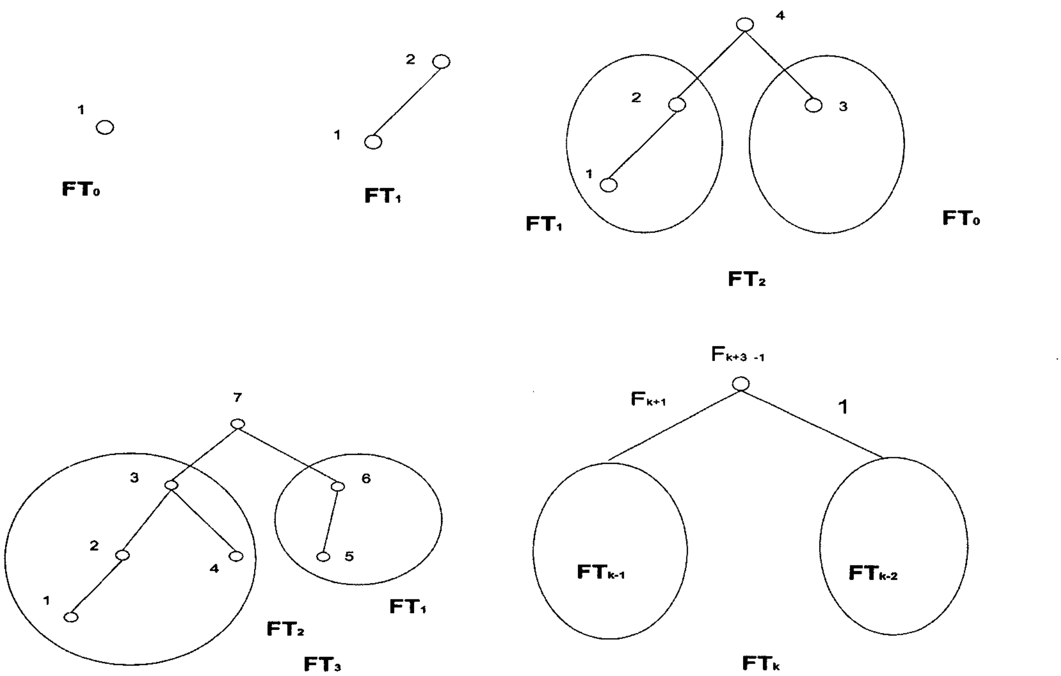


그림 7 후위순회 에지번호 매김의 예

와의 차인 루트 노드와 오른쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 1이 되고 루트 노드번호 1과 왼쪽 서브트리 FT_{2k}의 루트 노드번호 $F_{2k+2}+1$의 차인 루트 노드와 왼쪽 서브트리 FT_{2k}의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 F_{2k+2}가 된다. 그러므로 임의의 FT_{2k}, FT_{2k+1}, $k \ge 1$에서 추가되는 에지번호는 F_{2k+2}이므로 변형된 전위순회 에지번호매김 방법으로 얻어지는 에지번호의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2k+2}\}$이다.

4.2 변형된 중위순회 에지번호매김방법

소정리 5. 임의의 FT_{2k}, $FT_{2k+1}, k \ge 1$에서 변형된 중위순회방법을 사용하여 번호매김을 하면 항상 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2k+2}\}$이다.

증명. $FT_{2k}, k \ge 1$인 경우에는 왼쪽 서브트리FT_{2k-1}의 각 노드번호들은 FT_{2k-1}의 노드번호와 같고 루트 노드번호는 루트노드 개수 1과 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 전체 노드개수 $F_{2k+2}-1$를 합한 F_{2k+2}이고 오른쪽 서브트리 FT_{2k-2}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 루트 노드개수 1과 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 전체 노드 개수 $F_{2k+2}-1$를 합한 값이 된다. 이때 루트 노드번호 F_{2k+2}와 왼쪽 서브트리의 루트 노드번호 $F_{2(k-1)+3}$의 차인 루트 노드와 왼쪽 서브트리의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 F_{2k}이다. 그리고 $FT_{2k+1}, k \ge 1$인 경우에 왼쪽 서브트리 $\overline{FT_{2k}}$의 각 노드번호들은 FT_{2k}의 각 노드번호들의 역순이다. 또한 루트 노드번호는 루트 노드개수 1에 왼쪽 서브트리 $\overline{FT_{2k}}$의 전체 노드개수 $F_{2k+3}-1$을 더한 F_{2k+3}이고 오른쪽 서브트리 $\overline{FT_{2k-1}}$의 각 노드번호는 FT_{2k-1}의 각 노드번호의 역순인 자신의 노드번호에 루트노드번호 값 F_{2k+3} 을 더한 값이 된다. 이때 루트 노드번호 F_{2k+3}과 왼쪽 서브트리의 루트노드번호 F_{2k+1}(루트노드번호 $F_{2k+3}-FT_{2k}$의 루트노드번호 F_{2k+2})의 차인 루트 노드와 왼쪽 서브트리의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 F_{2k+2}이고 루트노드번호 F_{2k+3}과 오른쪽 서브트리 $\overline{FT_{2k-1}}$의 루트노드번호 $2 \cdot F_{2k+2}$(FT_{2k+1}의 루트노드번호 F_{2k+3}에 $F_{2k+2}-FT_{2(k-1)+1}$의 루트노드번호 $F_{2(k-1)+3}$을 더한 값)의 차인 루트 노드와 오른쪽 서브트리의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 F_{2k}이다. 그러므로 $FT_{2(k-1)}$, $FT_{2(k-1)+1}, k \ge 3$의 경우 추가되는 에지번호는 F_{2k}와 F_{2k+2}이므로 변형된 중위순회 에지번호매김 방법으로 얻어지는 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2k+2}\}$으로 항상 성립한다.

