

# 한 개의 크랙을 가진 회전하는 패킷 블레이드 시스템의 진동해석

## Modal Analysis of a Rotating Packet Blade System having a Crack

권 승 민\*·유 흥 희†

Seung Min Kwon and Hong Hee Yoo

(2009년 6월 23일 접수 ; 2009년 10월 16일 심사완료)

**Key Words :** Modal Analysis(고유진동 해석), Multi-packet Blade System(다중 패킷 블레이드 계), Open Crack(개구형 크랙), Stress Intensity Factor(응력집중계수), Natural Frequency(고유진동수), Disc(디스크), Coupling Stiffness Effect(연성강성효과), Cantilever Beam(외팔보), Shroud(쉬라우드)

### ABSTRACT

In this paper the vibrational behavior of a multi-packet blade system having a cracked blade is investigated. Each blade is assumed as a slender cantilever beam. The coupling stiffness effect that originates from either disc flexibility or shroud is considered in the modeling. Hybrid deformation variables are employed to derive the equations of motion. The flexibility due to crack, which is assumed to be open during the vibration, is calculated basing on a fracture mechanics theory. In the paper, the results of the change in modal parameters due to crack appearance are presented. The influence of the crack parameters, especially of the changing location of the crack is examined.

### 1. 서 론

회전하는 주기적 순환 구조물의 형태를 가진 공학적 예제는 터빈 블레이드, 항공기 회전익, 터보엔진의 휠 등이 있다. 이러한 순환 구조물들은 디스크에 고정단을 갖는 외팔보 형태의 블레이드들로 구성되며 디스크와 축 판의 쉬라우드의 강성으로 인하여 블레이드간 연성효과를 야기한다. 이 중 터빈 블레이드나 항공기 회전익과 같이 회전하는 외팔보 형태의 구조물의 경우 결함에 따라 진동특성이 변화하게 된다. 이것은 보가 크랙과 같은 결함을 가질 경우 크랙이 존재하는 위치에서 추가적으로 발생하는 변형에너지에 의한 영향 때문이다. 이는 크랙이 없는 단일 블레이드의 동적 특성과 달라지며 블레이드간의 연성효과와 크랙으로 인해 고유진동특성

의 변화로 연계된다. 따라서 이러한 순환 구조 시스템의 적절한 설계를 위해선 그 동적 특성을 정확히 예측할 수 있는 해석방법이 요구된다.

회전하는 구조물의 굽힘 진동 해석 방법은 Southwell과 Gough<sup>(1)</sup>가 Rayleigh Energy 평형이론에 근거하여 보의 회전에 따른 고유진동수의 변화를 예측하는 방법을 발표한 이래로 많은 연구가 수행되어 왔다. 한편 크랙을 가진 구조물의 동적 응답에 관한 연구는 Bock<sup>(3)</sup>에 의한 콘크리트 구조 요소의 굽힘 변형에 대해 시작되어 수많은 연구자들에 의해서 수행되어 오고 있다. 그 중에서도 크랙을 가지는 보 형태의 구조물의 해석은 Euler-Bernoulli 및 Timoshenko 보 이론을 중심으로 적용되어 크랙이 전체 구조물의 동특성에 미치는 영향에 대한 연구가 주로 이루어져 왔다. 특히 Shen<sup>(4)</sup> 등은 하나의 크랙에 의한 고유진동수의 변화를 예측하였고, Chati<sup>(5)</sup> 등은 진동 시 크랙의 개폐현상에 의한 비선형 효과의 영향을 제시하였다. 또한 Chondros<sup>(6)</sup> 등은 크랙을 가지는 보의 연속체 이론을 제시하고 그에 따른 여러 형태의 보에 관한 진동해석을 수행하였다. Yoon<sup>(7)</sup>

† 교신저자; 정희원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02)2220-0446, Fax : (02)2293-5070

\* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학과

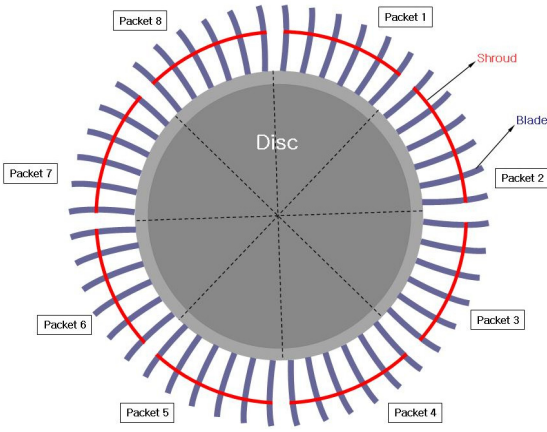


Fig. 1 Configuration of an idealized packet

등은 크랙이 존재하는 경우 회전 외팔보의 동적특성에 관한 영향을 연구하였다.

