대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 1, 123-142. Feb 2009

미적분의 기본정리에 대한 고찰
- 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로 -

정 연 준* · 이 경 화*

운동학 맥락은 미적분 학습에서 미적분의 형식적인 내용의 직관적인 이해의 원천으로 간주된다. 속도 그래프 아래의 넓이와 이동 거리 관계는 적분 영역에서 다루는 운동학적 맥락의 토대이며, 미적분의 기본정리가 역사적으로 발달한 맥락이다. 본 연구는 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 계산 사이의 관계를 통해서 미적분의 기본정리를 조명하고, 이를 통해서 교과서 및 학생들의 이해에서 나타나는 문제점을 분석하였다. 그리고 이상의 논의 결과를 종합하여 미적분의 기본정리에 대한 교육적 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

학교 수학에서 정적분은 넓이를 이용하여 지도하며, 미적분의 제 1 기본정리도 넓이를 이용하여 증명한다. 미적분의 제 1 기본정리에 의하면 함수의 그래프와 x축 사이의 넓이 함수를 미분하면 주어진 함수가 나온다. 이러한 결과의 의미를 '미분과 적분의 관계'에서 찾을 수도 있지만, '넓이 함수의 변화율'을 가지고 설명할 수도 있다. 변화율에서 의미를 찾으려는 것은 미적분의 역사에 비추어볼 때 타당한 시도이다. 접선 작도와 평면 도형의 넓이 계산이라는 기하학적 문제들에 대한 해법이 미분과 적분의 가장 오래된 역사적 기원으로 간주되지만, 미적분의 역사에서 등가속도 운동과 같은 물리적 현상에 대한 연구도 중요한 역할을 하였다. Gravemeijer와 Doorman(1999)은 운동의 속도와 거리 관계의 모델링을 미적분의 역사적발달의 출발점으로 간주한다. 17세기 초 Galilei의 자유낙하 운동과 투사체의 운동 연구는 수학 특히 기하학과 운동학적 맥락이 결합된 대표적인 역사적 사례이다(Baron, 2003: 5). 그런데 Toeplitz(1963)와 Medvedev(1991)에 의하면 Galilei의 자유낙하 운동 연구는 미적분의 기본정리를 함축하고 있다. 물체의 속도와 위치는 변화율이 나타나는 가장 기본적인 맥락이다. 미적분의 기본정리의 의미를 변화율을 통해서 설명하는 것은 자연스러운 일이라 할 수 있다.

1990년대부터 기술공학을 활용하여 미적분의 기본정리 지도를 개선하려는 연구가 활발히 진행되었다(Dubinsky, 1992; Dubinsky & Sch- wingendorf, 1991; Gordon, 1991; Suzuki, 2003; Tall, 1991; Thomas, 1995; Thompson, 1994). 이들은 공통적으로 컴퓨터와 그래픽 계산기가, 복잡한 계산 과정으로 인하여 이전에는 학생들이 직접 계산하는 것이 불가능하였던, 정적분 계산을 학생들이 수행하고 정적분

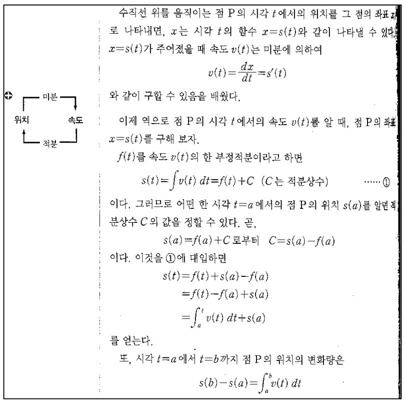
* 서울대 대학원, swamp_monk@lycos.co.kr
** 서울대, khmath@snu.ac.kr

계산의 규칙성을 발견하여 미분과 적분의 관계를 추론할 수 있게 한다고 보았다. 이러한 시도는 정적분 계산의 규칙성을 이용하여 미분과 적분의 관계를 제시하는 반면, 변화율의 의미를 통해서 개념적으로 또는 관계적으로 미적분의 기본정리를 학습하도록 하는 데에는 미흡한 점이 있는 것으로 보인다. 정적분 계산의 규칙성을 이용하여 미분과 적분의 관계를 드러내어 미적분의 기본정리를 지도하려는 연구들이 활발하게 진행된 것과 달리, 변화율 의미를 부여하는 것이 자연스러운 일임에도 불구하고, 변화율의 의미를 드러내어 미적분의 기본정리를 지도하는 방식에 대한 연구는 거의 진행되지 않고 있다. 또한 국내의 수학교육 연구에서 미적분의 기본정리는 교육적인 분석이나 대안적인 접근의 대상으로 주목받지 못하였다.

그러므로 역사적인 발달 과정을 고려하여 미적분의 기본정리를 도입한다는 것이 어떠한 것인지에 대하여 알려진 바가 거의 없다. 이 연구는 역사적 발달과정을 조망하여 미적분의 기본정리의 의미를 변화율을 통해서 다루는 것이 어떤 형태이며, 왜 중요한가를 밝히는 데 목적을 두고 있다. 이를 위해 미적분의 역사적 발달과정을 조망하여 변화율의 의미가 미적분의 기본정리와 어떻게 연결되어 있는지 살펴보고, 현행 교육과정에서 미적분의 기본정리를 어떻게 다루고 있으며 '넓이 함수의 변화율'의 의미를 얼마나 반영하고 있는지, 어떻게 개선할 수 있는지 살펴볼 것이다. 현행 교육과정에 따른 학습의 결과로 학생들이 어떤 이해 양상을 보이는지도 알아볼 것이다. 이를 기초로 역사적인 발달을 고려하여 변화율의 의미를 강조하는 것이 왜 필요한가를 다루고, 구체적으로 교과서 구성에 대한 시사점을 제시할 것이다.

Ⅱ. 미적분의 기본정리와 거리 계산법

변화율과 변화량 관계로 보면 미분은 변화량 함수에서 변화율 함수를 유도하는 과정이며, 미분을 통해 변화량 함수에 대한 정보만으로 변화율 함수를 결정할 수 있다. 이것은 역으로 변화율 함수에 대한 정보가 주어진다면 변화량 함수를 결정할 수 있다는 것을 시사한다. 미분 공식을, 미분 과정을 거꾸로 거슬러 올라가면 변화율 함수에서 변화량 함수를 구할 수 있다. 곧 속도 함수 v가 주어졌을 때 미분 과정을 거슬러 올라가면 위치 함수를 결정할 수 있다. 거리는 위치의 변화량을 의미하므로 위치 함수의 두 함수값의 차를 계산하면 구할 수 있다. 따라서 속도 함수 v가 주어지면 부정적분 $\int v$을 이용하여 물체가 움직인 거리를 계산할 수 있다. 이러한 방식의 접근은 [그림 Ⅱ-1]과 같이 수학 II 교과서에 포함되어 있다. 일반적으로 미적분 교재에서는 미분을 먼저 다루며, 부정적분을 미분의 역으로 도입한다. 그러므로 미분과 부정적분에 대한 지식만으로 거리 계산 등과 같은 변화량을 계산할 수 있다. 그럼에도 불구하고 부정적분을 다룰 때 거리 계산과 같은 변화율이 주어진 상황에서 변화량 계산을 같이 다루지 않는다.



수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 그 점의 좌표 x로 나타내면, x는 시각 t의 함수 $x=s(t)$와 같이 나타낼 수 있다. $x=s(t)$가 주어졌을 때 속도 $v(t)$는 미분에 의하여

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=s'(t)$$

와 같이 구할 수 있음을 배웠다.

이제 역으로 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 알 때, 점 P의 좌표 $x=s(t)$를 구해 보자.

$f(t)$를 속도 $v(t)$의 한 부정적분이라고 하면

$$s(t)=\int v(t)\,dt=f(t)+C \quad (C\text{는 적분상수}) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 그러므로 어떤 한 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치 $s(a)$를 알면 적분상수 C의 값을 정할 수 있다. 곧,

$$s(a)=f(a)+C \text{ 로부터 } \quad C=s(a)-f(a)$$

이다. 이것을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} s(t)&=f(t)+s(a)-f(a) \\ &=f(t)-f(a)+s(a) \\ &=\int_a^t v(t)\,dt+s(a) \end{aligned}$$

를 얻는다.

또, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)\,dt$$

[그림 Ⅱ-1] 부정적분과 거리 계산

앞에서 제시한 수학 II 교과서의 경우 부정적분을 이용하지만 결과적으로 정적분을 이용한 거리 계산법을 제시한다. 변화량 계산은 정적분의 활용으로서 다루어지는데, 여기에 미적분의 기본정리가 관련된다.

미적분의 기본정리는 여러 가지 방식으로 제시할 수 있는데, 현재 많은 교재들이 다음과 같은 방식을 채택하고 있다.

