

# 액체 막이 입혀진 구 입자 배열을 지나는 기체 흐름

구상균

상명대학교 공업화학과  
(2009년 7월 31일 접수, 2009년 8월 18일 채택)

## Gas Flow through Arrays of Spheres Coated by Liquid Film

Sangkyun Koo

Department of Industrial Chemistry, Sangmyung University, Seoul 110-743, Korea  
(Received July 31, 2009; accepted August 18, 2009)

본 연구는 표면에 액체 막이 입혀진 구 입자를 지나는 기체의 흐름이 구 입자에 작용하는 항력을 결정하는 3상계 문제를 다룬다. 기체 흐름의 관성은 무시할 정도로 작으며, 구 입자의 표면에서 액체는 중력에 의해 흐르고 액체 막이 기체 흐름에 영향을 받지 않는 경우를 고려한다. SC (simple cubic), BCC (body centered cubic), FCC (face centered cubic) 각 배열의 구 입자들에 대해 외란 기법(perturbation method)과 멀티폴 전개(multipole expansion) 방법을 이용하여 입자들의 수력학적 상호 작용을 계산하고 궁극적으로 액체 막과 액체의 흐름이 기체 흐름에 미치는 영향을 수치적으로 결정한다. 근사적인 방법으로 액체 막의 효과에 구하고 이를 엄밀한 계산 값들과 비교한 결과, 대체로 일치함을 보인다.

Present study deals with a three phase flow problem of determining drag acting on spheres wetted by liquid flow by gas flow through the spheres in simple cubic (SC), body-center cubic (BCC) and face-centered cubic (FCC) array, respectively, when the inertia of gas is negligibly small. The liquid flow driven by gravity on the spheres is assumed to be unaffected by the countercurrent gas flow. A perturbation method coupled with a multipole expansion method is used to calculate the hydrodynamic interactions between spheres and hence determine the effect of liquid film and flow on the gas flow for each periodic array of spheres. An approximate method for evaluating the effect of the liquid film is also presented for simple estimations. It is found that the approximation results are in a reasonable agreement with the numerical calculations.

**Keywords:** liquid film, sphere, periodic array, three phase flow, stokes flow

### 1. 서 론

입자와 유체로 구성되는 시스템에 있어 유체의 흐름에 대해 많은 이론적 연구가 행해져 왔는데, 그 중 기본적인데서 중요한 문제로 다루어지는 것이 입자들을 지나는 유체의 흐름에 대한 분석이다. 특히 입자를 기준으로 하는 레이놀즈(Reynolds) 수가 매우 작아 유체의 관성력이 무시할 만한 유체 흐름에 대한 연구가 활발히 이루어졌는데, 대표적인 연구자들로는 Sorenson과 Stewart[1], Zick와 Homsey[2], Sangani와 Acrivos[3], Ladd[4] 등을 꼽을 수 있으며 최근에도 다양한 연구 결과들이 보고되고 있다[5-7]. 이들 연구 결과들은 공히 유체 흐름이 입자에 미치는 힘을 계산하여 제시하고 있는데, 실용적 측면에서 충전탑 또는 충전상(packed bed) 구조에서 유량과 압력의 관계를 구하는 데 이용된다.

그러나 실제 사용되는 충전탑의 경우 충전재로쓰이는 고체와 원료 물질인 기체와 액체가 공존하는 3상계(三相界)인 경우가 많아 입자와 단일 유체로 구성된 시스템의 연구 결과를 그대로 적용하기에는 무리가 따른다. 이 3상계 흐름에 대해서는 실험적으로나 이론적으로 많은

연구가 진행되었는데[8-10], 입자 단위의 미시적 시각에서 다양한 입자 배열에 대해 분석한 경우는 매우 드물다. 본 연구에서는 고체-액체-기체로 이루어지는 3상계를 미시적으로 다룬다. 구체적으로 여러 형태로 배열된 구 입자 각각에 대해, Figure 1에 보는 바와 같이, 액체가 구 입자의 정상점으로 유입되어 입자의 표면에 막을 형성하면서 중력에 의해 흘러내린 후 구의 최저점에서 유출되고 또 기체와 액체의 평균 흐름이 서로 역방향인 경우를 다룬다. 액체 막의 존재나 액체의 흐름이 기체의 흐름에 미치는 영향을 정확한 수치 해석 방법을 이용하여 구한다.

액체 막이 입혀진 구 입자를 지나는 유체의 흐름은 비단 충전탑의 경우에 국한하지 않는다. 마이크로 크기의 구 입자의 표면에 액체 막을 입혀 코어(core)-셸(shell) 구조를 만드는 공정인 마이크로엔캡슐레이션(microencapsulation) 공정도 그 예가 될 수 있다[11]. 이 공정은 기능성 소재를 만드는 방법으로서 제약, 바이오, 에너지 분야 등 다양한 분야에서 이용된다. 또 최근에도 액체 막이 입혀진 입자들간의 수력학적상호 작용에 대한 연구 결과[12]도 발표되고 있는 등 다양한 응용 분야를 가진다.

본 연구에서는 SC (simple cubic), BCC (body centered cubic), FCC (face centered cubic) 배열을 가지는 구 입자에 대해, 그 입자의 표면

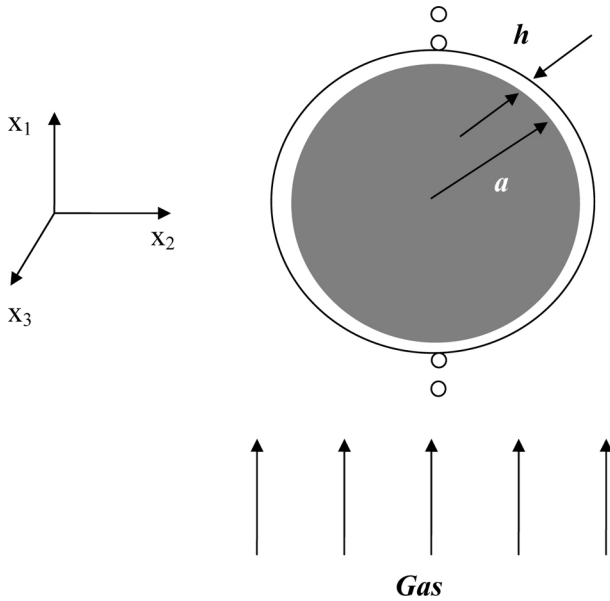


Figure 1. The schematic diagram for a 3 phase flow system.