이 논문에서는 블레이드를 외팔보로, 디스크 혹은 축판의 연성효과를 스프링으로 가정하였으며 외팔보에 존재하는 크랙의 깊이와 위치를 고려한 패킷 블레이드 시스템의 운동방정식을 유도하였다. 이 연구는 참고문헌 (8)에 제시된 굽힘진동 해석에 관한 모델링을 토대로 크랙의 깊이와 위치변화에 의한 패킷 블레이드 시스템의 진동특성 변화를 조사하였다는 점에 그 고유성을 갖는다. 수치해석을 위한 예로는 Fig. 1에 나타난 바와 같이 8개 패킷으로(1 패킷 당 6개 블레이드) 구성된 모델이 사용되었다.

## 2. 크랙에 의한 탄성에너지

Fig. 2는 크랙이 존재하는 빔과 그 단면의 형상이다. 여기서  $w$ 와  $h$ 는 사각단면의 너비와 높이를,  $d$ 는 개구형 크랙의 깊이를 나타낸다. 1차 파괴모드를 고려할 경우, 개구형 크랙에 가해지는 축 방향과 굽힘 방향 하중으로 인한 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \int_A \frac{1-\nu^2}{E} (\sigma_p + \sigma_M)^2 dA \quad (1)$$

여기서  $E$ 와  $\nu$ 는 보의 영률과 푸아송 비를 나타낸다. 식 (1)의  $\sigma_p$ 와  $\sigma_M$ 은 각각 축방향 힘  $P$ 와 굽힘 모멘트  $M$ 에 의한 응력집중계수를 의미하며, 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>(14)</sup>.

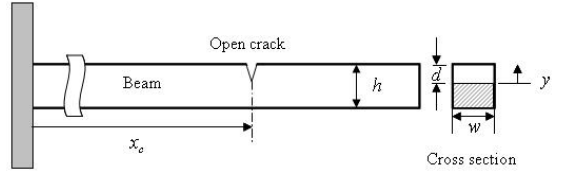


Fig. 2 Geometry of a cracked beam and its cross section

$$\sigma_p = \frac{P}{wh} \sqrt{\pi y} F_1(y), \quad \sigma_M = \frac{6M}{wh^2} \sqrt{\pi y} F_2(y) \quad (2)$$

여기서  $F_1(y)$ 과  $F_2(y)$ 는 다음과 같다.

$$F_1(y) = \sqrt{\frac{2 \tan \frac{\pi y}{2}}{\pi y}} \left[ \frac{0.752 + 2.02y + 0.37(1 - \sin \frac{\pi y}{2})^3}{\cos \frac{\pi y}{2}} \right] \quad (3)$$

$$F_2(y) = \frac{1.99 - y(1-y)(2.15 - 3.39y + 2.7y^2)}{\sqrt{\pi(1+2y)(1-y)^{3/2}}} \quad (4)$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial P_i \partial P_j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (5)$$

Castiglian의 정리에 의하면 크랙에 의한 유연행렬은 식 (5)와 같다.

이상의 식을 종합하면 유연행렬의 요소  $c_{ij}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_{11} = \frac{2\pi h(1-\nu^2)}{EA} \int_0^\kappa \xi F_1^2(\xi) d\xi \quad (6)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\pi h^2(1-\nu^2)}{EI} \int_0^\kappa \xi F_1(\xi) F_2(\xi) d\xi \quad (7)$$

$$c_{22} = \frac{6\pi h(1-\nu^2)}{EI} \int_0^\kappa \xi F_2^2(\xi) d\xi \quad (8)$$

크랙에 의한 강성행렬은 계산된 유연행렬로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

따라서 크랙에 의한 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \frac{1}{2} \left\{ \Delta u \quad \Delta \theta \right\} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} \quad (10)$$

크랙의 위치를 기준으로 하여  $\Delta u$  는 양쪽 부위에서 발생하는 축방향 변위차를 나타내고  $\Delta \theta$  는 양쪽 부위의 경사차를 나타낸다.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}^{<2>}(x_c) q_{1i}(t) - \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}^{<1>}(x_c) q_{1i}(t) \quad (11)$$

$$\Delta \theta = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}^{<2>}(x_c) q_{2i}(t) - \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}^{<1>}(x_c) q_{2i}(t)$$

### 3. 운동방정식 유도

#### 3.1 크랙 빔의 운동방정식

Fig. 3은 각속도  $\Omega$ 로 평면 회전 운동하는 강체 허브에 지지되어 있는 외팔보이다. 여기서  $L$ 은 보의 길이,  $x$ 는 보의 고정점  $O$ 로부터 변형 전 임의의 점  $P_0$ 까지의 거리,  $x_c$ 는 크랙의 위치를 나타낸다. 외팔보 위의 임의 질점의 변형 후 위치인  $P$ 점의 탄성변위는 복합 변형변수  $s$ 와 굽힘방향 변형변수  $u_2$ 로 나타낼 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (12)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (13)$$