제 1 기본정리 f가 $[a,b]$에서 연속이면,

$$\frac{d}{dx}[\int_a^x f\,dx] = f(x)\ .$$

제 2 기본정리 $[a,b]$에서 f가 연속이고 G가 f의 한 원시함수이라면,

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)\,.$$

제 1 기본정리를 거치지 않고 정적분의 정의와 미분에 대한 평균값 정리를 이용하여 제 2 기본정리를 직접 증명할 수도 있다. 상당수의 교재들이 제 1 기본정리를 거치지 않고 제 2 기본정리를 증명하고, 제 2 기본정리만을 미적분의 기본정리로 명명하거나, 제 2 기본정리를 제 1 기본정리로 제 1 기본정리를 제 2 기본정리로 명명한다.1)

제 1 기본정리에서 제 2 기본정리를 유도하는 일반적인 제시법에서 잘 드러나지 않을 수 있지만, 제 1 기본정리와 제 2 기본정리는 다른 역할을 한다(Bartle, 1976; Cunningham, 1965; Hughes-Hallet et al., 2002; Strichartz, 1995). 제 1 기본정리는 연속함수에 대하여 원시함수의 존재성을 보장하고 미분의 역 과정을 이용하여 원시함수를 구할 수 없는 초등 함수(elementary function)2)가 아닌 함수들의 원시함수를 구성할 수 있는 방안을 제시한다. 이에 비하여 제 2 기본정리는 원시함수를 이용한 정적분 계산법을 제공한다. 제 1 기본정리에서 증명한 원시함수의 존재성의 범위와 제 2 기본정리에서 정적분 계산에 사용할 수 있는 원시함수의 범위가 다르다. 제 1 기본정리에 의하면 연속함수의 경우 원시함수가 항상 존재하지만, 제 2 기본정리는 제 1 기본정리에서 제시된 것과 다른 방식으로, 정적분을 이용하지 않고 원시함수를 찾을 수 있을 때에만 의미가 있다. 제 1 기본정리에서 제시한 정적분을 이용하여 구성된 함수를 2 기본정리에 대입하면 무의미한 항등식 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ 이 나온다(Belding & Mitchell, 1991: 148). 정적분을 이용하여 구성하는 것과 다른 방식으로 원시함수를 찾을 수 있을 수 있다는 것이 제 2 기본정리의 요점이다(Spivak, 1980: 271). 제 2 기본정리를 이용하여 정적분을 계산하려면 제 1 기본정리에서 제시한 것과 다른 별도의 방법으로 원시함수를 찾아야 한다.

일반적으로 원시함수를 찾는 방법은 주어진 함수를 원시함수가 알려진 함수로 변환하는 것을 토대로 한다(Sloughter, 2000: 5). 초등 함수에 대한 각각의 미분 공식에 대하여 정적분에 대응하는 기본적인 적분 공식이 주어진다. 그 이외의 함수들의 부정적분은 부분적분과 치환적분을 이용하여 원시함수를 구할 수 있는 함수로 변환하고 그 함수들의 부정적분을 이용하여 찾는다. 미분 과정을 역으로 이용하기 때문에 미분과 비슷한 것처럼 생각할 수 있지만, 미분 과정과 미분의 역 과정 사이에는 중대한 차이가 있다(Courant, 1970: 204-5; Francis, 1926: 72). 미분에 대해서는 보편적으로 적용되는 직접적인 과정이 정의되어 있고, 미분 과정의 결과는 항상 확정된 형태의 유한한 식이다. 초등

1) 예를 들어 Thomas(1953)가 전자, Hughes-Hallett, Gleason & McCallum(2002)이 후자에 속한다.

2) 초등 함수는 일반적으로 유리 함수, 삼각 함수와 삼각 함수의 역함수, 로그 함수와 지수 함수 등을 유한 번 더하고, 빼고, 곱하고, 나누거나 합성하여 생성된 함수를 말한다(Courant, 1970: 204; Spivak, 1980: 335).

함수들의 식으로 이루어진 '닫힌(closed) 식'을 통해서 형성된 모든 함수는 미분될 수 있고, 그 도함수 역시 초등 함수들의 식으로 이루어진 닫힌 식이다. 그러나 원시함수를 구하는 미분의 역 과정에 대해서는 보편적으로 적용될 수 있는 과정이 존재하지 않고, 함수마다 다른 방법을 이용해야 한다. 예를 들어 다음의 함수들을 살펴보자.

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1-x^2}$$

이들 세 함수는 매우 비슷하게 보이지만, 이들의 원시함수는 각각

$$-\frac{1}{x}+C, \tan^{-1}x+C, \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C$$

이다. 이렇게 비슷한 함수라고 해도 사소한 차이로 인해 전혀 다른 방법을 적용해야하고 최종적으로 전혀 다른 유형의 함수가 원시함수로 나타나는 경우가 일반적이다. 보편적인 과정이 존재하지 않고 비슷한 피적분 함수가 매우 다양한 결과를 제시한다는 사실은 원시함수를 찾는 과정을 매우 우연적인 것으로 만든다. 만약 주어진 함수에 대하여 원시함수를 미분의 역 과정을 통해서 찾으려고 했으나 바로 생각나지 않는다면, 생각날 때까지 기다리는 것 이외에 할 것이 거의 없다. 게다가 초등 함수의 원시함수는 초등함수가 아닐 수 있고, 주어진 함수의 원시함수가 되는 초등 함수가 발견될 수 있는지 여부를 알 수 있는 방법이 없다(Spivak, 1980: 336). 예를 들어, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ 와 $\int e^{-x^2}dx$ 는 도함수를 계산할 수 있는 초등 함수로 이루어져 있지만 초등 함수의 유한한 조합으로 표현될 수 없다. 이러한 함수들의 원시함수는 미분의 역 과정만으로 찾을 수 없다.

변화율과 변화량 관계에서 보면 원시 함수는 당연히, 변화량 함수에서 변화율 함수를 유도하는, 미분 과정을 역으로 이용하여 찾을 수 있으며, 부정적분이 바로 그러한 함수를 나타내는 것처럼 보이게 만든다. 그러나 여기에는 부정적분 자체만으로 해결할 수 없는 중대한 두 가지 문제가 있다(Francis, 1926: 72; Hardy, 1938: 245-6).

(i) $\int f(x)\,dx$ 가 존재하는가?

(ii) 존재한다는 것을 안다면, 그 값을 어떻게 구할 수 있는가?

미적분의 기본정리는 첫 번째 문제에 대한 해답을 제공하며, 모든 원시함수를 체계적으로 다룰 수 있는 방법을 제공하며, 따라서 정적분을 통해 부정적분에 수학적 정당성을 부여할 수 있게 된다(Courant, 1970: 113-6). 원시함수 사이에는 항상 상수항 차이가 나기 때문에, 주어진 함수 $f(x)$의 모든 원시함수 $F(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C\ .$$

여기에서 C와 a는 상수이다. 역으로, 모든 상수 C와 a에 대하여 위 식은 항상 한 원시함수를 나타낸다. 따라서 $\int f(x)\,dx$ 는 $\int_a^x f(t)\,dt+C$ 를 간단하게 표기한 것이라 할 수 있다. 부정적분의 수학적 정당성은 정적분에 의하여 보장된다.

이러한 상황으로 인해 부정적분이 아니라 정적분이 변화율 함수가 주어졌을 때 변화량 함수를 결정하는 수학적 방법이 된다. 미적분의 기본정리를 제시한 후 Courant(1970: 121-3)은 질량과 밀도를 예로 하여 미적분의 기본정리가 변화율과 변화량 관계에 함축하는 바를 설명하였다. 함수 F가 x축 위에 따라서 놓인 전체 질량을 나타내는 함수라 하자. 그러면, F의 두 함수값의 차 $F(x_2)-F(x_1)$은 두 점 x_1과 x_2 사이에 있는 전체 질량을 나타나며, 구간 x_1에서 x_2 사이의 단위 길이당 평균 질량은

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}.$$

$F(x)$가 미분가능하다고 가정하면 $x_2 \to x_1$할 때 이 값은 미분계수 $F'(x_1)$으로 수렴한다. 이 양은 점 x_1에서 밀도이다. 이때 밀도 $f(x)$와 함수 $F(x)$ 사이에는

$$F(x)=\int_0^x f(u)\,du,\ f(x)=F'(x)$$

의 관계가 성립한다. $F(x)$는 $\int f(x)dx$가 아니라 $\int_0^x f(u)\,du$이다. 미분에 의하여 변화량 함수에서 변화율 함수가 결정되기 때문에 f와 $\int f$가 변화율과 변화량을 분석하는 도식이 되는 것처럼 보일 수 있다. 그러나 미분의 역 과정은 모든 함수에 대하여 원시함수를 찾을 수 있다는 것을 보장할 수 없다. 제 1 기본정리에 의하면 미분의 역 과정이 아니라 정적분 과정에 의해서 주어진 함수에 대한 원시함수를 찾을 수 있다. 따라서 f와 $\int f$가 아니라 f와 $\int_a^x f$가 변화율과 변화량 관계를 분석하는 수학적 방법이며 $\int f$는 원시함수를 찾을 수 있는 함수들에 대하여 $\int_a^x f$를 계산할 수 있는 방법을 제공하는 역할을 한다.