4.3 변형된 후위순회 에지번호매김방법

소정리 6. 임의의 피보나치 트리 FT_{2k}, $FT_{2k+1}, k \ge 1$에서 변형된 후위 순회방법을 사용하여 번호매김을 하면 항상 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2(k+1)}\}$이다.

증명. $FT_{2k}, k \ge 1$인 경우에 오른쪽 서브트리 $FT_{2(k-1)}$의 각 노드번호는 $FT_{2(k-1)}$의 노드번호와 같고 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 각 노드번호는 자신의 노드번호에 $FT_{2(k-1)}$의 전체 노드개수 $F_{2k+1}-1$를 더한 값이다. 그리고, 루트 노드번호는 루트노드개수 1에 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 전체 노드개수 $F_{2(k+1)}-1$와 오른쪽 서브트

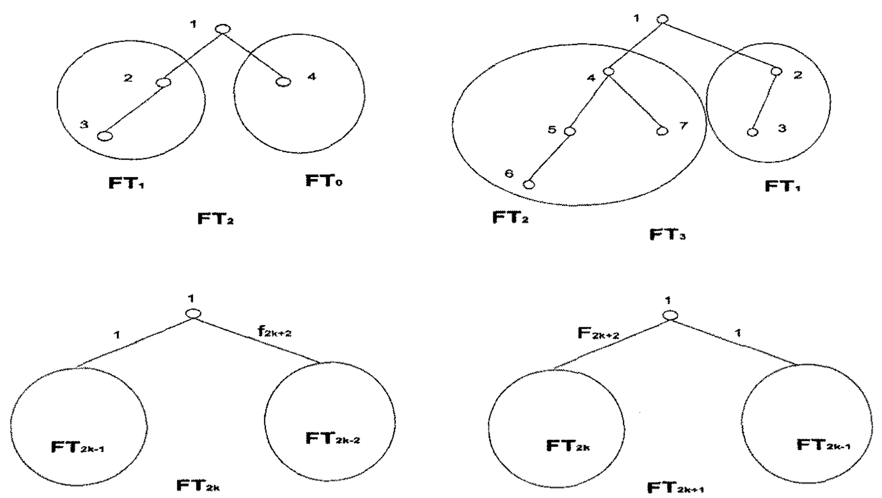


그림 8 변형된 전위순회 에지번호 매김의 예

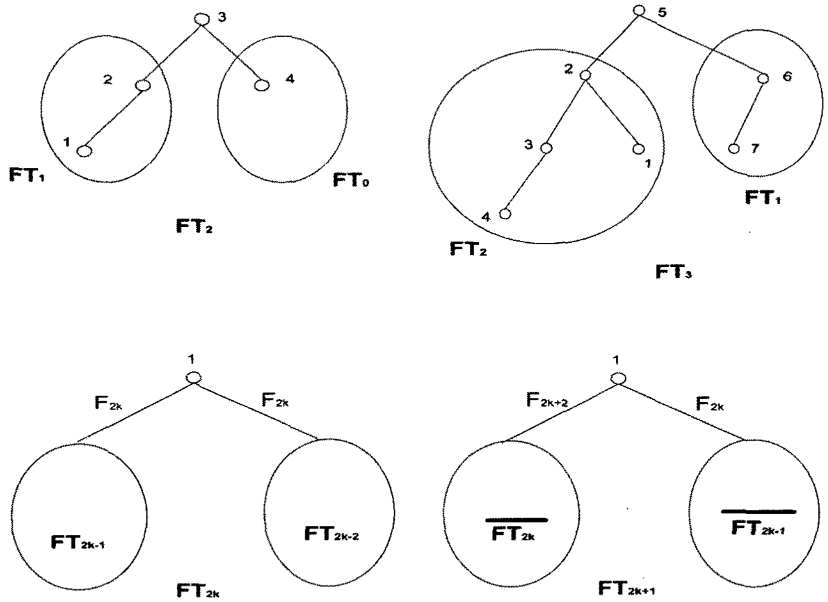


그림 9 변형된 중위순회 에지번호 매김의 예

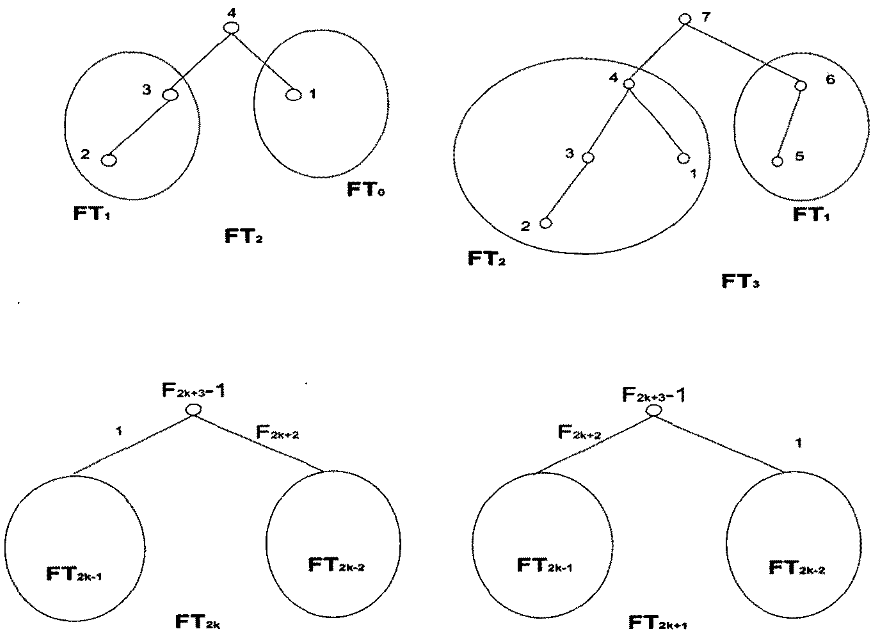


그림 10 변형된 후위순회 에지번호 매김의 예

리 $FT_{2(k-1)}$의 전체 노드개수 $F_{2k+1}-1$를 더한 값 $F_{2k+3}-1$이다. 이때 루트노드번호 $F_{2k+3}-1$과 오른쪽 서브트리 $FT_{2(k-1)}$의 루트노드번호 $F_{2k+1}-1$의 차인 루트 노드와 오른쪽 서브트리의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 $F_{2(k+1)}$이고 루트노드번호 $F_{2k+3}-1$과 왼쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 루트노드번호 $F_{2k+3}-2$(루트노드번호-1)의 차인 루트노드와 왼쪽 서브트리의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 항상 1이다. 그리고 FT_{2k+1}인 경우에는 왼쪽 서브트리의 각 노드번호는 FT_{2k}의 노드번호와 같고 오른쪽 서브트리의 각 노드번