에 형성된 액체 막과 액체의 흐름이 구 입자를 지나는 기체 흐름에 미치는 영향을 외란(perturbation) 기법과 멀티폴 전개(multipole expansion) 방법을 이용해서 정확하게 계산함으로써 구 입자에 걸리는 항력(drag)을 결정한다. 그리고 근사적인 방법으로 구한 항력과 비교해 본다.

## 2. 이론과 계산 방법

### 2.1. 이론적 고찰

본 연구는 액체가 구 입자를 적시면서 얇은 막을 형성하고 이 입자를 포함하는 단위 셀(unit cell)이 주기적으로 무한히 펼쳐진 계를 다룬다. Figure 1에 나타낸 바와 같이 액체는 중력에 의해 구 입자의 표면을 따라 흐르며 기체가 중력이 작용하는 역방향으로 흐른다. 입자의 크기를 기준으로 하는 레이놀즈(Reynolds) 수가 작아서 기체의 속도는 다음의 Stokes 운동 방정식과 연속 방정식을 따른다.

$$-\nabla p_G + \eta_G \nabla^2 \mathbf{v}_G = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_G = 0, \quad (2)$$

여기서  $p_G$ 는 기체의 압력,  $\mathbf{v}_G$ 는 기체의 속도,  $h_G$ 는 기체의 점도이다. 기체와 액체는 입자 표면에서 미끄럼 없음(no-slip) 조건과 기체-액체 계면에서 통상의 운동학적 조건을 만족한다. 그리고 기체 흐름에 대해 구 입자를 포함하고 있는 단위 셀이 주기적으로 펼쳐져 있으므로 기체의 유속도 주기성(periodicity)과 다음의 관계를 만족한다.

$$\frac{1}{\tau} \int_{V_G} \mathbf{v}_G dV = \mathbf{V}_G, \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{V}_G$ 는 단위 셀을 통하는 겉보기 기체 속도,  $\tau$ 는 단위 셀의 부피,  $V_G$ 는 단위 셀내 기체가 차지하는 부피이다.

구 입자와 기체 흐름만이 있는 계에서 추가적으로 구 입자의 표면에 액체 막이 형성되면 어떤 변화를 가져오는지 보기 위하여 액체의 유속과 액체 막의 두께에 관해 알아야 한다. 액체의 흐름은 액체의 유입 및 유출 형태와 계면에서의 젖음성(wetting) 등에 따라 영향을 받지만 본 연구에서는 이론적 해석을 위해 두 가지 가정을 한다. 첫째, 액체는 구 입자의 정점 영역에서 유입되어 구 입자의 표면을 완전히 적시면서 막을 형성하고 그 반대 위치인 최저점 영역에서 유출된다. 둘째, 액체의 흐름은 중력에 의해 지배를 받는 데 기체의 흐름이 주어지면 액체 막은 중력 외에 기체-액체 계면에서 기체 흐름에 의한 전단력(shear force)을 받게 된다. 본 연구에서는 기체의 흐름이 액체 흐름에 미치는 영향이 매우 작은 경우 즉 기체 흐름에 의한 전단력보다 중력의 영향이 훨씬 큰 경우를 다룬다. 전단력과 중력의 크기 규모는 각각  $O(\eta_G V_G/a)$ 와  $O(\rho_L g h)$ 이고  $a$ 는 구의 반경,  $\rho_L$ 은 액체의 밀도,  $g$ 는 중력가속도,  $h$ 는 액체 막의 두께이다. 이들 양으로부터 기체 유속의 적정 범위를 정할 수 있다.

액체 막의 두께  $h$ 가 구 입자의 반경  $a$ 에 비해 매우 작을 때, 중력의 작용에 의해 형성되는 액체의 유속은 운동 방정식과 통상의 경계 조건에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{v}_L = \frac{\rho_L g \sin \theta}{2\eta_L} [2hz - z^2] \mathbf{e}_\theta, \quad (4)$$

여기서  $z$ 는 구 표면으로부터 거리,  $\mathbf{e}_\theta$ 는 구 좌표 계에서 평균적인 액체 흐름과 반대 방향인  $x_1$ 축과 이루는 극각(polar angle)  $\theta$  방향 단위 벡터이다. 액체의 속도가 결정되면 이를 이용하여 유량과 액체 막 두께에 관한 식을 얻을 수 있다. 유량은 액체의 속도를  $z$ 와 방사각  $\varphi$ 에 대해 적분함으로써 다음 식을 얻을 수 있다.

$$q_L = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v_L a \sin \theta dz d\varphi = \frac{2\pi \rho_L g a h^3 \sin^2 \theta}{3\eta_L}. \quad (5)$$

주어진  $q_L$ 에 대해 액체 막의 두께  $h$ 는

$$h = h_0 \sin^{-2/3} \theta, \quad h_0 = \left( \frac{3\eta_L q_L}{2\pi a \rho_L g} \right)^{1/3} \quad (6)$$

로 주어진다. 따라서 기체-액체 계면 즉  $z = h$ 에서 액체의 유속은 다음과 같다.

$$\mathbf{v}_{L,\theta} = V_L^* \sin^{-1/3} \theta, \quad V_L^* = \frac{\rho_L g h_0^2}{2\eta_L} \quad (7)$$