속도 함수는 시간에 따라 물체가 공간상의 위치가 변하는 양을 나타내는 변화율 함수, 거리 함수는, 속도 함수에 따라서 이동한 양을 나타내는, 변화량 함수에 해당한다. 미분은 위치 함수에서 속도 함수를 유도하며, 이 과정을 통해서 위치 함수에 대한 정보만으로 속도 함수를 결정할 수 있다. 미분 과정을 역으로 이용하여 원래의 위치 함수를 결정할 수 있을 것처럼, 속도 함수 v가 주어지면 부정적분 $\int v$을 이용하여 위치 함수를 결정할 수 있는 것처럼 생각될 수 있다. 그러나 모든 함수에 대하여 미분 과정을 역으로 이용하여 원시함수를 결정할 수 있다는 점을 보장할 수 없다. 오직 속도 함수가 원시함수를 찾을 수 있는 함수일 때에만 부정적분으로 위치 함수를 결정할 수 있다. 이와 달리 정적분은 연속함수 범위에서 항상 원시함수 곧 위치 함수를 보장한다. 그렇기 때문에 많은 정적분을 부정적분을 이용하여 계산하지만 위치 함수를 부정적분이 아니라 정적분에 의하여 결정되는 것으로 간주하고, 거리 계산을 정적분의 활용으로 다루는 것이다.

III. 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계와 미적분의 기본정리

앞 절에서 미적분의 기본정리와, 거리 및 변화량 계산의 관계를 살펴보았다. 엄밀한 형태의 미적분의 기본정리는 정적분 계산을 넘어서 정적분과 부정적분 사이의 관계를 확립한다. 이는 19세기 초반 Cauchy에 의해서 확립되었다. Cauchy 이전에는, 현재 수학 II 교과서처럼, 넓이를 직관적으로 이용하여 미적분의 기본정리를 제시하였다. 직관적 형태의 미적분의 기본정리는 Newton에 의해서 확립되었다. Newton 이전에는 운동학적 맥락 속에서 미적분의 기본정리에 대한 이해, 곧 정적분과 부정적분 혹은 넓이와 거리 사이의 관계에 대한 이해가 나타난다. Toeplitz(1963)와 Medvedev(1991)는 Galilei의 자유낙하 운동에서 나타난 등가속도 운동의 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계에 대한 이해에서 미적분의 기본정리에 대한 이해가 발견된다고 주장하였다. 속도 그래프 아래의 넓이는 그 자체로 정적분에 해당하며 그것을

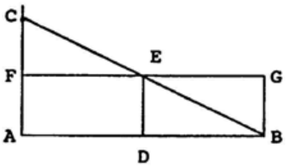
거리로 인식한다는 것은 거기에 부정적분적 측면을 부여하는 것이다.[3] 본 절에서는 정적분이 엄밀하게 확립되기 이전 미적분의 기본정리가, 평면 도형의 넓이와 거리 사이의 관계에서, 어떠한 역할을 하였는지를 살펴보겠다.

속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계가 최초로 인식된 시기는 14세기 중반 무렵이다. 프랑스의 Oresme이 최초로 시간—속도 그래프의 넓이를 이용하여 등가속도 운동의 이동 거리를 계산하였는데, 이는 평면 도형의 넓이로 다른 물리적인 양을 나타낸 첫 번째 사례이다(Boyer, 1959: 84). 속도 함수의 그래프를 이용하여 거리 문제를 다룬 Oresme의 시도를 통해서 시간, 속도, 거리, 순간속도 등의 운동학적 개념들이 곡선 연구, 곧 적분과 미분에 대한 기하학적 아이디어와 연결되었다(Baron, 2003: 5-6). Oresme은 14세기 전반기에 진행된 영국의 Merton 학파의 성과를 그대로 이어받았다. Merton 학파에 의해서 속도가 변화는 운동이 분석 대상이 되고, 운동에 대한 분석에서 속도가 중요한 대상이 되었고, 등가속도 운동의 정의와 이동 거리에 대한 양적 법칙이 주어졌다(Krejca, 1992: 9-13). Merton 학파 이전에는 등속도 운동만이 학문적 연구의 대상이었다. 학자들은 운동에 대한 형이상학적 사변을 전개하고 천문학 등을 연구하였지만 이들이 다룬 운동을 등속도 운동이었다(Boyer, 1959: 71-2; Krejca, 1992: 13-4). Aristotle은 속도가 동일한 운동을 동일한 시간 동안 같은 거리를 움직이는 것으로 정의하였다. Archimedes는 이 등속도로 움직이는 점이 이동한 공간 혹은 선은 이동한 시간에 비례한다는 결론을 내렸다.

Merton 학파는 균일한 가속운동 곧 등가속도 운동에 대한 양적인 규칙, 이른바 ‘중간속도정리(mean velocity theorem)’를 확립하였다. 이들은 등가속도 운동을 정의하고 이를 이용하여, ’주어진 시간 동안 일정하게 가속하는 혹은 감속하는 운동이 이동한 거리는 동일한 시간 동안 운동의 최초 속도와 마지막 속도의 산술 평균의 속도를 가지고 동일한 시간 동안 이동한 거리와 동일하다.’라는 것을 증명하였다. 이들의 증명은 논증적이고 산술적이었다(Boyer, 1959: 74-5). Merton 학파의 연구를 이어받은 Oresme은 이를 기하학적으로 다루는 방법을 고안하였다. Oresme은 수평선은 시간이나 대상 내의 위치 등 질이 전개되는 시공간상의 위치를 나타내며, 이 수평선에 그은 수직선은 그 위치에서의 질의 강도를 나타내는 기하학적 표현을 고안하였다. 강도를 나타내는 수직선의 길이는 위치에 따라 질의 강도가 변함에 따라 변한다. 각 지점에서 질의 강도를 나타내는 수직선 전체의 합은 기하학적 도형을 형성한다. Oresme은 이 도형을 질 전체의 배치(configuration)라고 불렀다. 이것을 운동에 적용하면, 수평선은 시간, 수직선은 운동의 강도, 즉 속도를 나타내며 현재의 속도 그래프에 해당한다. Oresme은 이렇게 생성된 도형들의 넓이를 이용하여 이동 거리를 다루었다. Oresme은 중간속도정리를 다음

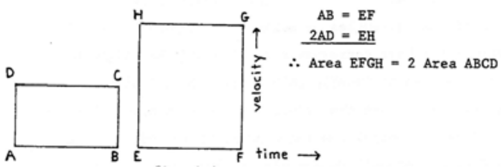
3) Medvedev는 이를 다음과 같이 진술하였다. “새로운 역학적 양(이동 거리)의 측정이 정적분 개념에 수정을 가져와 미분과 적분 개념 사이의 관계를 확립하는 것이 가능하게 하였다. 이것을 따라서 미분이 적분에 선행한다는 아이디어가 등장한다. 거리는 주어진 속도에 의해 결정된다. […] 운동 관념의 가장 본질적인 측면은 미분적 특성, 곧 운동이 시간의 연속적인 흐름 동안 잇달아 있는 다른 중간 상태를 통과하며 점별로 공간에서 진행되는 것으로 간주된다는 것이다. […] 운동의 적분적 성질—시간의 함수로서 거리, 가속도의 함수로서 속도 등—은 완성된 미분적 운동의 결과로서 나타난다. 그리고 이들 적분적 성질은 그 자체로 고정되어 있지 않고 미분적 성질에 의존하여 시간에 따라서 변한다. […] 적분은 문제가 되는 고정된 양에 고정된 수치를 배정하는 정적분으로 간주되었다. 운동 관념을 수학화하기 위해서는 이들 관계를 반대로 해야만 했다. 미분 조작이 전면에 나오고 적분은 그것으로부터 유도되는 것으로 간주되고, 적분 그 자체가 정적분에서 부정적분으로 변해야 했다(Medvedev, 1991: 176-8).”

과 같이 진술하고, 넓이를 이용하여 증명하였다. ”일정하게 변하는 모든 질은 그 양이, 변화의 중간 지점에서의 수준에서 질이 일정하게 유지된 것과 동일하다(Krejca, 1992: 47).“ 직각삼각형 ABC는 일정하게 변하는 질의 전체 양을 나타내며, 직사각형 $ABGF$는 중간 지점에서의 강도로 일정하게 유지된 질의 전체 양을 나타낸다. Oresme은 원론을 이용하여 삼각형 EFCC와 삼각형 EGB의 넓이가 동일하다는 것을 보인다. 따라서 일정하게 변하는 질을 나타내는 삼각형 ABC의 넓이와 중점 수준의 강도를 일정하게 유지하는 질을 나타내는 직사각형 $ABGF$의 넓이가 동일하다. 결국 이들 도형이 나타내는 질과, 두 질이 나타나는 운동의 이동 거리 역시 동일하다.