여기서  $\phi_{1i}(x)$ 와  $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 인장방향과 굽힘방향의 모드함수를 나타낸다.  $q_{1i}(t)$ 과  $q_{2i}(t)$ 는 일반좌표이며  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 는 일반좌표의 개수를 나타낸다. 크랙이 있는 보의 경우 크랙 위치를 기준으로 두 개의 영역으로 나눌 수 있으며 ( $0 \leq x \leq x_c, x_c < x \leq L$ ) 각 영역에서의 모드함수  $\phi_{1i}^{<1>}(x), \phi_{2i}^{<1>}(x), \phi_{1i}^{<2>}(x), \phi_{2i}^{<2>}(x)$ 는 다음과 같이 표현된다<sup>(10)</sup>.

$$\phi_{1i}^{<1>}(x) = A_1 \cos(\sigma_i x) + A_2 \sin(\sigma_i x) \quad (14)$$

$$\phi_{2i}^{<1>}(x) = B_1 \cos(\beta_i x) + B_2 \sin(\beta_i x) + B_3 e^{\beta_i(L-x)} + B_4 e^{\beta_i(x-L)} \quad (15)$$

$$\phi_{1i}^{<2>}(x) = A_3 \cos(\sigma_i x) + A_4 \sin(\sigma_i x) \quad (16)$$

$$\phi_{2i}^{<2>}(x) = B_5 \cos(\beta_i x) + B_6 \sin(\beta_i x) + B_7 e^{\beta_i(L-x)} + B_8 e^{\beta_i(x-L)} \quad (17)$$

여기서  $\sigma_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{EA}}, \beta_i = \sqrt{\omega_i^4 \frac{\rho}{EI}}$ 이며  $\omega_i$ 는 회전 없이 있는 상태에서의 보의 고유진동수를 나타낸다. 크랙이 있는 보의 경계조건은 다음과 같다<sup>(10)</sup>.

$$\phi_{1i}^{<1>}(0) = 0, \phi_{2i}^{<1>}(0) = 0, \phi_{2i,xx}^{<1>}(0) = 0 \quad (17)$$

$$\phi_{2i}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i}^{<2>}(x_c), \phi_{2i,xx}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i,xx}^{<2>}(x_c) \quad (18)$$

$$\phi_{2i,xxx}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i,xxx}^{<2>}(x_c), \phi_{1i,x}^{<1>}(x_c) = \phi_{1i,x}^{<2>}(x_c)$$

$$k_{11}(\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)) + k_{12}(\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)) = EA \phi_{1i,x}^{<1>}(x_c) \quad (19)$$

$$k_{21}(\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)) + k_{22}(\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)) = EI \phi_{2i,xx}^{<1>}(x_c)$$

$$\phi_{1i,x}^{<3>}(L) = 0, \phi_{2i,xxx}^{<3>}(L) = 0, \phi_{2i,xxx}^{<3>}(L) = 0 \quad (20)$$

위 식에서 하첨자에 포함된  $x$ 는 각 하첨자에 대한 모드함수의 미분을 뜻한다. 즉  $xx$ 는 모드함수의 2차 미분을,  $xxx$ 는 3차 미분을 나타낸다. 위 12개의 식으로부터 구성된  $12 \times 12$ 행렬이 무의미해를 갖지 않기 위한 조건으로부터 각 모드함수의 계수인  $A_i$ 와  $B_i$ 가 결정될 수 있다. 이로부터 얻어진 모드함수는 모든 경계조건을 만족하는 comparison 함수이며 그 수렴속도가 매우 빠르다.

반경이  $r$ 인 허브가 각속도  $\Omega$ 로 회전할 경우 디

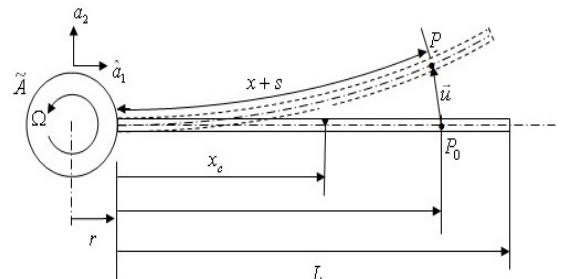


Fig. 3 Configuration of a rotating cracked beam

스크  $\tilde{A}$ 의 각속도와  $P$ 의 속도는 다음과 같다.

$$\tilde{\omega}^{\tilde{A}} = \Omega \hat{a}_3 \quad (22)$$

$$\tilde{v}^P = [\dot{u}_1 - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [r\Omega + \dot{u}_2 + \Omega(x + u_1)] \hat{a}_2 \quad (23)$$

Kane의 방법에 의한 운동방정식은 다음과 같다<sup>(12)</sup>.