액체 막의 두께와 액체 유속을 결정하였으므로 다시 기체의 속도를 결정하는 문제를 고려한다. 액체 막의 두께는 구의 반지름에 비해 충분히 작으므로 기체의 속도를 구하기 위해 외란 기법(perturbation method)을 이용한다. 먼저 기체의 속도  $\mathbf{v}_G$ 를 작은 매개 변수  $\varepsilon$ 에 대해 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_G^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}_G^{(1)} + \dots \quad (8)$$

여기서  $\varepsilon$ 은 액체 막의 두께 비율  $h_0/a$ 로 간주할 수 있다. 그리고 기

체-액체 계면 즉  $r = a+h$  에서 기체와 액체 속도의 연속성을 이용하고, 계면 속도를  $r = a$  ( $z = 0$ )에서의 속도에 대해 전개하면 다음의 경계 조건들을 얻는다

$$\mathbf{v}_G^{(0)}(a) = \mathbf{v}_L^{(0)}(0) \approx 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_G^{(1)}(a) = -\frac{ah}{h_0} \frac{\partial \mathbf{v}_G^{(0)}(a)}{\partial r} + \mathbf{v}_L^{(1)}(0). \tag{10}$$

여기서  $\mathbf{v}_L(0)$ 의 경우 운동 방정식과 연속 방정식의 각 성분을 스케일링(scaling)하여 대입하고 기체-액체 계면의 경계 조건을 이용해서 얻는데,  $\mathbf{v}_L^{(1)}(0)$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{v}_L^{(1)}(0) = \frac{V_L^*}{\sin \theta} \left( \frac{3}{4} + \frac{2}{9} \cot^2 \theta \right) \tag{11}$$

**2.2. 수치 해석**

기체의 속도를 구하기 위해 외란 기법과 함께 Mo and Sangani[5]가 제시한 멀티폴 전개 방법을 이용한다. 간략히 이 방법은 Stokes 운동 방정식의 공식적 해(formal solution)를 그 식의 주기적 기본 특이해(periodic fundamental singular solution)의 도함수(derivatives)로 나타내는 것이다. 이 공식 해는 많은 미지의 계수들을 포함하고 있으며 입자를 포함하는 단위 셀이 주기적으로 무한히 펼쳐져 있다는 가정과 지배 방정식인 Stokes 운동 방정식을 만족한다. 따라서 이 계수들은 각 입자들의 표면에서의 공식 해를 전개하고 경계 조건을 적용함으로써 결정된다. 구 입자  $\alpha$  주변의 공식 해 전개는 잘 알려진 Lamb의 해[13]를 이용하여 구 조화 함수(spherical harmonics)로 나타낸다.

$$\mathbf{v}_G(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (c_n r^2 \nabla p_n^\alpha + b_n r p_n^\alpha) + \nabla \times (\mathbf{r} \chi_n) + \nabla \mu_n^\alpha \right], \tag{12}$$

여기서  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha$ 이고

$$c_n = \frac{n+3}{2(n+1)(2n+3)}, \quad b_n = \frac{-n}{(n+1)(2n+3)}. \tag{13}$$

또 식 (12)의  $p_n, \chi_n, \mu_n$  는  $n$ 차 구 조화 함수이다. 음수 차수의 조화 함수는  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 에서 특이 해(singular solution)를 가지고, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{n-1}^\alpha = \sum_{m=0}^n \left( P_{nm}^{s,\alpha} Y_{nm} + \tilde{P}_{nm}^{s,\alpha} \tilde{Y}_{nm} \right) r^{-n-1} \quad (n > 0) \tag{14}$$

$$\chi_{n-1}^\alpha = \sum_{m=0}^n \left( T_{nm}^{s,\alpha} Y_{nm} + \tilde{T}_{nm}^{s,\alpha} \tilde{Y}_{nm} \right) r^{-n-1} \quad (n > 0) \tag{15}$$

$$\mu_{n-1}^\alpha = \sum_{m=0}^n \left( \Phi_{nm}^{s,\alpha} Y_{nm} + \tilde{\Phi}_{nm}^{s,\alpha} \tilde{Y}_{nm} \right) r^{-n-1} \quad (n > 0) \tag{16}$$

여기서  $P_{nm}^{s,\alpha}, \tilde{P}_{nm}^{s,\alpha}, T_{nm}^{s,\alpha}, \tilde{T}_{nm}^{s,\alpha}, \Phi_{nm}^{s,\alpha}, \tilde{\Phi}_{nm}^{s,\alpha}$  는 조화 함수의 특이(singular) 항의 계수들이고

$$Y_{nm} = P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad \tilde{Y}_{nm} = P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \tag{17}$$

는 표면 조화 함수(surface harmonics)이며  $P_n^m$  은 associated Legendre polynomial,  $\theta$ 와  $\varphi$ 는 각각 극각(polar angle)과 방위각 (azimuthal angle)으로서 직교 좌표계와  $x_1 - x_1^\alpha = r \cos \theta, x_2 - x_2^\alpha = r \sin \theta \cos \varphi, x_3 - x_3^\alpha = r \sin \theta \sin \varphi$ 의 관계를 갖는다. 음수가 아닌  $n$ 차 조화 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$P_n^\alpha = \sum_{m=0}^n \left( P_{nm}^{r,\alpha} Y_{nm} + \tilde{P}_{nm}^{r,\alpha} \tilde{Y}_{nm} \right) r^n \quad (n \geq 0) \tag{18}$$

이 식은  $\chi_n, \mu_n$ 에 대해서도 유사하게 적용된다. 구 입자들의 표면 즉  $r = a$ 에서의 속도에 관한 경계 조건을 만족하기 위해 다음의 식들을 이용하면 편리하다.

$$v_{G,r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (nc_n + b_n) r p_n + (n/r) \mu_n \right], \tag{19}$$

$$\nabla_s \cdot \mathbf{v}_{G,s} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1) \left[ c_n r p_n + \mu_n / r \right], \tag{20}$$

$$\mathbf{e}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_{G,s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1) \chi_n / r, \tag{21}$$