[그림 Ⅲ-1] Oresme의 증명

Oresme은 삼각형에서 높이가 연속적으로 변하고 따라서 각각의 높이가 순간적으로 존재하지만 넓이가 증가하는 것에 주목하였다. Oresme은 운동 현상과 이차원 도형 사이에 동형성이 존재하며 따라서 기하학 도형의 넓이를 이용하여 거리의 증가 현상을 다룰 수 있다는 것을 하는 것을 통찰하였다(Sherry, 1982: 89-92, 136). 속도가 두 배이면 동일한 시간에 이동한 거리도 두 배가 된다. 속도가 일정한 등속도 운동이거나 그렇지 않은 운동이든 이러한 비례 관계가 성립한다는 것은 명백하다. 두 평면 도형이 주어져 있고 모든 지점에서 한 도형의 높이가 다른 도형의 높이의 2배가 된다면, 그 도형은 다른 도형의 넓이의 2배가 된다. 속도와 거리, 평면 도형의 높이와 넓이 사이에 동형적인 관계가 존재한다. 동일한 속도에 동일한 선분이 대응하면, 속도 그래프의 넓이는 이동 거리에 비례한다. 예를 들어 [그림 Ⅲ-2]에서 직사각형 $ABCD$에 의해 표현된 운동은 직사각형 $EFGH$가 표현하는 운동이 이동한 거리의 절반을 이동한다. 이차원의 평면 도형을 이용한 속도 그래프는, 거리를 다룰 수 있는, 운동에 대한 모델이다. 역사적으로 Aristotle의 물리학에서 거리는 대표적인 일차원의 양이었다. Oresme은 변화하는 양을 이차원 도형에 배열된 양에 대한 함수로 다룸으로써 연속적으로 변화하는 양을 보다 잘 이해할 수 있다는 것을 보여주었다. Oresme은 속도의 연속적인 변화를 표현하면서 거리가 증가하는 상황을 시각적으로 드러내는 모델을 제시한 것이다. 속도와 거리 사이에는 비례 관계가 있으며, 속도가 임의적으로 그리고 연속적으로 변할 때에도 이동 거리는 명확하게 결정된다. 속도 그래프 아래의 넓이는 이 점을 명확하게 드러낸다.



[그림 Ⅲ-2] 등속도 운동의 거리와 넓이의 관계

Oresme은 비 아이디어를 통하여 넓이와 거리를 연결하였지만, 움직인 거리를 결정하는 다른 방법을 알지 못하였기 때문에 지금과 다르게 넓이를 이용하여 거리를 계산하는 방향으로 나아갔다. 또한 Oresme은 거리를 독립된 크기로 표현하지 않고 두 도형의 넓이를 비교하는데 머물렀다(Boyer, 1959: 84). 이에 비하여 Galilei는 거리 자체를 함수적 관계로 명확하게 표현하였다. Galilei는 중간속도정리를 바탕으로

하여 등가속도 운동에서 거리가 시간의 제곱에 비례하여 증가한다는 것을 유도하고 다음과 같이 진술하였다.

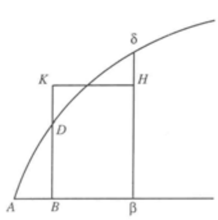
> 가만히 있다가 일정하게 속력이 빨라지면서 떨어지는 한 물체가 움직인 거리들은 그 거리를 지나는데 걸린 시간들의 제곱에 비례한다.

그러나 Galilei 역시 속도를 결정할 수 있는 방법을 알지 못하여 단순히 넓이를 이용하여 거리를 표현하는데 그쳤다.

이들과 다르게 속도와 위치 사이의 관계를 함수에 대한 조작을 통해서 다룰 수 있는 방법을 발견하고 이를 이용한 넓이 계산 방안을 제시한 사람은 Newton이다. Newton은 적분 곧 넓이 계산이 속도 함수가 주어졌을 때 위치 함수를 구하는 것이라는 것을 파악하고, 운동의 속도와 거리 관계를 통해서 미적분을 도식화하고, 자신의 방법을 '유율법'이라고 불렀다. Newton은 미적분의 모든 문제가 궁극적으로 다음의 두 문제로 귀결된다는 것을 파악하였다(Newton, 1971: 70-71).

1. 공간의 길이가 연속적으로 (즉 각각의 순간에 대하여) 주어졌을 때, 제시된 임의의 시간에서의 운동의 속도를 구하기.
2. 운동의 속도가 연속적으로 주어졌을 때, 제시된 임의의 시간에 지나간 공간의 길이를 구하기.

Newton은 위치 함수가 주어졌을 때 속도 함수를 결정하는 방법으로 접선의 작도, 최대값과 최소값 구하기 등과 같은 문제를 해결할 수 있으며, 속도 함수가 주어졌을 때 위치 함수를 결정하는 방법을 이용하여 넓이와 부피 계산, 곡선의 길이 계산 등을 다룰 수 있다는 것을 예를 통해서 보여주었다(Newton, 1971). 이러한 과정에서 넓이 계산 등이 기본 문제 2에 해당한다는 것을 보인 것이 바로 Newton의 미적분의 기본정리이다(Guicciardini, 2003: 73).



> 어떤 곡선 AD의 밑변에 대하여 세로좌표 BD가 수직이 되도록 하고, AB를 x, BD를 y라고 하자. 그리고 $a, b, c, \cdots$ 를 주어진 양, m, n을 정수라고 하자. 그러면, 규칙 1: 만약 $y = ax^{m/n}$ 이면, $[na/(m+n)]x^{(m+n)/n}$ 이 ABD의 넓이이다(Newton, 1969: 207).

그런데 Newton은 이에 앞서 이미 1665년에 부정적분을 이용하여 정적분을 계산할 수 있다는 것을 증명한 바 있다(Guicciardini, 2003: 76-7; Newton, 1967: 303-12). Newton은 여기에서 무한소를 이용하여 넓이를 나타내는 곡선 z에 그은 접선의 기울기가 주어진 곡선의 세로좌표 y에 일치하다는 것을 보였다. Newton은 이 결과를 바탕으로 하여 다항함수, 유리함수, 무리함수 등에 대한 넓이 함수의 목록, 곧 적분표를 작성하여 구적법, 곧 넓이 계산 문제를 다루었다. 1669년의 증명은 무한소의 합 아이디어를 변화율 아이디어로 대체하였다. 이를 통해서 직관적 형태의 미적분의 기본정리가 등장한 것이다.

Oresme과 Galilei, 그리고 Newton은 모두 넓이 계산과 거리 계산이 동형적인 문제라는 것을 파악하였다. 이들의 통찰 뒤에는 함수의 그래프가 변화율과 변화량을 동시에 나타내는 모델(Comenetz, 2002: 18)이라는 점이 놓여 있다. 그러나 Oresme이 넓이 계산을 이용하여 거리를 계산하였던 것과 다르게 Newton은 거리 계산법

을 이용하여 넓이를 계산하였다. 이것은 무엇보다 Newton이 Descartes에게서 비롯된 방법을 이용하여 함수적 관계를 표현할 수 있었기 때문에 가능하였다(Boyer, 1959; Sherry, 1982; Toeplitz, 1963). 그리고 Newton은 미분을 통해서 위치와 속도, 곧 거리와 속도의 관계를 다룰 수 있게 되면서, 이것을 넓이와 거리 관계에까지 확장하였다. 이전의 무한소 아이디어를 이용하여 넓이와 거리 관계를 설명하던 것이 미분 과정으로 대체되었고, 이로써 기하학적인 비례 관계 대신 함수에 대한 조작이 넓이와 거리 관계를 설명하는 원리로 등장하게 되었다.