$$\int_0^L \rho \left( \frac{d\tilde{v}^P}{dt} \right) \cdot \left( \frac{\partial \tilde{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (24)$$

$U$ 는 보의 총 탄성에너지이며  $q_i$ 는 일반좌표를 나타낸다. 식 (23)의 편속도는 다음과 같은 관계식에 의해  $\dot{s}$ 와  $\dot{u}_2$ 로 나타내어질 수 있다.

$$\dot{s} = \dot{u}_1 + \int_0^x \left( \frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (25)$$

보의 총 탄성에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + U_c \quad (26)$$

여기서  $E$ 는 영의 계수,  $A$ 는 보의 단면적,  $I$ 는 보의 2차 면적 모멘트를 나타낸다. 이상의 식들을 종합하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [m_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - \Omega^2 m_{ij}^{11} q_{1j} + k_{ij}^S q_{1j}] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} [2\Omega m_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + \dot{\Omega} m_{ij}^{12} q_{2j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} [k_{ij}^{11} q_{1j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [k_{ij}^{12} q_{2j}] = \Omega^2 P_{1i} \end{aligned} \quad (27)$$

( $i = 1, 2, \dots, \mu_1$ )

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} [m_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \{k_{ij}^B + \Omega^2 (k_{ij}^G - m_{ij}^{22})\} q_{2j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} [2\Omega m_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \dot{\Omega} m_{ij}^{21} q_{1j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} [k_{ij}^{21} q_{1j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [k_{ij}^{22} q_{2j}] = -\dot{\Omega} P_{2i} \end{aligned} \quad (28)$$

( $i = 1, 2, \dots, \mu_2$ )

여기서

$$\begin{aligned} m_{ij}^{ab} &= \int_0^L \rho \phi_{ai}(x) \phi_{bj}(x) dx \\ k_{ij}^S &= \int_0^L EA \phi_{1i,x}(x) \phi_{1j,x}(x) dx \\ k_{ij}^B &= \int_0^L EI \phi_{2i,xx}(x) \phi_{2j,xx}(x) dx \\ k_{ij}^G &= \int_0^L \frac{\rho}{2} (2r + L + x)(L - x) \phi_{2i,x}(x) \phi_{2j,x}(x) dx \\ k_{ij}^{11} &= k_{11} [\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)] [\phi_{1j}^{<2>}(x_c) - \phi_{1j}^{<1>}(x_c)] \\ k_{ij}^{12} &= k_{12} [\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)] [\phi_{2j,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2j,x}^{<1>}(x_c)] \\ k_{ij}^{21} &= k_{21} [\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)] [\phi_{1j}^{<2>}(x_c) - \phi_{1j}^{<1>}(x_c)] \\ k_{ij}^{22} &= k_{22} [\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)] [\phi_{2j,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2j,x}^{<1>}(x_c)] \\ P_{ai} &= \int_0^L \rho(r + x) \phi_{ai}(x) dx \end{aligned} \quad (30)$$

인장, 굽힘 간 연성효과를 무시하고 일정한 각속도의 회전운동을 가정하면 다음과 같은 굽힘 방향 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [\hat{m}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \{k_{ij}^B + k_{ij}^{22} + \Omega^2 (\hat{k}_{ij}^G - \hat{m}_{ij}^{22})\} q_{2j}] = 0 \quad (31)$$

( $i = 1, 2, \dots, \mu_2$ )

보다 일반적인 결과를 얻기 위해 운동방정식을 무차원화할 수 있다. 다음과 같은 무차원 변수 및 매개 변수를 이용하여 시스템의 고유진동 해석에 사용되는

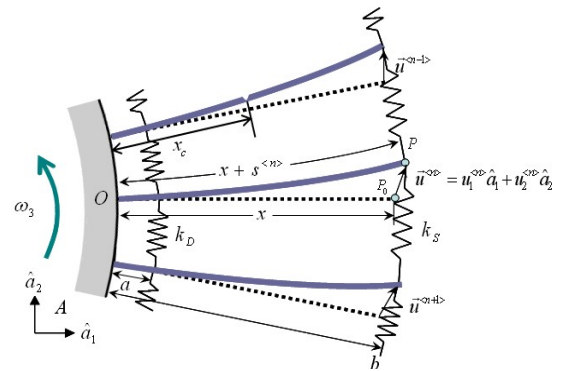


Fig. 4 Configuration of blades system having a crack

최종적인 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \mathcal{G}_{ai} = \frac{q_{ai}}{L} \quad (32)$$

$$\gamma = \Omega T \quad (33)$$

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [\bar{m}_{ij}^{22} \ddot{\mathcal{G}}_{2j} + \{\bar{k}_{ij}^B + \gamma^2(\bar{k}_{ij}^G - \bar{m}_{ij}^{22})\} \mathcal{G}_{2j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [\bar{k}_{ij}^{22} \mathcal{G}_{2j}] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \quad (35)$$