호는 자신의 노드번호에 왼쪽 서브트리 FT_{2k}의 전체 노드개수 $F_{2k+3}-1$를 합한 값이 되고 루트 노드번호는 루트노드개수 1에 왼쪽 서브트리 FT_{2k}의 전체 노드개수 $F_{2k+3}-1$ 과 오른쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 전체 노드개수$F_{2(k+1)}-1$를 더한 값 $F_{2(k+2)}-1$이다. 이때 루트노드번호 $F_{2(k+2)}-1$과 왼쪽 서브트리 FT_{2k}의 루트노드번호 $F_{2k+3}-1$의 차인 루트 노드와 왼쪽 서브트리의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호는 $F_{2(k+1)}$이고 루트노드번호 $F_{2(k+2)}-1$과 오른쪽 서브트리 FT_{2k-1}의 루트노드번호 $F_{2(k+2)}-2$ (FT_{2k}의 루트노드번호 $F_{2k+3}-1$와 FT_{2k-1}의 루트노드번호 $F_{2(k+1)}-1$의 합)와 차인 루트 노드와 오른쪽 서브트리의 루트 노드에 인접한 에지의 에지번호는 1이다. 그러므로 추가되는 에지번호는 $F_{2(k+1)}$이므로 에지번호들의 집합은 $\{F_2, F_4, \cdots, F_{2(k+1)}\}$으로 항상 성립한다.

5. 에지번호가 피보나치 수들의 집합 $\{F_{3k+2} | k \geq 0\}$인 경우

본 절에서는 에지번호들의 집합이 $\{F_{3k+2} | k \geq 0\}$에 해당되는 에지번호 매김방법에 대해 제안한다. 그리고 그림 11에서와 같이 다음을 정의한다.

정의. 슈퍼노드

$FT_{3k}, k \geq 2$에서 전단계의 노드들과 에지들의 부분집합으로 구성된 FT_3-형태의 각 노드들을 슈퍼 노드라고 한다.

정의. 내부에지, 외부에지

$FT_{3k}, k \geq 1$ 에서 에지들은 내부에지와 외부에지로 구성되고 내부에지들은 $F_{3(k-1)+2}$의 에지번호를 갖고 외부에지들은 F_{3k+2}의 에지번호를 갖는다.

정의. 헤드그룹, 꼬리 그룹

헤드그룹은 $FT_{3k}, k \geq 1$의 전체노드와 에지로 이루어진다.