한편, Leibniz는 Newton과 다르게 운동학적 해석을 부여하지 않고 형식적인 방식으로 자신의 무한소 계산법을 제시하였다. 앞선 연구자들이 동일한 결과들을 여러 가지 형태로 유도한 바 있지만, 오직 Newton과 Leibniz만이 보편적인 계산법을 완성하였다. Newton이 그의 방법에서 유율, 곧 미분에 대한 규칙들을 기본적인 것으로 한 것과 같이 Leibniz도 그의 "차와 합" 계산법에서 "차"를 찾는 연산을 기본적인 것으로 보았다. 다시 말하면, 미분법이 확립되면서 이를 역으로 이용하는 거리 계산법이 확립되었고 동시에 이를 이용한 넓이 계산법이 확립된 것이다. Newton과 Leibniz는 미분을 기본 연산으로 하는 하나로 통합된 계산법으로서 미적분을 확립하였지만, 적분 정의와 관련하여 둘 사이에 차이가 있었다(Boyer, 1959: 205-6). Leibniz는 미분의 역을 이용하여 계산하였지만 적분을 크기의 모든 값의 합 곧 무한히 작은 직사각형들의 무한히 많은 수의 합으로 정의하였다. 이와 달리 Newton은 유량을 주어진 유율에 의해 생성된 양, 즉 주어진 크기를 그것의 유율로 가지는 양 또는 유율의 역으로 정의하였다. 다시 말하면, Leibniz는 적분에서 정적분 아이디어를 부각시킨 것에 비하여 Newton은 부정적분 아이디어를 부각시킨 것이다. 그러나 정적분 자체는 미분의 역에 의하여 계산되었고 이에 따라서 18세기 내내 미분이 기본적인 연산으로, 적분은 "미분의 기억(Boyer, 1946: 159)"에 지나지 않는 것으로 간주되었다. 곧 미분의 역이 적분으로 간주되었는데, Leibniz의 후계자인 Johann Bernoulli, Euler 등이 이러한 적분 개념의 형성에 깊게 관여하였다. Leibniz에 있어서면 $\int ydx = \pounds$은 단순히 무한히 작은 직사각형 $y\,dx$의 무한합을 의미하였는데, Johann Bernoulli는 여기에 미분이 비롯되는 양곧, $d\pounds = y\,dx$라는 새로운 의미를 부여하고 그것을 적분으로 명명하였다(Bos, 2000: 73). 이는 Newton과 Leibniz의 아이디어를 혼합하여, Newton의 유량 곧 부정적분이 적분으로 선택된 것이다(Ferzola, 1986: 76; Kline, 1990: 406). Euler는 Johann Bernoulli의 적분법 아이디어를 더욱 발전시켰다. Euler는 "적분법은 주어진 미분으로부터, 양 그 자체를 찾는 방법이며, 이것을 나오게 하는 연산을 일반적으로 적분이라고 부른다"(Dunham, 2005: 86에서 재인용)고 정의하고, 부분적분과 치환적분 등 부정적분을 구하는 방법을 체계화하였다. 곧 Cauchy에 의해서 정적분과 부정적분이 구분되기 이전에는 현재의 부정적분에 해당하는 것이 적분으로 간주되었다. 적분은 정적인 Riemann 합의 극한이 아니라 변화율을 지니고 변하는 양이었다.

이상의 논의를 정리하면 다음과 같다. 현재와 같은 정적분과 부정적분의 명확한 구분과 정적분을 이용한 거리 계산은 미적분의 최종적인 발달의 결과이다. 미적분 발달 초기에 미적분의 기본정리는 부정적분을 이용한 정적분 계산법과 정적분 정의 모두에 관련되었다. 19세기 정적분이 엄밀하게 확립된 이후, 정적분과 부정적분이 구분되고 정적분을 이용한 부정적

분의 정당화가 이루어졌다. 이를 통해서 거리 계산이 부정적분이 아니라 정적분의 대상이 되었다. 정적분의 대상으로 인식되기 이전에는 거리 계산은 부정적분의 적용 대상이었으며, 미분이 넓이와 거리의 관계를 설명하는 수단이었다. 속도—거리와 평면 도형의 높이—넓이 사이에 공통적으로 존재하는 비례 관계는 미적분의 형식적인 조작 없이 직관적인 이해를 가능하게 하지만, 정당화에 한계가 있었다. 미분이 비례 관계에 기초한 직관에 대하여 보다 엄밀한 정당화를 제공하였다. 그러나 미분에 기초한 넓이와 거리 관계 설명은 부정적분에 의존하는 바, 부정적분에 의한 한계를 지니고 있다. 거리를 정적분의 활용으로서 간주하는 현재의 관점은 부정적분으로 인한 문제점까지 극복하기 위한 결과물인 것이다. 거리 계산을 정적분의 활용으로서 다루는 현재의 접근 방식 이면에는 이러한 문제점의 인식과 극복의 과정이 숨어 있다.

Ⅳ. 고등학교 수학 II의 적분법 단원 분석[4)]

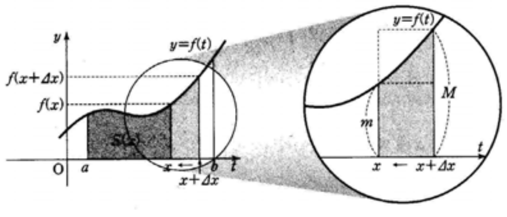
현행 수학 II 교과서의 "다항함수의 적분법" 단원은 크게 '부정적분과 정적분'과 '정적분의 활용' 두 개의 절로 이루어져 있다. '부정적분과 정적분'에서는 부정적분과 정적분의 기본적인 성질이 제시된다. 먼저 부정적분이 도입되고 미분법 공식을 바탕으로 하여 부정적분의 성질이 제시되고, 다항함수 범위에서 부정적분을 찾는 문제를 다룬다. 부정적분을 간단하게 다룬 이후, 구분구적법을 소개하고 정적분을 구분구적법의 일반화로서 정의하고 미적분의 기본정리를 증명한다. 그리고 미적분의 기본정리를 이용하여 정적분의 기본적인 성질을 유도하고, 다항함수 범위에서 정적분 계산 문제를 다룬다. '정적분의 활용'에서는 거리, 부피, 움직인 거리 계산 등 세 유형의 문제를 정적분을 이용하여 계산하는 방법을 다룬다. 정적분을 도입하면서 x축 위에 놓여 있는 곡선과 x축, x축에 수직인 두 직선으로 이루어진 기본적인 도형의 넓이 계산을 다룬데 비하여, 정적분의 활용에서는 정적분을 이용한 기본적인 도형의 계산법을 확장하여 두 곡선으로 이루어진 도형 등의 넓이 계산을 다룬다. 부피 계산에서는 원뿔 기둥과 여러 형태의 회전체의 부피 계산 문제를 다루며, 거리 계산 문제에서는 수직 방향으로 쏘아 올린 포탄 등과 같이 직선 위에서 움직이는 물체의 이동 거리를 다룬다.

이상과 같은 적분법 단원 구성은 다항함수만을 다루며 설명과 세부적인 전개 과정이 덜 엄밀하고 더 간단하게 되어 있다는 점을 제외하면 대체로 대학에서 사용되는 미적분 교재와 일치하는 것이지만, 미적분의 기본정리와 관련된 내용에서 다소 다른 점이 발견된다. 수학 II 교과서에서는 제 2 기본정리가 '정적분의 기본정리'로 제시되고, 제 1 기본정리 자체에 특별한 명칭이 없지만 '적분과 미분의 관계'라는 제목을 붙인 상자 안에 제 1 기본정리의 결과를 진술한다.[5)] 이런 명칭 상의 차이점 이외에 미적분의 기본정리의 위치에서도 상당한 차이점이 발견된다. 대학 수준의 미적분 교재에서는 정적분이 정의되고 정적분의 기본적인 성질이 제시된 이후 미적분의 기본정리가 등장한다. 이에 비해 수학 II 교과서에서는 정적분의 정의

4) 고려출판사, 교학사, 금성출판사, 대한교과서, 동아서적, 두산, 법문사, 중앙교육진흥연구소 등 출판사 8곳에서 만든 8종의 교과서를 분석하였다.

5) 교재에 따라서 '적분과 미분의 관계' 대신 '정적분과 미분의 관계'라고 표현하기도 한다.

와 기본적인 성질 사이에 미적분의 기본정리가 나타난다. 그러나 미적분의 기본정리의 증명 과정은 크게 다르지 않다. 대학 수준의 미적분 교재들은 일반적으로 넓이를 이용하여 Riemann 합의 수렴을 설명하면서 비형식적인 방식으로 정적분을 도입하고 또한 넓이를 이용하여 미적분의 기본정리를 증명한다. 수학 II 교과서에서도 넓이를 이용하여 정적분을 도입하고 미적분의 기본정리를 증명한다. 제 1 기본정리 증명은 [그림 Ⅳ-1]와 같이 그래프를 제시하고 연속함수의 성질을 그래프에서 유추하여 x의 증분 Δx에 대한 넓이 $S(x)$의 증분 ΔS에 대한 부등식을 유도한 후, $\Delta S/\Delta x$의 극한값을 구하여 $S(x)$의 도함수를 구하는 것으로 이루어져 있다. 그리고 미적분의 제 1 기본정리와 정적분의 성질 $\int_a^a f(t)dt = 0$, 그리고 동일한 함수의 부정적분들 사이의 차이는 항상 일정하다는 성질을 이용하여 미적분의 제 2 기본정리가 바로 유도된다.