위 식에서  $\ddot{\mathcal{G}}_{ai}$  는  $\tau$  에 대한  $\mathcal{G}_{ai}$  의 2차 미분을 나타내며 각 행렬과 무차원 매개변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{m}_{ij}^{ab} &= \int_0^1 \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi \\ \bar{k}_{ij}^B &= \int_0^1 \psi_{2i, \xi\xi} \psi_{2j, \xi\xi} d\xi \\ \bar{k}_{ij}^G &= \int_0^1 [\delta(1-\xi) + (1-\xi^2)] \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \\ \bar{k}_{ij}^{22} &= \bar{k}_{22} [\psi_{2i, \xi}^{<2>}(\beta_c) - \psi_{2i, \xi}^{<1>}(\beta_c)] \\ &\quad [\psi_{2j, \xi}^{<2>}(\beta_c) - \psi_{2j, \xi}^{<1>}(\beta_c)] \\ \beta_c &= \frac{x_c}{L}, \quad \delta = \frac{r}{L}, \quad \bar{k}_{22} = \frac{h}{EI} k_{22} \end{aligned} \quad (36)$$

### 3.2 패킷 블레이드 시스템의 운동방정식

Fig. 4는 하나의 크랙을 갖는 패킷 블레이드 시스템의 형상이다. 이 논문에서는 블레이드를 외팔보로, 디스크 및 쉬라우드의 연성 효과를 스프링으로 가정하였다.  $k_D$ 와  $k_S$ 는 보 구조물 사이 디스크와 쉬라우드의 연성스프링 강성을,  $a$ 와  $b$ 는 연성스프링의 연결된 위치를,  $x_c$ 는 크랙의 위치를 나타낸다.  $U$ 는 보의 인장 및 굽힘에 의한 탄성에너지, 연성스프링에 의한 탄성에너지, 크랙에 의한 탄성에너지로 다음과 같이 표현된다.

$$U^{<n>} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k_D [u^{<n>}(a) - u^{<n-1>}(a)]^2$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} k_S [u^{<n>}(b) - u^{<n-1>}(b)]^2 \\ &+ \frac{1}{2} k_D [u^{<n+1>}(a) - u^{<n>}(a)]^2 \\ &+ \frac{1}{2} k_S [u^{<n+1>}(b) - u^{<n>}(b)]^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + U_c \end{aligned} \quad (37)$$

다음과 같은 무차원 변수 및 매개변수를 이용하여 시스템의 고유진동 해석에 사용되는 최종적인 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau &\equiv \frac{t}{T}, \quad \xi \equiv \frac{x}{L}, \quad \theta \equiv \frac{q}{l}, \quad \delta \equiv \frac{r}{l}, \quad \alpha_D \equiv \frac{a}{l}, \quad \alpha_S \equiv \frac{b}{l} \\ T &= \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI_{zz}}}, \quad \gamma = \Omega T, \quad \beta_D = \frac{k_D l^3}{EI_{zz}}, \quad \beta_S = \frac{k_S l^3}{EI_{zz}} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\mu} [M_{ij} \ddot{\theta}_j^{<n>} + \{K_{ij}^B + K_{ij}^C \\ &\quad + \gamma^2(\delta K_{ij}^{GA} + K_{ij}^{GB} - M_{ij})\} \theta_j^{<n>} \\ &\quad - \beta_D (K_{ij}^{CD} \theta_j^{<n-1>} - 2K_{ij}^{CD} \theta_j^{<n>} + K_{ij}^{CD} \theta_j^{<n+1>}) \\ &\quad - \beta_S (K_{ij}^{CS} \theta_j^{<n-1>} - 2K_{ij}^{CS} \theta_j^{<n>} + K_{ij}^{CS} \theta_j^{<n+1>})] = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_0^1 \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \\ K_{ij}^B &= \int_0^1 \varphi_{i, \xi\xi}(\xi) \varphi_{j, \xi\xi}(\xi) d\xi \\ K_{ij}^{GA} &= \int_0^1 (1-\xi) \varphi_{i, \xi}(\xi) \varphi_{j, \xi}(\xi) d\xi \\ K_{ij}^{GB} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \varphi_{i, \xi}(\xi) \varphi_{j, \xi}(\xi) d\xi \\ K_{ij}^{CD} &= \varphi_i(\alpha_D) \varphi_j(\alpha_D) \\ K_{ij}^{CS} &= \varphi_i(\alpha_S) \varphi_j(\alpha_S) \\ K_{ij}^C &= \bar{k}_{22} (\phi_{2i, \xi}^{<2>}(\beta_c) - \phi_{2i, \xi}^{<1>}(\beta_c)) (\phi_{2j, \xi}^{<2>}(\beta_c) - \phi_{2j, \xi}^{<1>}(\beta_c)) \end{aligned} \quad (40)$$