꼬리그룹은 FT_3의 2번 노드 또는 $FT_{3k}, k \geq 2$의 2번 슈퍼노드로 이루어진다.

중간그룹은 FT_3의 3, 4, 5, 6, 7번 노드들과 인접한 에지들 또는 $FT_{3k}, k \geq 2$의 3, 4, 5, 6, 7번 슈퍼노드들과 인접한 에지들로 이루어진다.

내부그룹은 중간그룹에서 에지들을 제외한 노드들로 이루어진다.

정리 1. 임의의 피보나치 트리 $FT_k, k \geq 0$에서 피보나치 수 $F_{3k+2}, k \geq 0$ 만을 에지번호로 갖는 피보나치 번호매김을 할 수 있다.

증명. $FT_k, k \geq 0$에서 FT_0와 FT_1의 경우는 선형적으로 번호매김을 할 수 있으므로 에지번호들은 0과 1이다. 그리고 FT_{3k}, FT_{3k+1} 그리고 FT_{3k+2}의 세 경우는 다음과 같다. 첫째로, $FT_{3k}, k \geq 1$의 경우, 그림 11에서와 같이 $k=1$인 FT_3은 씨앗(seed) 형태를 갖는다. 다음단계인 FT_6에서 1번 슈퍼노드는 FT_3의 헤드그룹으로 확장되고 2, 3, 4 그리고 7번 슈퍼노드들은 FT_3의 내부그룹으로 확장되고 5번 슈퍼노드는 FT_3에서의 꼬리그룹으로 확장되고 마지막으로 6번 슈퍼노드는 FT_3의 중간그룹으로 확장된다. 그리고 이러한 슈퍼노드들은 씨앗형태인 FT_3와 같은 에지들을 갖는다. 즉 내부에지들은 에지번호가 F_5가 되고 외부에지들은 에지번호가 F_8가 된다. 이때 FT_3의 헤드그룹과 중간그룹에서 생성된 FT_6의 1번 슈퍼노드와 6번 슈퍼노드 사이에 인접한 에지들은 $\{(4,25), (5,26), (7,28)\}$이 된다. 그러므로, $FT_{3k}, k \geq 2$인 경우에 성립한다고 가정하면 $FT_{3(k+1)}$인 경우에는 다음과 같다.

1) $FT_{3(k+1)}$의 1번 슈퍼 노드는 전단계인 FT_{3k}의 헤드그룹으로 확장된다.

2) $FT_{3(k+1)}$의 2, 3, 4, 7번 각 슈퍼 노드들은 전단계인 FT_{3k}의 내부그룹으로 확장된다.

3) $FT_{3(k+1)}$의 5번 슈퍼 노드는 전단계인 FT_{3k}의 꼬리그룹으로 확장된다.

4) $FT_{3(k+1)}$의 6번 슈퍼 노드는 전단계인 FT_{3k}의 중간그룹으로 확장된다.

이와같이 구성된 $FT_{3(k+1)}$은 그림 12에서와 같이 각 슈퍼 노드들이 씨앗형태인 FT_3과 같은 에지들을 갖는다. 이때 추가되는 에지들의 에지번호들은 내부에지는 F_{3k+2}이고 외부 에지는 $F_{3(k+1)+2}$가 된다. 그리고 전단계인 FT_{3k}의 헤드그룹과 중간그룹에서 생성된 $FT_{3(k+1)}$의 1번 슈퍼노드와 6번 슈퍼노드에 인접한 에지들의 집합은 $(4+\sum_{i=2}^{k}\{F_{3i+2}+(-1)^{i-1}\},$

$4+\sum_{i=2}^{k}(\{F_{3i+2}+(-1)^{i-1}\}+F_{3(k+1)+2})),$

$\left(5+\sum_{i=2}^{k}\{F_{3i+2}+(-1)^{i}\}, 5+\sum_{i=2}^{k}\{F_{3i+2}+(-1)^{i}\}+F_{3(k+1)+2}\right)$

과 $(7+\sum_{i=2}^{k}F_{3i+2},\ 7+\sum_{i=2}^{k}F_{3i+2}+F_{3(k+1)+2})$이다.

둘째로, $FT_{3k+1}, k \geq 1$의 경우 $k=1$인 FT_4에서는 그림 11에서와 같이 전단계인 FT_3에서 노드번호 3, 4, 5, 6, 7인 노드들과 이들과 같은 노드개수 F_5만큼의 노드