여기서  $v_{G,r}$ 는 방사 방향의 기체 속도이고  $\mathbf{v}_{G,s} = v_{G,\theta} \mathbf{e}_\theta + v_{G,\phi} \mathbf{e}_\phi$  은 법선 방향의 기체 속도로 구 입자의 표면에서의 속도를 의미한다. 그리고  $\nabla_s$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_s. \tag{22}$$

위의 표현들은  $\mathbf{v}_G^{(0)}$ 와  $\mathbf{v}_G^{(1)}$ 에 동등하게 적용된다. 이들의 해는 주로 경계 조건을 통해 달라진다. 구 표면에서 속도를  $\mathbf{v}^B$ 로 표기하자. 그러면  $\mathbf{v}_G^{(0)}$ 와  $\mathbf{v}_G^{(1)}$  문제에 대해  $\mathbf{v}^B$ 는 식 (9)와 (10)의 우변에 각각 주어진다. 속도  $\mathbf{v}^B$ 도 식 (19)-(21)과 마찬가지로  $v_r^B, \nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^B, \mathbf{e}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_s^B)$ 의 형태로 바꾸고 구 조화 함수로 전개한다. 예를 들어  $\nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^B$ 는 다음과 같으며  $v_r^B$ 과  $\mathbf{e}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{v}_s^B)$ 도 유사하다.

$$\nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^B = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[ (\nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^B)_{nm} Y_{nm} + (\nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^B)_{nm} \tilde{Y}_{nm} \right] \tag{23}$$

이 계수들은 구 표면에 대해 표면 조화 함수를 곱한 함수를 적분함으로써 얻을 수 있다. 예를 들면

$$\nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^{B(0)} = \frac{2V_L^* \cot \theta}{3 \sin^{1/3} \theta} \tag{24}$$

이므로 그 계수는 다음의 식으로 구한다.

$$(\nabla_s \cdot \mathbf{v}_s^B)_{nm}^{(0)} = \frac{2V_L^* \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^{-1/3} \theta \cos \theta Y_{nm} d\theta d\varphi}{3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{nm}^2 d\theta d\varphi} \tag{25}$$

이 적분은 구의 표면을 작은 요소들로 세분하여 수치적으로 계산하여 얻는다. 이렇게 얻은 계수들은 경계 조건으로 사용한다. 식 (19)-(21)과 표면 조화 함수의 직교성(orthogonality)을 이용하면 경계 조건은 다음의 형태로 정리할 수 있다.

$$[-(n+1)c_{-n-1} + b_{-n-1}]P_{nm}^{s,\alpha} a^{-n} + [nc_n + b_n]P_{nm}^{r,\alpha} a^{n+1} - (n+1)\Phi_{nm}^{s,\alpha} a^{-n-2} + n\Phi_{nm}^{r,\alpha} a^{n+1} = (v_r^B)_{nm}, \quad (26)$$

$$-n(n+1)[P_{nm}^{s,\alpha} a^{-n} + P_{nm}^{r,\alpha} a^{n+1} - \Phi_{nm}^{s,\alpha} a^{-n-2} + \Phi_{nm}^{r,\alpha} a^{n+1}] = (\nabla_s \cdot v_s^B)_{nm}, \quad (27)$$

$$-n(n+1)[T_{nm}^{s,\alpha} a^{-n-2} + T_{nm}^{r,\alpha} a^{n-1}] = e_r \cdot (\nabla \times v_s^B)_{nm}, \quad (28)$$

이 식들은  $\tilde{Y}_{nm}$ 의 계수들에 대해서 유사하게 적용된다. 위 식의 특이 계수(singular coefficients)는 구 입자  $\alpha$ 의 자체에 의한 효과를 나타내고 정규 계수(regular coefficients)는 다른 구 입자들과 외부 조건에 의한 효과를 나타낸다. 또한 위 식들의 우측 항들은 외부 조건에 의해 주어진다.

앞서 언급된 바와 같이 기체의 속도는 Stokes 운동 방정식의 일반해로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_i(\mathbf{x}) = V_i^\infty(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha=1}^N M_j^\alpha \cdot G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha), \quad (29)$$

여기서 미분 연산자  $M_j^\alpha$ 와 주기적 기본 특이해  $G_{ij}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$M_j^\alpha = A_j^\alpha + B_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial k} + C_{jkl}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \dots, \quad (30)$$

$$G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha) = S_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha) \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} S_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha), \quad (31)$$

$$S_m(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha) = \frac{(-4\pi^2)^{1-m}}{\pi\tau} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} k^{-2m} \exp[-2\pi\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha)], \quad m=1,2. \quad (32)$$

위 식에  $\mathbf{k}$ 는 역 격자(reciprocal lattice)의 단위 벡터이고 상수  $A_j^\alpha, B_{ij}^\alpha, C_{jkl}^\alpha, \dots$  등은 힘(force)의 모노폴(monopole), 다이폴(dipole)이라 하며 경계 조건으로부터 이들 값들을 결정할 수 있다. 그러나 이 상수들이 tensor의 형태로 수치 해석이 복잡해지므로 이를 좀 더 효율적으로 계산하기 위하여, 앞서 언급한 바와 같이, Lamb의 해를 이용한다. Lamb의 해에서 특이 항과 정규 항들의 계수를 Stokes 식의 일반 해들의 상수와 상관성을 유도하여 복잡한 tensor를 취급하지 않고 효율적으로 계산할 수 있게 되는 것이다.

식 (26)-(28)의 경계 조건을 이용하여 Lamb의 해의 계수들을 구하고 Stokes 식의 일반 해와의 상관성을 이용하면 시스템의 거시적 물성, 예를 들면 입자에 가해지는 힘을 간단히 구할 수 있다. 구 입자  $\alpha$ 에 중력 방향과 반대인  $x_1$  방향으로 가해지는 힘은  $P_{10}^{s,\alpha}$ 로 나타낼 수 있다.

