

# Pasternak지반에 지지된 집중질량을 갖는 보강된 변단면 후판의 동적안정해석

## Dynamic Stability Analysis of Stiffened Tapered Thick Plate with Concentrated Mass on Pasternak Foundations

이 용 수\*·김 일 중\*

Yong Soo Lee and Il Jung Kim

(2009년 9월 15일 접수 ; 2009년 11월 3일 심사완료)

**Key Words :** Finite Element Method(유한요소법), Tapered Thick Plate(변단면후판), Pasternak Foundation (Pasternak지반), Concentrated Mass(집중질량), Dynamic Stability(동적안정)

### ABSTRACT

This paper has the object of investigating dynamic stability of stiffened tapered thick plate with concentrated mass on Pasternak foundation by means of finite element method and providing kinematic design data for mat of building structures. Finite element analysis of stiffened tapered thick plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis plate which is supported on Pasternak foundation, the Winkler foundation parameter is varied with 10, 100, 1000 and the shear foundation parameter is 5, 10, concentrated mass is  $0.25m_c$ ,  $1.0m_c$ , tapered ratio is 0.25, 0.5. The ratio of In-plane force to critical load is applied as  $0.4\sigma_{cr}$ ,  $0.6\sigma_{cr}$ ,  $0.8\sigma_{cr}$  respectively. This paper analyzed varying tapered ratio.

### 기 호 설 명

$a \times b$  : 판의 크기

$h$  : 판 두께

$m$  : 판 전체 질량

$w$  : 수직처짐

$\omega$  : 판의 고유진동수

$\sigma_{cr}$  : 판의 정적 좌굴응력

WFP : Winkler지반 파라미터

SFP : 전단지반 파라미터

$\rho$  : 단위 체적당질량

$\nu$  : 푸아송 비

$\theta_x$  :  $x$ 방향 회전각

$\theta_y$  :  $y$ 방향 회전각

$t_r$  : 변단면률

$\alpha$  : 정응력 계수

$\beta$  : 동응력 계수

### 1. 서 론

최근 지진이나 건설현장의 발파, 향타, 굴착 등에 의해 발생하는 지반진동은 인접 건축물의 기초를 통해 건물에 동적 영향을 끼친다. 지반을 통해 전달되는 동적영향은 지반-구조물 상호작용을 일으키므로 지반-구조물의 상호작용에 대한 해석은 진동 제어분야의 중요한 연구대상이 되고 있다. 건축 분야에서 사용되는 판부재는 평판(flat plate)이 일반적이거나 시공성과 경제성 혹은 구조적인 이유에서 변단

† 교신저자; 정희원, 원광대학교 건축공학부  
E-mail : struct@wonkwang.ac.kr  
Tel : (063)530-9273, Fax : (063) 537-0226

\* 정희원, 전북과학대학 건축토목계열

면판의 형태로 계획되기도 한다.

근래들어 Horenberg 등에 의해 modal constraint 법을 이용하여 판의 동적 해석<sup>(1)</sup>, Celik 등에 의해 two-parameter 지반에 의해 지지된 판의 반복법을 이용한 해석<sup>(2)</sup> 및 Matsunaga에 의해 면내응력을 받는 후판의 좌굴안정 해석<sup>(3)</sup> 등이 이루어졌다. 또한 Yokoyama에 의해 탄성지반에 지지된 Timoshenko Beams의 Parametric 불안정에 대한 연구<sup>(4)</sup>가 행해졌으며, Kukreti, Farsa와 Bert는 미분구적법과 Rayleigh-Ritz method를 이용하여 단순지지된 변단면 후판의 진동에 관한 연구<sup>(5)</sup>를 시행하였다. 국내에서는 이용수 등이 Timoshenko 보-기둥의 안정해석<sup>(6)</sup> 및 비균질 Pasternak지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석<sup>(7)</sup>과 동적안정해석<sup>(8)</sup>을 행하였다.

현재 Pasternak지반에 의해 지지된 변단면 후판의 동적안정해석에 대한 연구는 아직 활발한 편은 아니며, 이 연구에서 유한요소법을 적용하여 이에 대해 해석하였다.

변단면 후판의 유한요소는 요소 내 절점이 존재하지 않고 요소경계에만 존재하는 요소인 8절점 Serendipity 요소계를 적용하여 판요소에 대한 강성행렬들을 전체 요소에 대해 조합하여 동적 안정해석 방정식을 구하였다. Serendipity 요소계의 특징으로는 실제 형상함수를 다항식으로도 구할 수 있으며  $x, y$  두 방향으로 절점수가 같지 않아도 형상함수 구성이 가능하다.