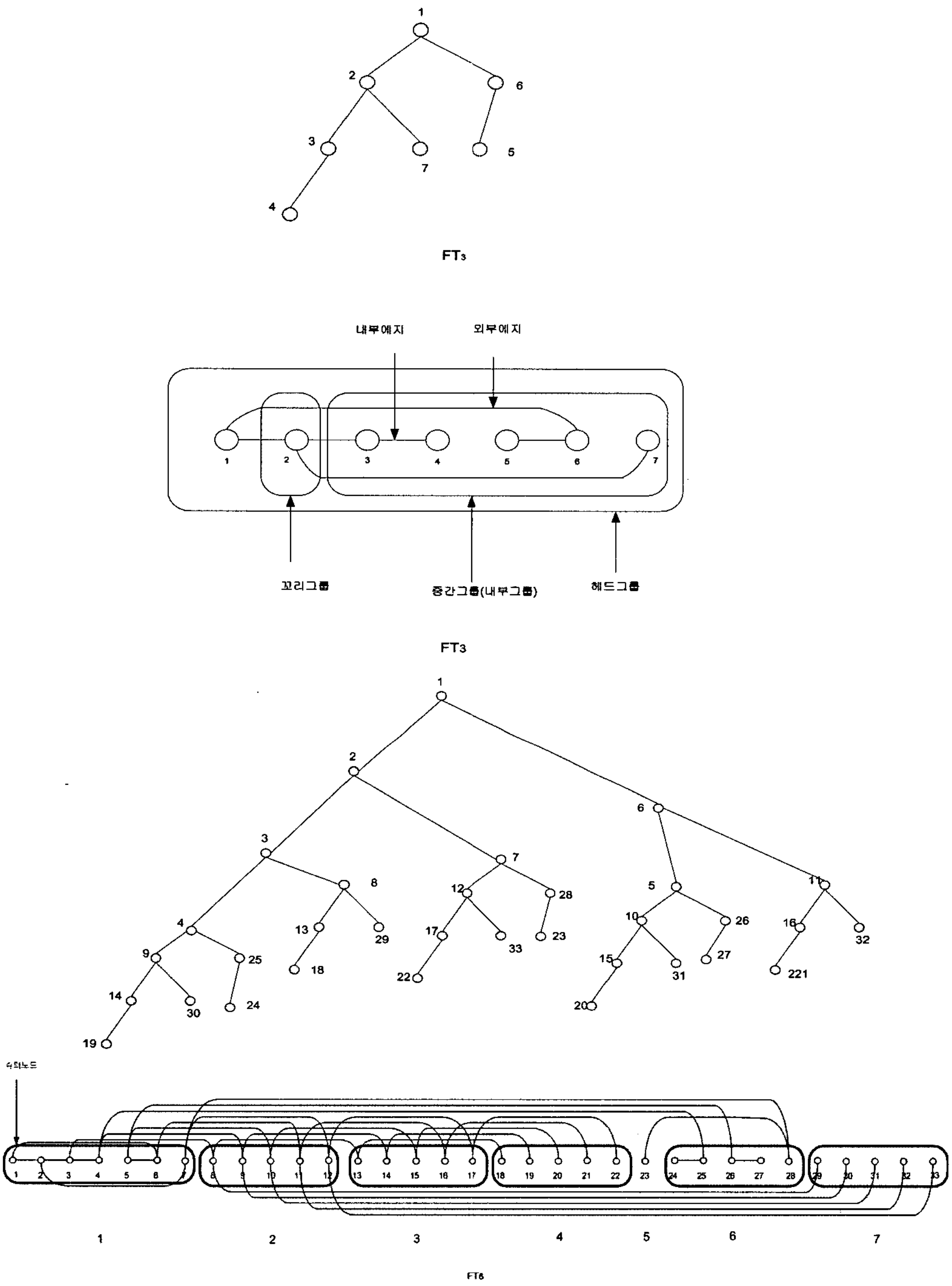


그림 11 FT_3에서 FT_6으로 확장된 예

들이 일대일 대응하여 에지번호 F_5가 되도록 인접한 에지들이 추가된다. $FT_{3k+1}, k \ge 2$의 경우에 성립한다고 가정하면 $FT_{3(k+1)+1}$인 경우에는 전단계인 $FT_{3(k+1)}$에서 슈퍼노드 번호 3, 4, 5, 6, 7인 노드들과 새로 추가된 이들과 같은 노드 개수 $F_{3(k+1)+2}$개의 노드들이 일대일 대응하여 에지번호가 $F_{3(k+1)+2}$가 되도록 인접한 에지들이 추가된다. 그러므로 항상 추가되는 에지번호들은 $F_{3(k+1)+2}$가 된다.