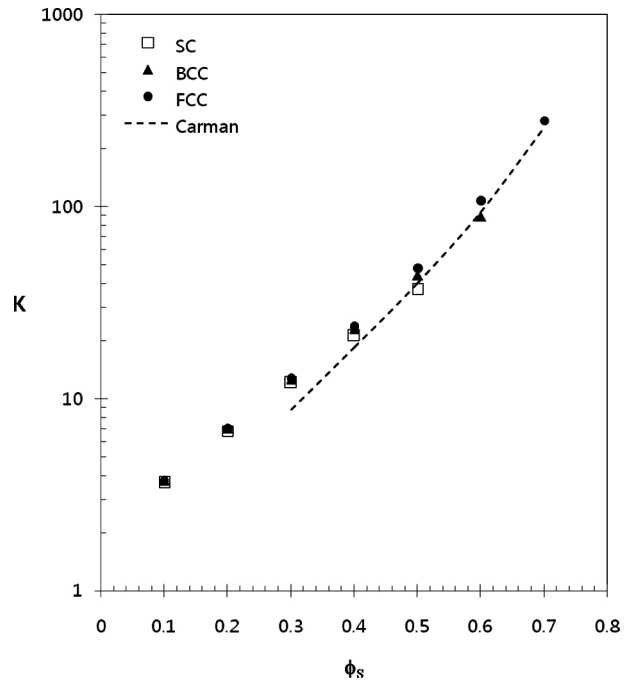


Figure 2. The drag coefficient  $K$  as a function of  $\phi_s$  for each periodic array.

$$F^\alpha = -4\pi\eta_G P_{10}^{s,\alpha}. \quad (33)$$

구 입자에 가해지는 힘을 구하면 다음의 관계를 이용하여 기체상에서  $x_1$  방향의 압력 차이를 구할 수 있다.

### 3. 결과 및 고찰

물리적으로 기체의 흐름에 의해 액체 막으로 싸인 구 입자에 작용하는 힘은 크게 세 가지로 구분된다. 구 입자만 존재할 때 작용하는 힘( $F^I$ ), 액체막의 존재로 인해 발생하는 힘( $F^{II}$ ), 그리고 기체 흐름에 역방향으로 형성되는 액체의 흐름에 기인한 힘( $F^{III}$ )이다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$F = F^I + F^{II} + F^{III} = 6\pi\eta_G a V_G \left[ K + \frac{h_0}{a} K_1 + \frac{V_L^*}{V_G} K_2 \right] \quad (34)$$

여기서  $K$ 는 액체 막이 없을 때의 구입자에 작용하는 무차원의 항력(drag)을 나타낸다. 그리고  $K_1$ 는 유한한 두께를 가진 액체 막의 효과이며  $K_2$ 는 액체 막의 액체의 흐름에 의한 효과이다. 액체가 기체-액체 계면을 따라 흐를 때 기체를 끌어내리게 되고 이를 보상하기 위해 계면에서 조금 더 떨어진 위치에서는 기체의 흐름이 빨라지기 때문이다. 식 (34)에서 보듯이  $F^{II}$ 는 액체 막의 특성적 두께  $h_0$ 에,  $F^{III}$ 는 액체의 특성적 속도  $V_L^*$ 에, 그리고  $F^I$ 과  $F^{II}$ 는 공히 기체의 겉보기 속도  $V_G$ 에 직선적으로 비례한다. 그리고 각 무차원 항력  $K, K_1, K_2$ 는 구 입자간의 수력학적 상호 작용을 수치적으로 계산함으로써 얻게 된다.

Figure 2에 구 입자의 부피 분율에 따른 무차원 항력  $K$ 에 대한 수치 계산 결과를 나타내었다. 구의 배열이 SC, BCC, FCC 세가지 배열에

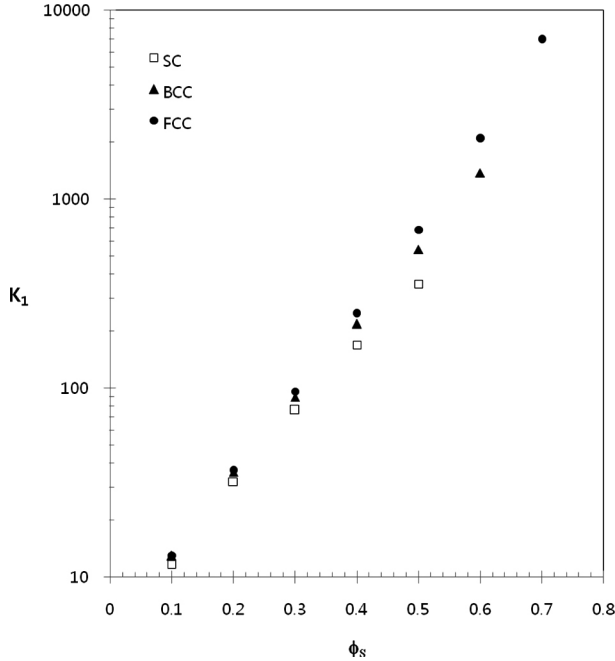


Figure 3. The coefficient  $K_1$  as a function of  $\phi_s$  for each periodic array.

대해 나타내었는데 이는 기존의 연구 결과들과 일치함을 보이고 있다 [2,3,5,6]. 여기에 충전탑의 항력에 관한 식으로 잘 알려진 Carman식 [14]을 함께 비교하였다.

$$K = \frac{10\phi_s}{(1-\phi_s)^3} \tag{35}$$

위 Carman식은 입자의 부피 분율  $\phi_s$ 가 높은 경우에 해당되는데  $\phi_s$ 가 0.4~0.5에서는 SC에, 0.6 근처에서는 BC, 그 이상에서는 FCC에 가깝다.

다음으로 본 연구의 가장 중요한 부분이라 할 수 있는  $K_1$ 의 수치 계산 결과를 Figure 3에 나타내었다.  $K_1$ 값이  $K$ 에 비해 대략 10배 정도의 크기를 가지고  $K$ 와 마찬가지로  $\phi_s$ 가 작을 때는 입자의 배열 구조에 따른 차이가 미미하나  $\phi_s$ 가 커질수록 FCC > BCC > SC 순으로 약간씩 더 큰 값을 보인다.