Fig. 1에서 알 수 있듯이 패킷 양끝에 위치한 블레이드들의 경우 한쪽 끝은 쉬라우드 강성이 없으

므로 식 (39)에서  $-\beta_s(-K_{ii}^{CS}\theta_i^{<n>} + K_{ii}^{CS}\theta_i^{<n+1>})$ 만큼 제외하여야 한다.  $\varphi_j$ 는  $\phi_j$ 와 동일한 함수값을 가지나  $\xi$ 의 함수이며,  $\ddot{\theta}_j$ 은  $\theta_j$ 의  $\tau$ 에 관한 2차 미분을 나타낸다.

식 (39)로부터 Fig. 4와 같은 패킷 블레이드로 구성된 개방계 시스템의 진동 방정식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{0\} \quad (41)$$

모드 해석을 위하여 열벡터  $\{\theta\}$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\{\theta\} = e^{i\lambda\tau} \{\eta\} \quad (42)$$

여기서  $\lambda$ 는 고유진동수이고  $\{\eta\}$ 는 모드형상을 나타내는 모드벡터이다. 식 (42)를 식 (41)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lambda^2[M]\{\eta\} = [K]\{\eta\} \quad (43)$$

이 식 (43)을 이용하여 모드 해석을 수행할 수 있다.

#### 4. 수치해석

Table 1은 외팔보에 크랙이 존재할 경우 고정단으로부터 0.25, 0.5, 0.75위치에( $\beta_c$ ) 크랙이 존재할 경우 크랙의 깊이를( $\kappa$ ) 0.05, 0.25, 0.5로 증가시켜 가면서 외팔보의 첫 번째 고유진동수 값들을 참고 문헌의 결과와 비교한 것이다. 크랙의 위치가 고정단에 가깝고 크랙의 크기가 클수록 고유진동수는 더 작아지는 것을 확인할 수 있었다.

패킷 블레이드 시스템의 수치해석을 위해 굽힘 방향 변위의 가상모드로 고정된 외팔보의 굽힘 진동모드를 적용하였으며 굽힘 방향에 대해 5개의 모드함수가 사용 되었다. 총 8개의 패킷, 48개의 블레이드로 구성된 시스템으로서 각 패킷에는 6개의 블레이드가 존재한다. 시스템의 고유진동수는 5개 그룹, 총 240개이며 한 그룹은 48개의 고유진동수로 이루어져 있다. Fig. 4와 Fig. 5는 이 중 낮은 1개 그룹의 결과로서 고유진동수가 회전 각속도에 따라 증가하는 것을 보여준다. 이러한 현상은 직관적으로

예측 될 수 있는 것이다.

Fig. 4는 크랙을 가진 블레이드를 포함하지 않는 패킷 블레이드 시스템의 고유진동수 변화를 관찰

Table 1 Comparison of the natural frequencies

|               |          | $\beta_c = 0.25$ | $\beta_c = 0.5$ | $\beta_c = 0.75$ |
|---------------|----------|------------------|-----------------|------------------|
| No crack      | Present  | 3.516            |                 |                  |
|               | Ref.[13] | 3.502            |                 |                  |
| $\kappa=0.05$ | Present  | 3.516            | 3.516           | 3.516            |
|               | Ref.[13] | 3.502            | 3.502           | 3.502            |
| $\kappa=0.25$ | Present  | 3.514            | 3.515           | 3.516            |
|               | Ref.[13] | 3.494            | 3.502           | 3.502            |
| $\kappa=0.5$  | Present  | 3.394            | 3.482           | 3.513            |
|               | Ref.[13] | 3.376            | 3.469           | 3.502            |