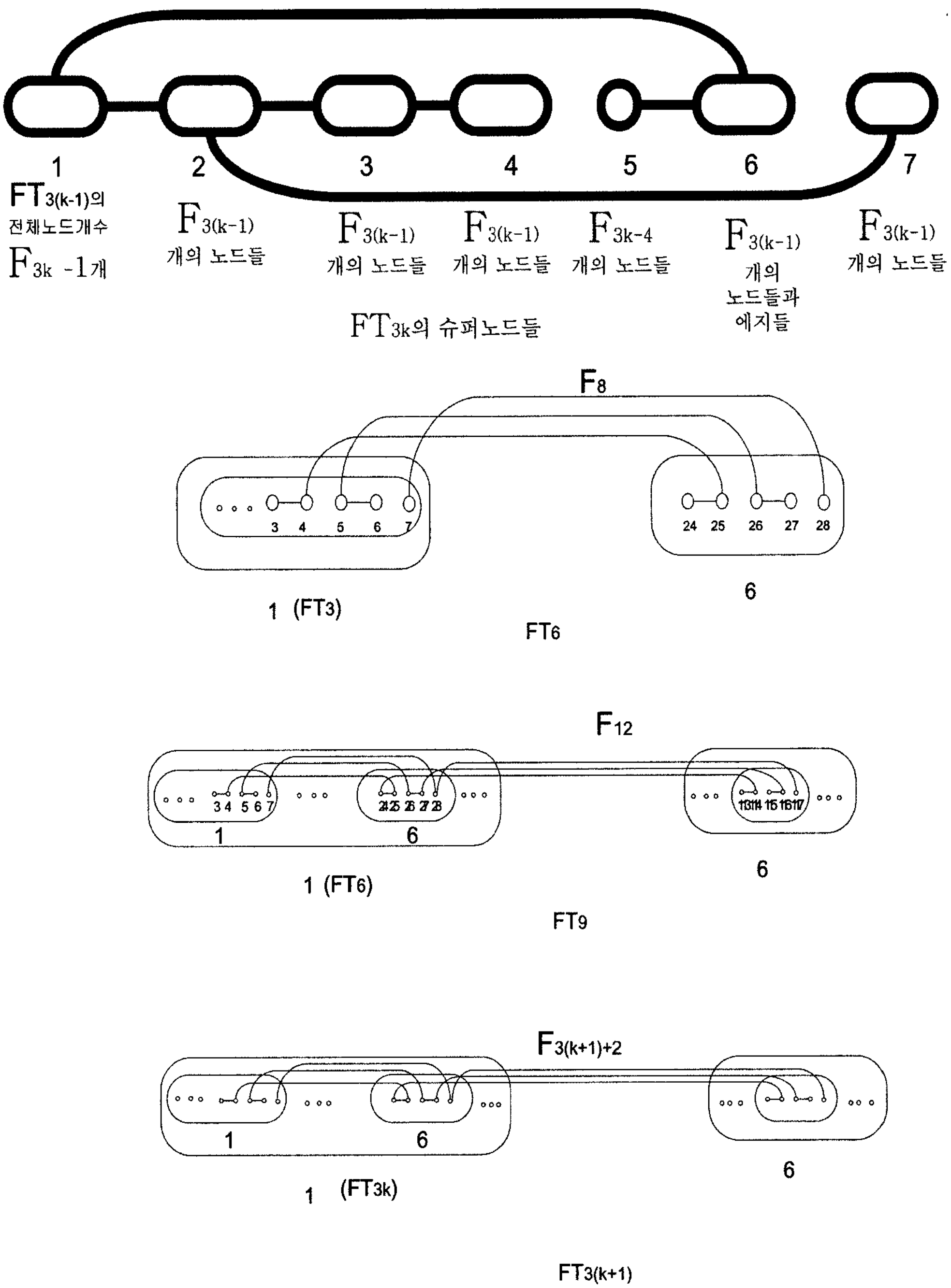


그림 12 FT_{3k}와 $FT_{3(k+1)}$인 경우의 예

셋째로, $FT_{3k+2}, k \geq 1$의 경우 $k=1$인 FT_5에서는 그림 14에서와 같이 루트 노드번호는 $F_{3(k+1)+1}$이고 왼쪽 서브트리는 전단계 FT_4의 역선형나열인 $\overline{FT_4}$가 되고 오른쪽 서브트리는 전전단계인 FT_3가 된다. 이때 루트 노드와 왼쪽 서브트리의 루트노드 그리고 루트 노드와 오른쪽 서브트리의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호들은 둘다 1이다. $FT_{3k+2}, k \geq 2$인 경우에 성립한다고 가정하면 $FT_{3(k+1)+2}$의 경우는 루트 노드번호는 $F_{3(k+2)+1}$