근사적인 방법으로  $K_1$ 값을 예측해 본다. 액체 막이 구 입자의 크기에 비해 얇으므로 액체 막이 없는 상태의 식, 즉  $F = 6\pi\eta_G a V_G K(\phi_s)$ , 에서  $a \rightarrow a + h_0$  과  $\phi_s \rightarrow \phi_s + \phi_L$  을 대입함으로써 근사식을 도출할 수 있다.

$$F = 6\pi\eta_G a V_G (a + h_0) K(\phi_s + \phi_L) = 6\pi\eta_G a V_G \left\{ K(\phi_s) + \frac{h_0}{a} \left[ K(\phi_s) + \phi_L \frac{a}{h_0} \frac{dK(\phi_s)}{d\phi_s} \right] + O\left(\frac{h_0}{a}\right)^2 \right\} \tag{36}$$

식 (34)와 연계하면 다음의 관계를 얻는다.

$$K_1 = K + \phi_L \frac{a}{h_0} \frac{dK}{d\phi_s} \tag{37}$$

여기서  $\phi_L$ 은 단위 셀내 액체의 부피 분율이며 다음과 같다.

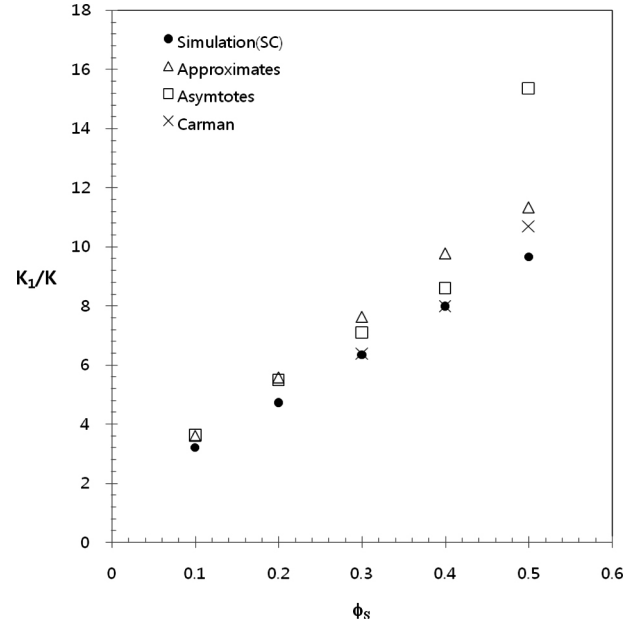


Figure 4. The coefficient ratio  $K_1/K$  as a function of  $\phi_s$  for the simple cubic (SC) array of spheres. The approximates are from Eq.(39). The asymptotes are obtained using Eq.(39) and Eq.(40) whereas the data denoted by 'Carman' is from Eq.(35) and Eq.(39).

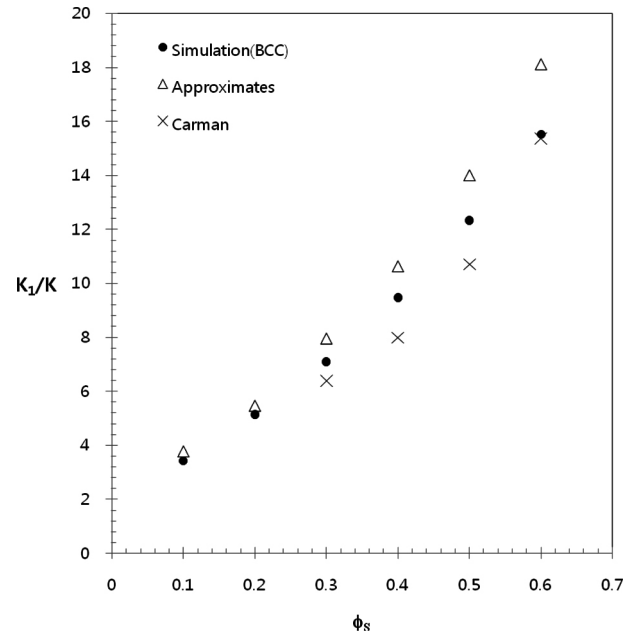


Figure 5. The coefficient ratio  $K_1/K$  as a function of  $\phi_s$  for the body-centered cubic (BCC) array of a sphere. The approximates are from Eq.(39) and the data denoted by 'Carman' is from Eq.(35) and Eq.(39).

$$\phi_L = n \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ha^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 3.881\phi_s (h_0/a) \tag{38}$$

따라서 식 (37)은

$$K_1 = K + 3.881\phi_s \frac{dK}{d\phi_s} \tag{39}$$

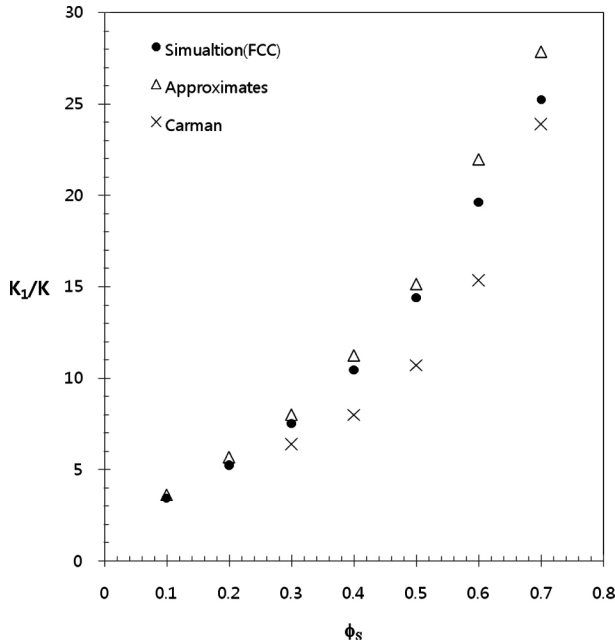


Figure 6. The coefficient ratio  $K_1/K$  as a function of  $\phi_s$  for the face-centered cubic (FCC) array of a sphere. The approximates are from Eq.(39) and the data denoted by 'Carman' is from Eq.(35) and Eq.(39).