[그림 Ⅳ-1] 제 1 기본정리의 증명

그런데 정적분을 이용한 거리 계산 방법에 대한 설명에서 수학 II 교과서는 대학 미적분 교재와 전혀 다른 모습을 보인다. 정적분의 활용으로 거리 계산 문제를 다룬다면 원칙적으로 거리가 정적분, 곧 Riemann 합의 극한이라는 점이 제시되어야 한다. 대학 수준의 미적분 교재는, 엄밀하게 논의하지 않지만, 거리가 Riemann 합의 극한이라는 점을 명시적으로 언급한다. 수학 II 교과서들은 정적분을 이용한 부피 계산법을 설명하면서 부피가 Riemann 합의 극한이라는 점을 명확하게 밝히지만 거리 계산은 그렇게 하지 않는다. 전체 8종의 교과서 중에서 7종의 교과서가 정적분 정의 대신 미적분의 제 2 기본정리를 이용하여 정적분을 이용하여 움직인 거리를 계산할 수 있다는 점을 설명하였다. 위치 함수는 속도 함수의 부정적분이며 따라서 시간 $x=a$에서 $x=b$ 동안 이동한 거리는 두 점에서 위치 함수의 함수값의 차이이다. 미적분의 제 2 기본정리에 의하면 부정적분의 두 함수값의 차이가 바로 정적분 값에 해당하는 바, 따라서 속도함수 $f(x)$가 주어졌을 때 정적분 $\int_a^b f(x)dx$가 움직인 거리가 해당한다. 나머지 1종은 부정적분을 적극적으로 이용하지는 않았지만 $\int_a^x f(t)dx$ 가 $f(x)$의 부정적분이라는 점을 이용하였다. 이러한 설명 방식은 정적분 자체에 대하여 직관적 지도를 원칙으로 하고 있으며, 이동 거리가 Riemann 합의 극한에 해당한다는 것을 설명하는 것이 학교 수학에서 소화하기 어려운 내용이라는 점을 감안한 것으로 보인다. 이동 거리가 Riemann 합의 극한의 대상이 된다는 점에 대한 설명이 학교 수학에서 다루기 어려운 내용이라는 점은 타당한 인식으로 보이지만, 현행 수학 II 교과서가 대안으로 선택한 설명에는 고려할 부분이 있는 것으로 생각된다.

현행 교과서의 구성 방식은, 거리 계산을 부정적분과 관련하여 다루지 않고 정적분에서 다룬다는 뜻에서, 외형적으로는 정적분과 부정적분의 구분을 바탕으로 하는 엄밀한 형태의 미적분 체계를 따르고 있다고 할 수 있다. 그러나 거리를 정적분을 이용하여 계산할 수 있다는 점을 설명하는 과정에서 부정적분에 의존한다. Newton이 직관적 형태의 미적분의 기본정

리를 사용하여 거리와 넓이의 관계를 설명한 것처럼, 교과서의 유도 과정은 미분에 의존한다. 그러나 Newton의 것과 다르게 수학 II 교과서의 설명에서 미분은 직관적인 넓이—거리 관계에 대한 이해를 수학적으로 정당화하는 역할을 수행하지는 않는다. 넓이는 전혀 언급되지 않고 속도와 위치의 관계와, 부정적분의 두 함수값의 차이가 조합되어 정적분이 유도된다. 현행 교과서의 설명은 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계를 드러내지 못하고 있다. 부정적분을 이용하여 계산할 수 있는 거리를, 미적분의 제 2 기본정리에 의하여 값이 일치하기 때문에, 정적분으로도 계산할 수 있다는 것을 보인 것에 불과하다. 물론 거리가 정적분의 대상이라는 점을 언급하는데 머물러 있는 대학 수준의 미적분 교재도 이 점을, 그리고 부정적분이 아니라 정적분을 이용하여 거리를 계산하는 이유를 잘 설명한다고 하기 어렵다. 그래도 그러한 설명은 거리가 Riemann 합의 극한으로 정의된다는 점을 이용하여 거리를 넓이와 연결시킬 수는 있다. 부정적분을 이용한 설명 방식은 이러한 점에서 더욱 문제가 되는 것으로 보인다.

결론적으로 현행 교과서의 설명은 계산의 의미와 정당성에 대한 논의를 완전히 생략한 채 계산 방법에 주목하는 것이라 할 수 있다. 넓이를 이용하여 거리를 계산하는 방법을 전달해도, 정적분이 넓이를 정의하는 것이고 계산이 미분을 이용하는 것이지만, 미적분 개념이 거리와 넓이 관계에 대한 이해와 연결될 수 있는 기회를 제공하지 못하고 있다.

V. 거리와 넓이 사이의 관계에 대한 학생들의 인식

2007년 12월 서울시에 소재한 고등학교 두 곳의 2학년 124명을 대상으로 정적분에 대한 이해도를 조사를 실시하였다. 조사 결과 중에서 무한소를 이용한 정적분 해석에 관련된 내용은 정연준・강현영(2008)에서 다룬 바 있다. 여기서는 이 논문의 주요 주제에 해당하는 문항에 대한 학생들의 반응만 분석한다.[6] 문항은 다음과 같이 이루어져 있다. 교과서 예제 수준의 운동 상황을 제시하고, (1) 속도 함수의 부정적분을 구하고 부정적분의 물리적 의미를 설명하기, (2) 부정적분을 이용하여 출발 후 처음 2초 동안 움직인 거리 계산하기, (3) 이동한 거리가 속도 함수의 그래프와 x축 사이의 넓이와 일치하는 이유를 설명하기. 이 문항은 거리 계산이 정적분의 활용으로 다루어지고 있는 현행 교과서로 공부한 학생들이 속도 함수가 주어졌을 때 부정적분만으로 거리를 계산할 수 있다는 점과, 그 계산 결과가 속도 그래프 아래의 넓이와 동일하다는 것을 어떻게 인식하는지를 알아보기 위한 것이다. 쉽게 예상할 수 있듯이 43.5%(124명 중 54명)의 학생들만이 이유를 설명하였으며, 매우 일부에서만 적절한 인식의 싹을 찾을 수 있었다. 대다수 학생들이 등속도 운동에 제한된 도식을 사용하고 있었다. 이하에서는 학생들의 설명에 대한 자세한 분석 결과를 제시하고자 한다.[7]

속도 그래프의 아래의 넓이가 거리가 되는 이유를 설명하려면 속도와 거리, 넓이 사이의 관계를 이용해야 한다. 예를 들어, 대학의 미적

6) [부록 1]에 조사 문항이 제시되어 있다.

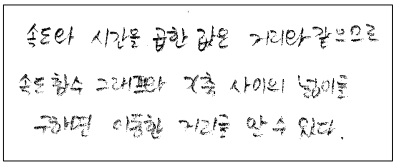
7) 나머지 70명 중에서 41명은 세 문항에 모두 응답을 하지 않았다. 27명은 부정적분을 이용하여 거리를 계산하는데 실패하거나 거리를 계산하였지만 속도 그래프 아래의 넓이가 거리가 되는 이유를 설명하지 않았다. 속도 그래프 아래의 넓이가 거리가 되는 이유를 설명하였으나 부정적분을 이용하여 거리를 계산하는데 실패한 학생은 2명이었다.

분 교재에 제시된 내용을 이용하여, 표준적인 거리 자체가 속도 함수에 대한 Riemann 합의 극한이며 속도 함수의 그래프와 x 축 사이의 넓이도 속도 함수에 대한 Riemann 합의 극한이 되기 때문에 둘이 일치한다고 대답할 수 있다. Newton처럼 미적분의 제 1 기본정리를 이용하여, 거리가 속도 함수의 원시함수이고 거리 함수도 속도 함수의 원시함수이기 때문에 둘이 일치한다고 대답할 수도 있다. 정적분이나 미분(혹은 미분의 역)을 이용하여 그 이유를 설명하는 것이다. 이러한 설명 가능성을 고려하면, 학생들의 응답을 미분과 정적분 각 요소를 이용했는가 여부에 따라 <표 V-1>과 같이 분류할 수 있다.