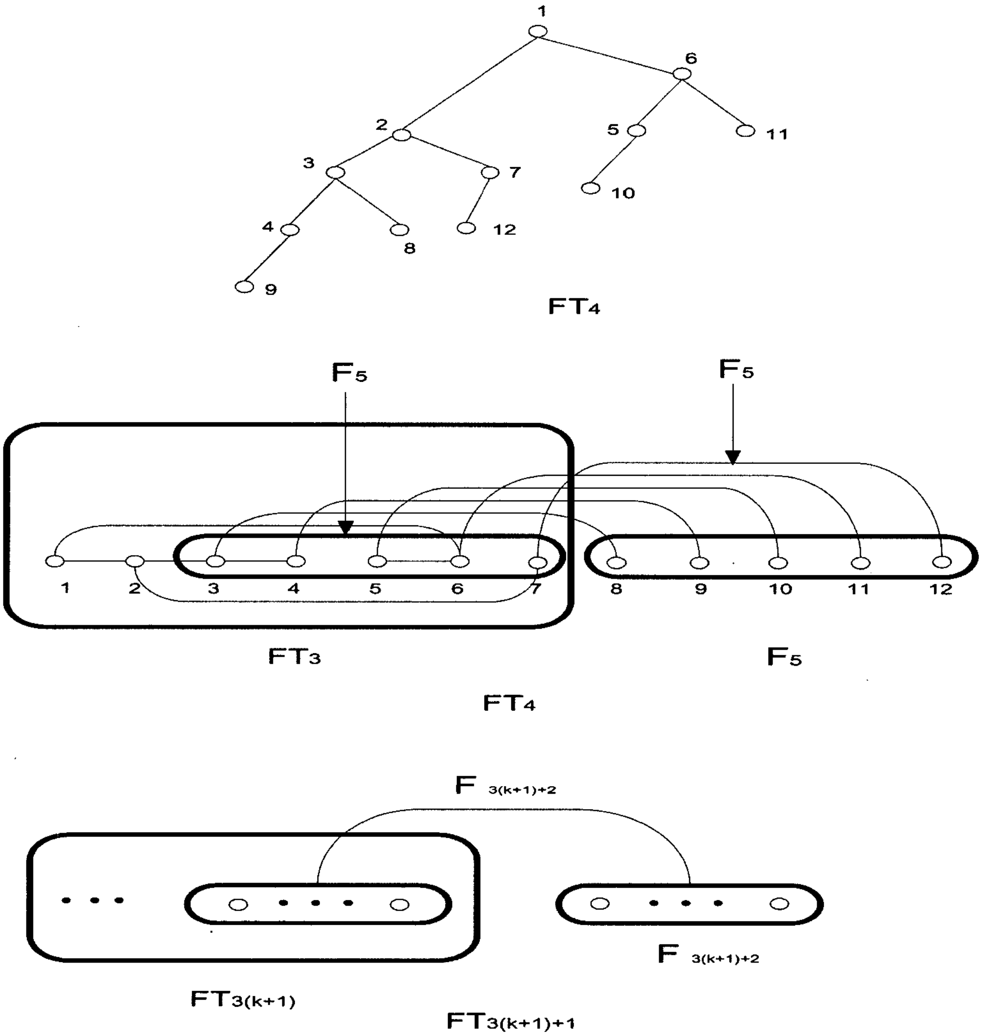
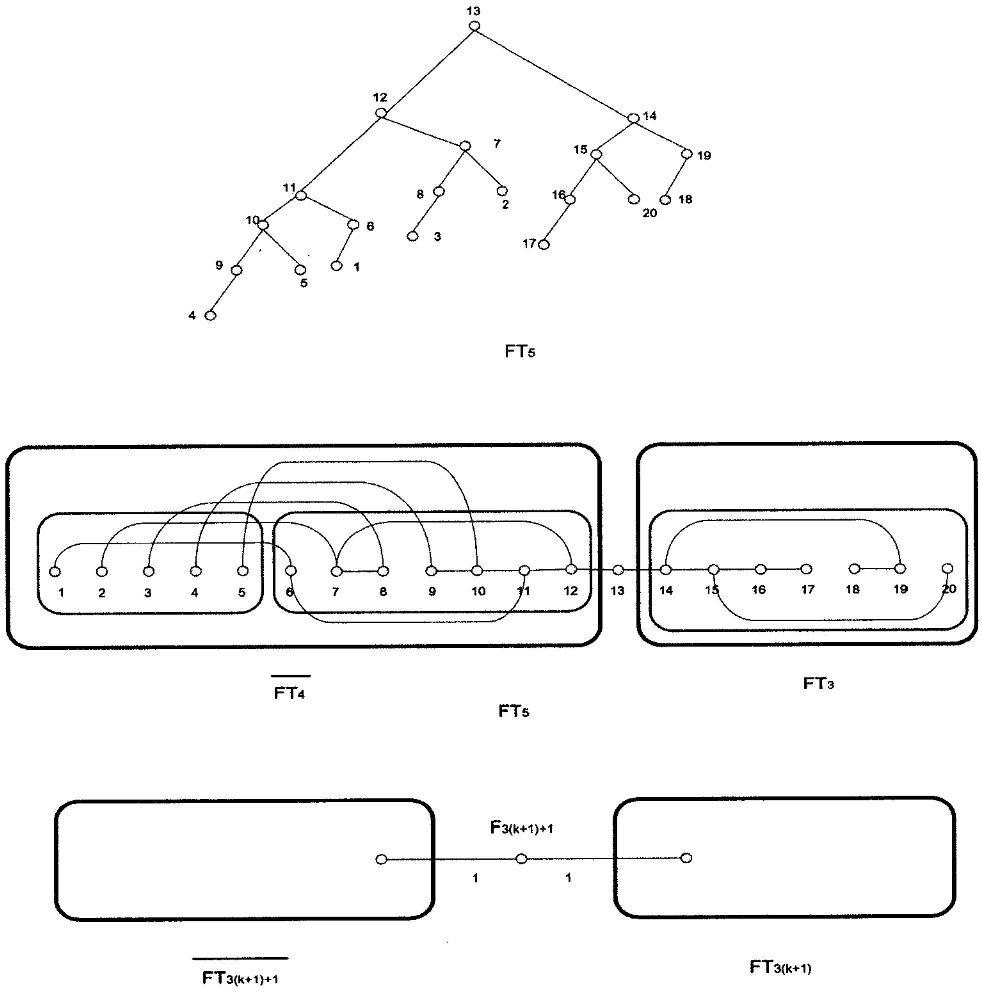