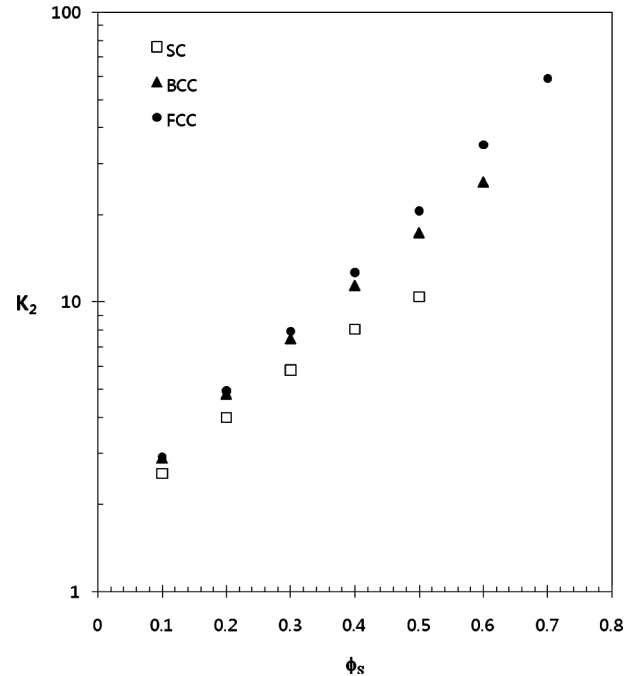


Figure 8. The coefficient  $K_2$  as a function of  $\phi_s$  for each periodic array.

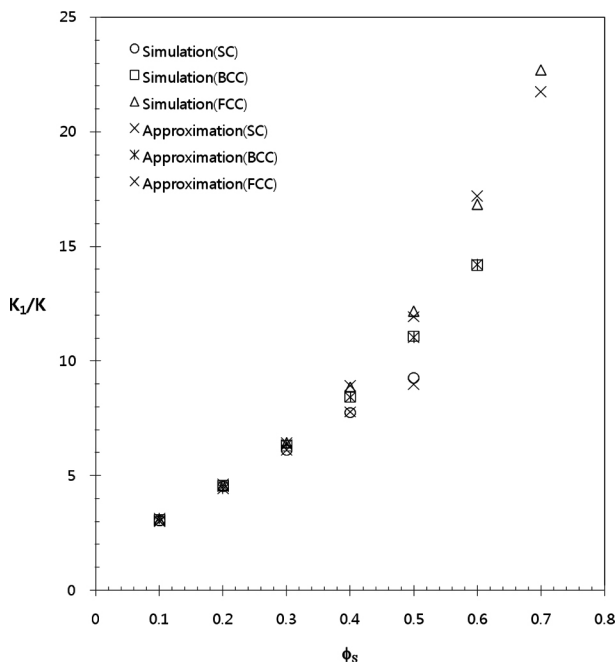


Figure 7. The coefficient ratio  $K_1/K$  as a function of  $\phi_s$  for the case of constant film thickness,  $h = h_0$ . The approximates are from Eq.(39) for  $h = h_0$ .

우변의 첫 번째 항은 액체 막이 입자의 겉보기 크기를 증가시킨 효과 즉  $a \rightarrow a + h_0$  이고 두 번째 항은 단위 셀 내에서 기체가 차지하는 부피를 줄인 효과 즉  $1 - \phi_s \rightarrow 1 - \phi_s - \phi_L$  이다. Figures 4~6에서 구 입자의 각 배열에서 위 식 (39)을 이용한  $K_1/K$ 의 근사 결과와 엄밀한 수치 계산 결과를 비교하였다. 근사식의 미분 항  $dK/d\phi_s$ 은 수치적으로 구한 결과를 사용하였다. 근사식의 결과들이 엄밀한 수치 계산 결

과와 합리적 수준에서 일치함을 보인다. 근사치들이 공히 약간 더 큰 수치를 보이는 데 이는 근본적으로 근사식이 액체 막의 두께를 일정하다고 간주하기 때문이다. 이 차이를 확인해 보기 위하여 액체 막의 두께  $h = h_0 \sin^{-2/3} \theta$  대신 두께가 일정한  $h = h_0$ 의 경우에 대해 엄밀한 수치 계산과 근사식을 적용하였다. 그 결과를 Figure 7에 나타내었는데 계산치와 근사치가 정확히 일치하는 결과를 보여주고 있다.

그리고 Carman식과 함께 SC의 경우 다음의 Sangani와 Acrivos [3]의 이론식에 근거한 근사 결과도 함께 나타내었다.

$$K(\phi_s)^{-1} = 1 - 1.7601\phi_s^{1/3} + \phi_s - 1.5593\phi_s^2 + 3.9799\phi_s^{8/3} - 3.10734\phi_s^{10/3} + O(\phi_s^{11/3}) \quad (40)$$

식 (40)은  $\phi_s$ 가 작은 영역에서는 정확도가 높으나  $\phi_s$ 가 증가할수록 오차가 커지는 데  $\phi_s = 0.4$ 까지는 엄밀한 계산 결과에 대체로 일치하나  $\phi_s = 0.5$ 에서 정확성이 떨어진다. Carman식을 사용한 경우 Figure 2의  $K$ 값과 유사한 경향을 보인다.