<표 V-1> 응답 유형

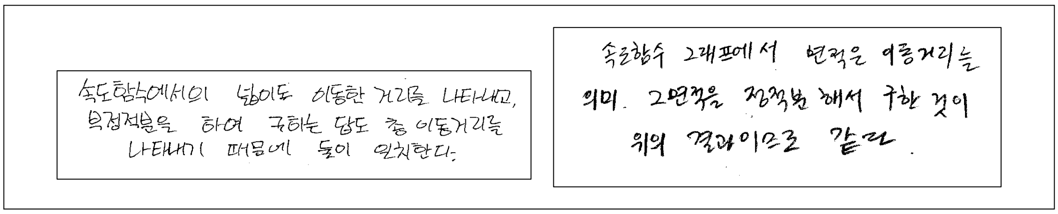
설명 유형		인원수
(가) 두 요소에 대한 언급이 없는 설명		25
(나) 한 요소에 대한 언급만 있는 설명	미분	7
	정적분	7
(다) 두 요소에 대한 언급이 모두 있는 설명		2
(라) 기타		13

분석 대상의 절반에 가까운 25명의 학생이 정적분과 미분에 대한 언급 없이 속도 그래프 아래의 넓이가 거리가 되는 이유를 설명하였다. [그림 V-1]와 같이 두 요소를 언급하지 않고 단지 ‘거리=속도×시간’임을 이용하여 넓이와 거리 사이의 관계를 설명한 경우가 대부분이었다. 25명 중에서 21명이 이에 해당하며, 4명은 속도 그래프의 아래의 넓이가 거리가 된다는 점만 언급하였다. 정적분과 미분 중에서 하나를 언급한 (나) 유형의 대답은 미분을 언급한 학생이 7명, 정적분을 언급한 학생이 7명이었다. 그러나 (-나) 유형의 대답에서 나타난 미분과 정적분은 “속도—거리—넓이”의 관계 전체가 아니라 부분만을 다루었다. 예를 들어, [그림 V-2]의 오른쪽 응답에서 정적분은 넓이와 거리 사이의 관계를 설명하기 위해 사용되기보다는 넓이를 계산하는 방법으로만 사용되고 있다. 미분을 언급한 대답에서도 넓이는 거리와 같은 것이라고 가정할 뿐 그 이유를 설명하지 못하였으며, 미분 과정은 속도와 거리 사이의 관계를 다루는데 머물러 있다.



[그림 V-1] (가) 유형의 대답

2명의 학생이 정적분과 미분이 모두 포함된 (다) 유형의 대답을 하였다. 이들의 대답은 [그림 V-3]과 같다. 이들은 넓이와, 속도와 거리의 관계를 모두 적분이라는 단어로 설명하였다. 4절에서 분석 대상으로 삼은 교과서 중에서 대부분이 정적분 값을 구하는 것과 원시함수를 구하는 것 모두를 적분으로 명시[8]할 정도로 정

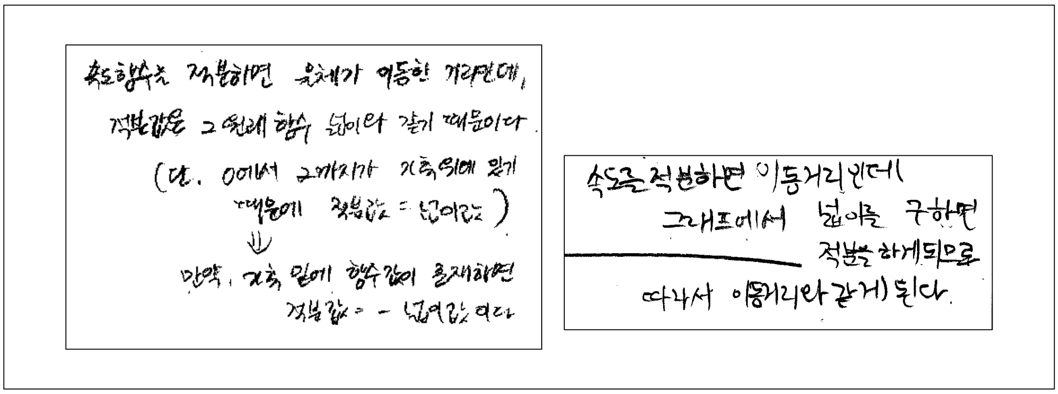


[그림 V-2] (나) 유형의 대답

적분과 부정적분이 구분되지 않고 적분으로 불리고 있다는 점을 고려하면, “적분값이 그 원래 함수 넓이와 같기 때문”이나 “넓이를 구하면 적분을 하게 되므로”의 적분은 정적분을 의미하지만, “속도를 적분”에서는 원시함수를 구하는 것으로 해석할 수도 있다. 그러나 이 경우 두 적분이 일치하는 이유에 대한 설명이 필요하다는 점이 문제가 될 수 있다. 물론 적분이 하나의 의미, 곧 속도 함수에서 위치 함수를 구하는 과정, 미분의 역으로 해석할 수도 있다. 이 경우 미분 과정을 사용한 (나) 유형의 대답으로 받아들일 수 있다. 그러나 이들 대답은 위치와 넓이를 구하는 과정 모두 언급한다는 점에서 (나) 유형에 속한 것으로 분류된 이전의 대답과 다르다. Newton의 방식에 가까운 것이라 할 수 있다.

학생들이 인식하고 있는 내용을 자세히 파악하기 위해서는 이 두 학생을 포함으로 하여 각 유형에 해당하는 학생들을 대상으로 하는 임상면담 또는 사례연구가 필요하다. 이 연구에서 확인한 바를 통해 얻을 수 있는 결론은, 적어도 이 두 학생이 단지 등속도 운동에 제한된 속도와 거리 사이의 관계로 설명하지 않고 미적분의 형식적인 조작을 통해서 거리와 넓이의 관계를 설명하였다는 것이다. 이렇게 소수의 학생이 미적분의 형식적인 조작을 단지 계산 도구로 보지 않고 비형식적인 대상과 관련시킬 수 있다는 것은 현행 교과서가 학생들이 가지고 있는 기존 지식을 고려하지 않고 정적분을 이용한 거리 계산법을 형식적으로 전달하였기 때문으로 추측할 수 있다. 학생들은 미적분을 이용한 거리 계산법은 수용하였지만, 그 계산법이 가지고 있는 의미를 자신이 지니고 있는 기존의 지식과 적절히 통합하지 않았다.

“속도×시간＝거리”를 속도 그래프 아래의 넓이가 거리인 이유로 설명한 학생이나 이유를 전혀 설명하지 않은 학생 중에서 실제로는 위의 두 학생과 같이 생각하는 학생이 있을 수도 있다. 질문지 조사의 특성상 그러한 가능성은 원천적으로 배제할 수는 없다. 그러나 이유를 설명한 한 학생들은 전체적으로 부정적분을 이용한 계산과 부정적분의 물리적 의미에 대한 설명이 그렇지 않은 학생들에 비하여 더 정확하였다. 이러한 점을 고려하면 제대로 응답하지 않은 학생들까지 고려해도, 미적분의 형식적인 조작으로 물리적인 맥락을 설명하는 학생



[그림 V-3] (다) 유형의 대답

8) 8종 중에서 2종만이 원시함수를 찾는 것을 적분으로, 정적분 계산하는 것으로 정적분으로 구분하였다. 나머지 6종은 원시함수를 찾는 것과 정적분 계산하는 것 모두를 적분하는 것으로 명시하였다.

은 매우 소수라는 결론은 여전히 타당한 것으로 판단된다. 대다수 학생은, 적어도 부분적으로, 등속도 운동에 제한된 도식에 의존하여 넓이와 거리의 관계를 다룬다. 정적분 혹은 미분을 이용하여 넓이를 계산하는 방법은 그러한 도식과 별개의 것으로 인식되고 있다.

Ⅵ. 결 론

현대 미적분 체제에서 미적분의 기본정리는 간접적으로 거리 계산과 연결된다. 미적분의 기본정리는 정적분에 대하여 원시함수를 이용한 계산법을 제공하며, Riemann 합의 극한으로 정의되기 때문에 거리가 정적분의 적용 대상이 되고, 그래서 미적분의 기본정리를 이용하여 거리 계산을 할 수 있다. 미분으로부터 전개하는 현재의 미적분 교재의 흐름에 비추어보면, 부정적분을 이용하여 거리 계산을 할 수 있다. 그러나 거리 계산 문제는 정적분의 활용으로만 다루며, 그 배경에 대해서는 논의하지 않는다. 이 연구에서는 그 배경을, 미분 과정의 역으로 원시함수를 찾는 과정의 한계에서 찾아 제시하였다. 다시 말하여, 부정적분 기호는 항상 원시함수 곧 부정적분이 존재하는 것처럼 표현되지만, 실제로는 정적분에 의해 연속함수의 원시함수를 찾을 수 있다. 그렇기 때문에 거리 계산이 현행 교과서와 같이 정적분의 활용으로 다루어지게 되었다.