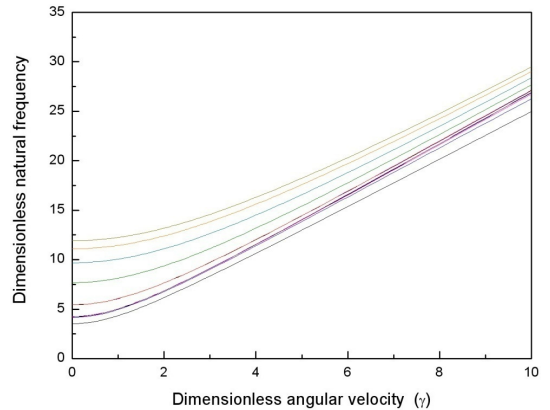


Fig. 5 The lowest 48 natural frequencies for the system without a crack

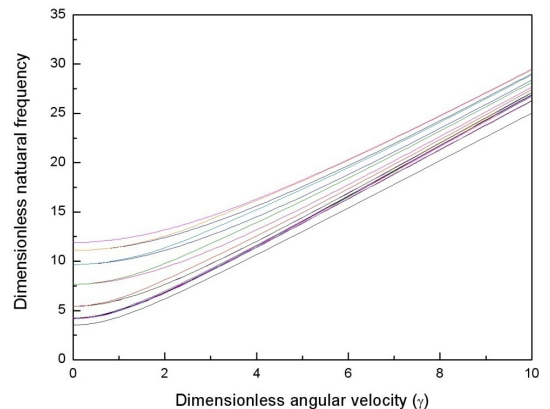


Fig. 6 The lowest 48 natural frequencies for the system with a crack

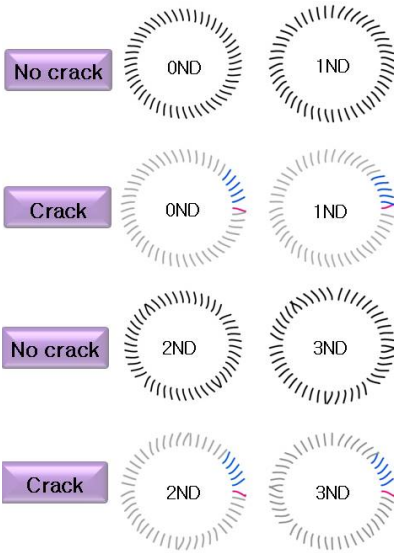


Fig. 7 Mode shapes having a cracked beam( $\kappa = 0.5$ ,  $\beta_c = 0.25$ )

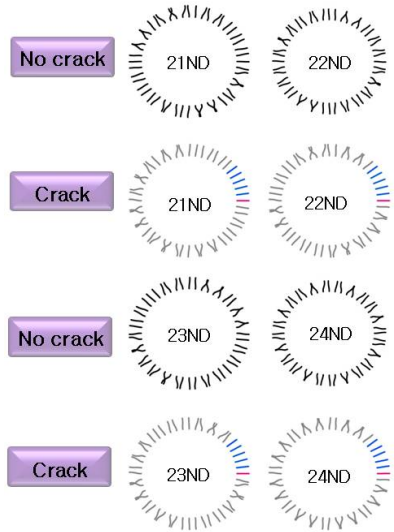


Fig. 8 Mode shapes having a cracked beam( $\kappa = 0.5$ ,  $\beta_c = 0.25$ )

한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 48개의 고유진동수들은 몇 개의 그룹별로 짝지어져서 변화하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 5는 크랙을 가진 블레이드를 포함한 패킷 블레이드 시스템의 고유진동수 변화를 관찰한 것이다. Fig. 4에서는 고유진동수가 몇 개의 그룹별로 짝지어져서 변화하였지만, Fig. 5에서는 dimensionless

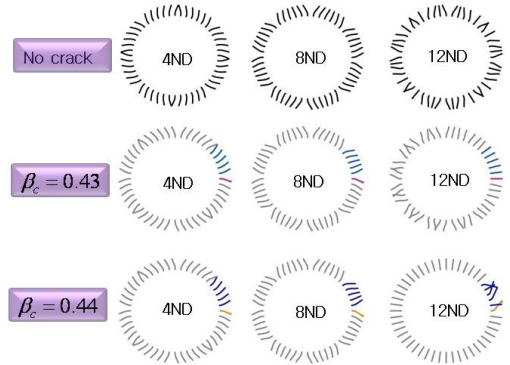


Fig. 9 Mode shapes having a cracked beam

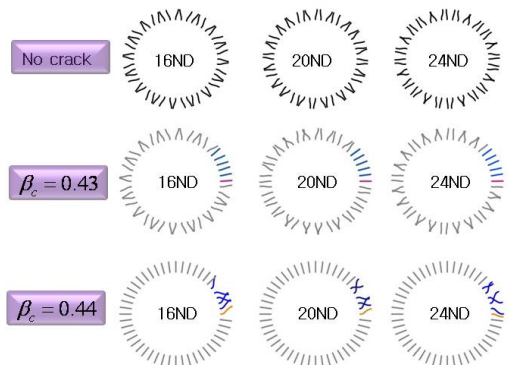


Fig. 10 Mode shapes having a cracked beam

angular velocity가 증가할수록 그룹별로 짝지어 있던 고유진동수가 갈라지면서 변화하는 것을 볼 수 있었다.

다중 블레이드 시스템에서 고유진동수에 해당하는 모드형상은 nodal diameter(ND)로 나타낼 수 있다. 이는 다중 블레이드가 하나의 시스템으로써 단일 블레이드에선 볼 수 없었던 nodal diameter로 표현한 것이며 이러한 nodal diameter의 최대 개수는 다중 블레이드 시스템에서 블레이드 수가 짝수인 경우 절반이며 블레이드가 홀수인 경우  $(N-1)/2$ 이다. 한 개의 그룹의 고유진동수에 해당하는 모드형상은 48개의 모드형상이 존재하며 최대 ND는 블레이드 개수의 절반인 24ND이다. 즉 0과 24ND는 한 개의 모드형상으로 이루어져 있으며 이를 제외한 1에서 23ND까지는 각각 2개의 모드형상으로 이루어져 있다.