그림 13 $FT_{3k+1}, k \geq 1$의 경우의 예

이 되고 왼쪽 서브트리는 $FT_{3(k+1)+2}$의 전단계인 $FT_{3(k+1)+1}$의 역선형배열인 $\overline{FT_{3(k+1)+1}}$이고 오른쪽 서브트리는 $FT_{3(k+1)}$이 된다. 이때 추가되는 에지들인 루트 노드와 왼쪽 서브트리의 루트노드 그리고 루트 노드와 오른쪽 서브트리의 루트노드에 인접한 에지의 에지번호들은 둘 다 항상 1이다.

6. 결 론

일반적으로 피보나치 트리에 번호매김을 하는 방법 중 전위, 중위 그리고 후위순회방법을 사용했을 때 에지번호들의 집합은 피보나치 수 $F_k, k \geq 0$이 된다. 본 논문에서는 에지번호 집합의 조건을 피보나치 수 $F_{2k}, k \geq 1$, $F_{3k+2}, k \geq 0$으로 확장하여 번호매김방법을 제안했다. 이러한 결과는 피보나치 수 F_2를 첫 번째 수라고 하면 $F_{2k}, k \geq 1$인 경우에는 2배수 피보나치 수가 되고 $F_{3k+2}, k \geq 0$인 경우에는 3배수 피보나치 수가 되는데 이때 피보나치 수를 가장 적게 사용하여 같은 높이를 갖는 피보나치 트리에 에지번호매김을 할 수 있는 최적의 방법을 찾아보았다. 그러나 단지 에지번호의 수를 최소화하는 방법은 최적인 결과가 정해져 있으므로 피보나치 수의 성질을 이용해서 같은 점프값을 갖는 반대방향의 에지를 생략해서 분지수를 더 줄이거나 동시에 다른 중요한 망척도 중 하나인 지름을 유지하거나 줄이는 방법의 보완도 고려해 볼 수 있다. 향후 연구과제로는 상호연결망 설계시 원형군 그래프의 점프열을 에지번호 집합들을 사용하여 분지수를 최소로 하면서 동시에 다



$FT_{3(k+1)+2}$

그림 14 $FT_{3k+2}, k \geq 1$의 경우의 예

른 좋은 망척도를 갖는 개선된 위상을 만드는 연구를 할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: arrays, trees, hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California, 1992.

[2] S. N. Bhatt, F. R. K. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg, "Efficient embeddings of trees in hypercubes," *SIAM J. Compt.*, 21, pp.151-162, 1992.

[3] F. R. K. Chung, "On optimal linear arrangment of tree," *Comput. Math. Appl. 10,* pp.43-60, 1984.

[4] H.-S. Lim, *On the Labelings of Graphs and their Applications*, Ph. D. Thesis, Dept. Compuetr Science, KAIST, 1993.

[5] KAIST, A Study on the Design and Development of a High-Performance Parallel Compuetr, 1th annual report, 1993.

[6] H.-S. Lim, J.-H. Park, and K.-Y. Chaw, "Embedding trees in recursive circulants," *Discrete Applied Mathematics,* 69, pp.83-99, 1996.

[7] Y.-S. Kim, "The Research of Q-edge Labeling on Binomial Trees related to the Graph Embedding," *IEEK J. CI,* vol.42, Jan. pp.27-34, 2005.

[8] E. Horowitz, S. Sahni, and S. Anderson-Freed Fundamentals of Data Structures in C. Computer Science Press, p.493, 1993.

[9] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new Interconnection Topology," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol.4, no.1, Jan. 1993.
[10] Y.-S. Kim, M.-G. Roo, "Postorder Fibonacci Circulants," *KIPS J.*, vol.15-A, no.1, pp.27-34, 2008.
[11] Y.-S. Kim, "The Embedding on Postorder Fibonacci Circulant," *KIPS J.*, vol.14-A, no.4, pp.249-254, 2008.
[12] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, "Special numbers," in Concrete Mathmatics. Reading, MA: Addisson-Wesley, 1989, ch. 6.

김 용 석

1987년 전남대학교 계산통계학과(이학사) 1989년 전남대학교 전산통계학과(이학석사). 1997년 전남대학교 전산통계학과(이학박사). 1992년~현재 서남대학교 컴퓨터정보통신학과 교수. 관심분야는 계산이론(알고리즘, 그래프 이론), 병렬처리, 상호연결망, 임베딩