그러나 정적분의 활용으로 거리 계산을 다룰 때, 단지 계산법의 적용 기회만 제공하는 방식으로 다루면 학생들이 미적분의 역사적 발달 과정에서 본질적이었던 변화율의 의미에 주목하지 못하게 된다. 이 연구에서 학생들의 인식을 조사한 결과에서도 알 수 있듯이, 현행 교과서로 학습하면서 정적분의 활용으로 거리 계산 문제를 배우면 미적분의 기본정리가 왜 중요한지, 어떤 역할을 하는지, 역사적 발달에서 초기부터 주목받으면서 점차 발달한 과정은 무엇인지 파악하는 것이 불가능하다. 그러므로 거리 계산 문제는 단지 정적분 계산법을 적용하는 기회만이 아니라 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계를 파악하여 초기 역사에서부터 주목 받았던 변화율의 의미를 파악하는 기회로 다루어져야 한다. 특히 거리와 속도, 곡선 아래의 넓이를 종합적으로 연결하고 조망하는 개념으로 미분, 부정적분을 활용할 수 있도록 해야 한다. 미분을 이용해서는 단지 속도와 위치 관계만 학습하고, 거리는 정적분에 의해서만 계산해서는 이렇게 종합적인 안목을 발달시킬 수 없다. 학생들은 넓이 계산법을 숙달해도 그러한 계산법이 함축하는 의미를 넓이와 거리까지 확장시키지 못한다. 이는 결국 미적분의 기본정리와, 그리고 적분에 대한 피상적인 이해의 원인이 된다.

위와 같은 교육적 시사점을 교과서 개발에 반영하면 다음과 같다. 첫째, 미적분의 기본정리를 증명하기에 앞서 등속도 운동, 등가속도 운동의 거리 계산 규칙을 확인하는 기회를 제공해야 한다. 둘째, 미적분의 기본정리를 도입하여 증명한 후, 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계를 확인하도록 한다. 셋째, 미적분의 기본정리가 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계를 일반화한 것임을 확인함으로써 변화율과 변화량 사이의 관계에 대한 일반적인 원리임을 이해하도록 한다. 이때 미분 과정은 겉으로 드러난 패턴을 설명하는 것뿐 아니라 ‘거리＝속도×시간’를 대신하여 둘 사이의 관계를 설명하는 원리라는 점이 드러나도록 지도해야 한다. 이와 같은 방식으로 재구성한다면 앞서 제기한 문제를 극복할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

박두일・신동선・김기현・송건수・박복현・김주석・안훈・이재근・최백선(2008). **고등학교 수학 II.** 서울: (주)교학사.

박배훈・김원경・조민식・김두성・김원석・정원진・이대현(2002). **고등학교 수학 II.** 서울: 법문사.

이강섭・허민・김수환・이정례・임영훈・왕규채・송교식(2008). **고등학교 수학 II.** 서울: 지학사.

우정호・류희찬・문광호・송갑석・박선화・박경미(2008). **고등학교 수학II.** 서울: 대한교과서(주).

정관석・강병개・서정인(2008). **고등학교 수학 II.** 서울: 동아서적(주).

정연준・강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰. **학교수학, 10**(3), 375-99.

조태근・임성모・정상권・이재학・홍진곤(2002). **고등학교 수학 II.** 서울: (주)금성출판사.

최봉대・강옥기・황석근・이재돈・김영욱・홍진철(2002). **고등학교 수학 II.** 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

최상기・이용수・이만근・이재실・백한미・조택상(2002). **고등학교 수학 II.** 서울: 고려출판사

Baron, M.(2003). *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* New York: Dover Publications, Inc.

Bartle, R. G.(1976). *The Elements of Real Analysis.* New York: John Wiley & Sons.

Belding, D. F., & Mitchell, K. J.(1991). *Foundations of Analysis,* London: Prentice-Hall, Inc.

Bos, H.(2000). Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition, In I. Grattan-Guinness(Ed.). *From the calculus to the set theory*(pp.49-93). New Jersey: Princeton University Press.

Boyer, C. B.(1946). The First Calculus Textbooks, *Mathematics Teacher,* 39, 159-167.

__________(1959). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publication Inc.

Comenetz, M.(2002). *Calculus the Elements.* New York: World Scientific Publishing.

Courant, R.(1970). *Differential and Integral Calculus.* E. J. Mcshane(Tras.). New York: John Wiley & Sons.

Cunningham, F.(1965). The two fundamental theorem of calculus. *The American Mathematical Monthly, 72*(4), 406-7.

Dubinsky, E.(1992). A learning theory approach to calculus. In Z. A. Kairan(Ed.). *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*(pp.43-55). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. & Schwingendorf, K.(1991). Constructing calculus concepts : cooperation in a computer Laboratory, In L. Leinbach(Ed.), *The Laboratory approach to teaching calculus*(pp.47-70). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Dunham, W.(2005). *The Calculus Gallery.* New Jersey: Princeton University Press.

Ferzola, A. P.(1986). *Evolution of the Mathematical Concept of a Differential and* *an Outline of How a Modern Definition of this Concept Can Be Used in the Formulation of Elementary Calculus Course.* Unpublished doctoral dissertation, New York University.

Francis, E. C.(1926). Modern Theories of Integration. *The Mathematical Gazette,* 13, 72-77.

Gordon, S. P.(1991). Discovering the fundamental theorem of calculus using computer algebra systems. *Mathematics and computer education,* 25(1), 6-9.

Gravemeijer, K. & Doorman, M.(1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education : a Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics,* 39(1), 111-30.

Guicciardini, N.(2003). Newton's Method and Leibniz's Calculus. In H. N. Jahnke(Ed). *A History of Analysis*(pp.73-103). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Hardy, G. H.(1938). *A Course of Pure Mathematics.* London: Cambridge University Press.

Hughes-Hallett, G. & McCallum, W.(2002). Calculus. New Jersey: John Willey & Sons Inc.

Kline, M.(1990). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Krejca, S. A.(1992). *The origins of calculus in the medieval period.* Unpublished doctoral dissertations, University of Illinois, Chicago.

Medvedev, F. A.(1991). *Scenes from the History of Real Functions.* Basel: Birkhäuser Verlag

Newton, I.(1967). *Mathematical Papers of Isaac Newton Vol. I1.* D. T. Whiteside(Ed) London: Cambridge University Press.

Newton, I.(1969). *Mathematical Papers of Isaac Newton Vol. II.* D. T. Whiteside(Ed) London: Cambridge University Press.

________(1971). *Mathematical Papers of Isaac Newton Vol. III.* D. T. Whiteside(Ed) London: Cambridge University Press.

Rosenthal, B.(1992). Discovering and experiencing the fundamental theorem of calculus, Primus, 2(2), 131-54.

Sherry D. M.(1982). *A Philosophical history of the calculus.* Unpublished doctoral dissertations, Claremont University.

Sloughter, D.(2000). *Difference Equations to Differential Equations.*http://math.furman.edu/~dcs/book/

Spivak, M.(1980). *Calculus.* Berkeley: Publish or Perish Inc.

Strichartz, R. S.(1995). *The Way of Analysis.* Boston: Jones and Bartlett Publishers.

Suzuki, J.(2003). The area under a curve : conjecturing the fundamental theorem of calculus, *Mathematics Teacher, 96*(7), 474-8.

Tall, D.(1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Ed.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*(pp.105-119). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Thomas, K.(1995). *Fundamental Theorem of*

Calculus : An Investigation into Students' Constructions. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Thomas, G.(1953). *Calculus.* Boston: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Thompson, P. W.(1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus, *Educational Studies in Mathematics 26*(2), 229-274.

Toeplitz, O.(1963). *The Calculus - a Genetic Approach.* Chicago: The Press of Chicago University.

Zandieh, M. J.(1998). The Evolution of Students Understanding of the Concept of Derivative. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University.

A Study on the Fundamental Theorem of Calculus : Focused on the Relation between the Area Under Time-velocity Graph and Distance

Joung Youn Joon (Graduate School of Seoul National University)
Lee, Kyung Hwa (Seoul National University)

Dynamic context is considered as a source for intuitive understanding on the calculus. The relation between the area under time-velocity graph and distance is the base of the dynamic contexts which are treated in the integral calculus. The fundamental theorem of calculus has originated in dynamic contexts. This paper investigated the fundamental theorem of calculus via the relation between the area under time-velocity graph and distance. And we analyzed mathematics textbooks and the understanding of students. Finally we suggest some proposal for the teaching of the fundamental theorem of calculus.

* Key words : Fundamental Theorem of Calculus(미적분의 기본정리), Distance(거리), Area(넓이)

논문접수: 2009. 1. 22.
논문수정: 2009. 2. 17.
심사완료: 2009. 2. 23.

[부록 1]

9. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

지상 10m 높이의 건물 옥상에서 49m/초의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 어떤 물체의 t초 후 속도 $v(t) = 49 - 9.8t$ 이다.

(1) 속도 함수 $v(t)$의 부정적분을 구하고, $v(t)$의 부정적분의 물리적 의미를 간단하게 설명하시오.

(2) $v(t)$의 부정적분을 이용하여 처음 2초 동안 이 물체가 이동한 거리를 구하시오.

(3) 물체가 이동한 거리는 속도 함수 $v(t)$의 그래프를 그렸을 때, 0에서 2까지 속도함수의 그래프와 x축 사이의 넓이와 일치한다. 그 이유를 설명하시오.