Fig. 7과 Fig. 8에서는 크랙의 깊이가 0.5일 경우에 크랙의 위치를 변화시켜가면서 모드형상의 변화를 관찰한 것이다. Fig. 7에서 볼 수 있듯이 저차모

드에서는 크랙이 있는 블레이드에(빨간색) 진동현상이 집중되는 것을 볼 수 있었다. Fig. 8에서 볼 수 있듯이 고차모드에서는 크랙이 있는 블레이드를 포함한 패킷을(파란색) 제외한 패킷들에 진동이 집중되는 현상을 볼 수 있다. Fig. 9와 Fig. 10에서는 크랙의 위치를( $\beta_c$ ) 자유단쪽으로 옮겨가면서 모드 형상을 관찰해 보았다. 저차모드에서는 Fig. 7과 마찬가지로 크랙이 있는 블레이드에 진동현상이 집중되는 것을 볼 수 있었다. 하지만 고차모드에서는( $4n$  ND) 크랙의 위치가 0.44에 도달하면서부터 진동현상이 크랙을 가진 블레이드를 포함한 패킷에 집중되는 것을 볼 수 있었다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 블레이드 임의의 순서와 위치에 크랙이 있는 회전하는 패킷 블레이드 시스템의 굽힘진동 해석모델링이 제시되었다. 이 모델링에서 크랙에 의한 효과를 고려하기 위해 1차 파괴모드만 고려하였다. 또한 패킷 블레이드 시스템의 굽힘방향 지배방정식으로부터 유도된 일반해에 시스템의 경계조건과 연속조건을 적용하여 얻은 식의 특성방정식의 해를 구함으로써 고유진동수를 얻을 수 있었다. 제안된 크랙을 가진 외팔보 모델의 정확성은 참고문헌(13)의 결과값들로 검증 되었다. 크랙을 가진 회전하는 멀티 패킷 블레이드 계에서는 각각의 고유진동수들이 서로 갈라져서 변화하는 것을 알 수 있었으며 진동 국부화 현상이 나타나는 것을 알 수 있었다. 크랙의 위치에 상관없이 저차 모드에서는 크랙이 있는 블레이드에 진동이 집중되어 나타나는 것을 알 수 있었다. 고차모드에서는 크랙의 위치가 0.43까지 증가할 때까지는 크랙을 포함한 패킷에는 진동이 발생하지 않았다. 크랙의 위치가 0.44 이후에는 몇몇 고차모드에서 크랙을 포함한 패킷에 진동이 집중되는 것을 알 수 있었다.

## 참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.

(2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," J. of App. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 25, pp. 28~30.

(3) Bock, E., 1942, "Behavior of Concrete and Reinforced Concrete Subjected to Vibrations Causing Bending," VDIZ 86, pp. 145~147.

(4) Shen, M., Pierre, C. 1990, "Natural Modes of Euler-Bernoulli Beam," J. of Vibration and Acoustics Stress and Reliability, Vol. 111, pp. 81~84.

(5) Chati, M., Rand, R. and Mukherjee, S., 1997, "Modal Analysis of a Cracked Beam," J. of Sound and Vibration, Vol. 207, No. 2, pp. 249~270.

(6) Chondros, T. and Dimarogonas, A., 1998, "Vibration of a Cracked Cantilever Beam," J. of Vibration and Acoustics, Vol. 120, pp. 742~746

(7) Yoon, H. and Son, I., 2005, "Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 5, pp. 620~628.

(8) Yoo, H. H., 1991, "Bending Vibration of Rotating Cantilever Beams," Transactions of the KSME, Vol. 16, No. 5, pp. 891~898.

(9) Chondros, T. and Dimarogonas, A., 1998, "Vibration of a Cracked Cantilever Beam," J. of Vibration and Acoustics, Vol. 120, pp. 742~746

(10) Dado, M. and Abuzeid, O., 2003, "Coupled Transverse and Axial Vibratory Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia," J. of Sound and Vibration, Vol. 261, No. 4, pp. 675~696.

(11) Kane, T. and Levinson, D., 1985, "Dynamics, Theory and Applications," McGraw-Hill Book Co.

(12) Ewalds, H. and Wnahil, R., 1984, "Fracture Mechanics," Edward Arnold and Delftse Uitgevers Maatschappij, London.

(13) Krawczuk, M., 2002 "The Dynamic Analysis of a Cracked Beam by the Spectral Element Method".

(14) Anderson, T. L., 2002 "Fracture Mechanics and Application".