앞서 액체의 유입이  $\theta = 0$ 에서 유출은  $\theta = \pi$ 에서 일어난다고 가정하였다. 그러나  $K_2$ 의 계산에서는  $v_L^{(1)}(0)$ 의 적분이 필요하므로 이 가정을 그대로 적용하기에는 무리가 따른다. 따라서 액체의 유입과 유출이 일어나는 위치를 이들 발산점 부근의 영역으로 설정하는 것이 필요하다.  $K_2$ 의 계산을 위해  $\theta_0 = \pi/20$ 로 하고 액체의 유입이 일어나는 영역을  $\theta < \theta_0$ , 액체가 유출되는 영역을  $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$ 로 정하였다. 이는 Wild와 Potter[15]의 실험 결과에서도 적절한 설정임을 알 수 있다. 그들은 구 입자의 정점에서 액체를 흘리면서 액체 막의 위치 별 두께를 광학적 방법으로 측정하였는데,  $\theta = 90^\circ$ 에서 최저 두께를 보이고  $\theta = 10^\circ$  이하에서 액체 막의 두께가 크게 증가하는 결과를 보여주고 있다. 따라서 액체의 도입부를  $\theta_0 = \pi/20 (= 9^\circ)$  이하로 하는 것은 적절하며  $\theta < \theta_0$ 와  $\pi - \theta_0 < \theta < \pi$ 에서 액체 막의 두께와 기체-액체 계면 액체의 유속은 다음과 같다.

$$h = h_0 \sin^{-2/3} \theta_0, \quad u_{L,\theta} = V_L^* \sin^{-1/3} \theta_0 \quad (41)$$

경계 조건에서도 이 부분을 감안하여 최종적으로  $K_2$ 를 계산한 결과를 Figure 8에 나타내었다.  $K_2$ 의 크기를 보면  $K_1$ 과  $K$ 에 비해서도 작으며 이들과 마찬가지로 동일  $\phi_s$ 에서  $K_2$ 의 크기는 FCC, BCC, SC의 순이다.

전체적으로  $F^{II}$ 는  $h_0$ 에 선형적으로 비례하고  $h_0$ 가 구의 반경  $a$ 에 비해 작으나  $\phi_s$ 가 0.5이상에서는  $K_1/K$ 가 10 이상으로 높아  $F^I$ 의 크기에 준하는 값을 가질 수도 있는 반면,  $F^{III}$ 의 경우  $K_2$ 가  $K$ 의 1/10 수준으로 작고  $V_L^*$ 도  $V_C$ 에 비해 매우 적은 값이므로 그 크기가  $F^I$ 과  $F^{II}$ 에 비해 매우 작다. 따라서 액체 막의 존재 자체가 항력을 상당히 증가시키는 요인임을 확인 할 수 있다.

#### 4. 결 론

액체가 구 표면에 막을 형성해 중력에 의해 흐르고 그 역방향으로 기체가 구 입자를 지나는 3상계 흐름을 미시적으로 분석하여 기체 흐름에 의해 젖은 구 입자에 미치는 힘을 계산하였다. 액체 막이 기체 흐름에 영향을 받지 않고 기체 흐름의 관성이 무시할 정도로 작은 경우를 고려하였다. 여기서 구 입자에 작용하는 힘은 액체 막이 없는 상태에서 기체 흐름이 작용하는 힘( $F^I$ ), 액체막의 존재에 의한 힘( $F^{II}$ ), 액체의 흐름에 의한 힘( $F^{III}$ )의 합으로 나타난다. 먼저  $F^I$ 의 경우 SC, BCC, FCC 각 배열에 따른 계산 결과, 구의 부피 비율( $\phi_s$ )이 낮을 때는 별 차이가 없으나  $\phi_s$ 가 증가하면 FCC > BCC > SC의 순으로 계산 값의 차이가 나타났다. 잘 알려진 Carman식은  $\phi_s = 0.4-0.5$ 에서 SC에,  $\phi_s = 0.6$ 부근에서 BCC, 그리고 0.7에서 FCC에 가까운 결과를 보인다. 각각 액체 막의 겹보기 두께와 액체의 겹보기 속도에 선형적으로 비례하는 액체 막과 액체의 흐름에 의한 항력( $F^{II}$ 과  $F^{III}$ )도 구의 배열 별로  $F^I$ 과 유사한 경향을 보인다. 크기 면에서는  $F^{II}$ 가  $F^{III}$ 에 비

해 크며  $\phi_s$ 가 0.5 이상에서는  $F^{II}$ 가  $F^I$ 에 상당하는 크기를 가질 수 있음을 알 수 있다. 또 근사적인 방법으로  $F^{II}$ , 즉 액체 막에 의한 항력을 구하였는데 엄밀한 계산 값과 잘 맞는 결과를 보인다.

#### 감 사

본 연구는 2008년도 상명대학교 자연과학연구소의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

#### 참 고 문 헌

1. J. P. Sorenson and W. E. Stewart, *Chem. Engng Prog.*, **29**, 819 (1974).
2. A. A. Zick and G. M. Homsy, *J. Fluid Mech.*, **115**, 13 (1982).
3. A. S. Sangani and A. Acrivos, *Int. J. Multiphase Flow*, **8**, 343 (1982).
4. A. J. C. Ladd, *J. Chem. Phys.*, **93**, 3484 (1990).
5. G. Mo and A. S. Sangani, *Phys. Fluids*, **6**, 1637 (1994).
6. S. Koo and A. S. Sangani, *Phys. Fluids*, **13**, 141 (2001).
7. K. H. Song and S. Koo, *J. Ind. Eng. Chem.*, **12**, 368 (2006).
8. D. C. Dankworth and S. Sundaresan, *AIChE J.*, **35**, 1282 (1989).
9. J. M. de Santos, T. R. Melli, and L. E. Scriven, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **23**, 233 (1991).
10. S. Koo and A. S. Sangani, *Phys. Fluids*, **13**, 141 (2001).
11. S. Kawano and H. Hashimoto, *J. of Fluids Engineering*, **119**, 397 (1997).
12. S.-M. Yang, L. G. Leal, and Y.-S. Kim, *J. of Colloid Interface Sci.*, **250**, 457 (2002).
13. H. Lamb, *Hydrodynamics* (Dover, New York, 1945).
14. P. C. Carman, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **15**, 150 (1937).
15. J. D. Wild and O. E. Potter, *Chem. Eng. J.*, **4**, 69 (1972).