구조물을 지지하는 지반은 Winkler지반에 전단층을 추가하여 지반의 연속성을 고려한 Pasternak지반으로 모델링하였으며 판 해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였다.

## 2. 변단면 후판의 유한요소 해석

### 2.1 집중질량을 갖는 변단면 후판요소

#### (1) 변단면 후판의 두께 함수

판은 Fig. 1과 같이 두께가 판의 길이에 따라 1방향에 대해 선형적으로 변하는 변단면 후판으로 두께에 대한 함수는 다음과 같다.

$$h = h_0 f(\xi) \quad (1)$$

여기서,  $h_0, h_1$ 는 각각  $x=0, x=a$ 일 때 판의 두께,

$$\xi = \frac{x}{a}, f(\xi) = 1 + \alpha\xi,$$

$$t_r = (h_1 - h_0)/h_0 : \text{Tapered Ratio}$$

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f(\xi)^3 \quad (2)$$

여기서,  $D_0 = Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$

$\nu$ : 푸아송 비

#### (2) 탄성지반

탄성지반은 Fig. 1과 같이 지반을 수직 스프링으로 이상화한 Winkler지반과 변위의 연속성을 고려하기 위한 전단층으로 이상화 한 Pasternak지반 모형을 사용하였다.

Pasternak지반을 구성하는 Winkler지반 매개변수(WFP)와 전단지반매개변수(SFP)는 다음과 같이 정의된다.

$$WFP = \frac{k_w a^4}{D_0}, SFP = \frac{k_g a^2}{D_0} \quad (3)$$

여기서,

$k_w$ : Winkler지반강성

$a$ : 판의 크기

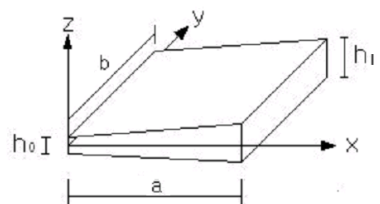


Fig. 1 Tapered thick plate

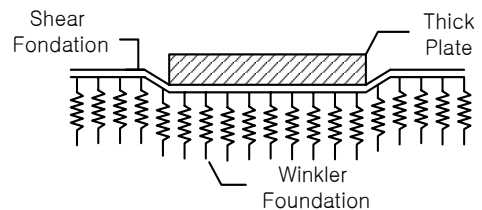


Fig. 2 Modeling of Pasternak foundation

$k_g$  : 전단지반강성  
 $D$  : 판의 휨 강성

(3) 판 요소의 변위함수

판 요소의 크기를  $2\bar{a} \times 2\bar{b}$ 로 정의 할 때 무차원 좌표계는  $\xi = (x-x_c)/a$ ,  $\eta = (y-y_c)/b$ 이고 Fig. 3과 같이 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \tag{4}$$

여기서,

$w$  : 판 요소의 수직변위

$\theta_x$  : 판 요소의  $x$ 방향 회전각

$\theta_y$  : 판 요소의  $y$ 방향 회전각

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} w_2 \theta_{x2} \theta_{y2} \dots w_8 \theta_{x8} \theta_{y8}]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

이 경우 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i) \\ &+ \frac{1}{4} [(1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi^2) \\ &+ (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \eta^2)] \end{aligned} \tag{5}$$

$(i = 1, 2, \dots, 8)$

(4) 가상일의 원리

판 및 보 요소의 운동에너지(T)와 지반에 대한

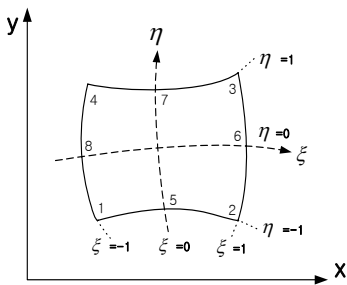


Fig. 3 8-node isoparametric element

항을 포함한 변형에너지(U) 그리고 외력( $N_x$ )에 의한 일(W)을 조합하고 가상일의 원리를 적용하여 고유방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta(T - U) - \delta(W) = 0 \tag{6}$$

판 요소의 운동에너지  $T_e$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \int_A \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dA \\ &+ \frac{1}{2} m_c(a_1, b_1) \dot{w}^2(a_1, b_1) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서

$\rho$  : 판의 단위면적당 질량밀도

$h$  : 판 요소의 두께

$\dot{w}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$  : 판 요소 변위, 회전각의 시간에 따른 변화율

$$dA = dx \cdot dy$$

$$\dot{w}(a_1, b_1) = \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \right]_{y=b_1}^{x=a_1}$$

$m_c(a_1, b_1)$  :  $x = a_1, y = b_1$  위치의 집중질량

식 (4)를 이용하여 식 (7)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \{ \dot{\delta}_e \}^T \int_A \rho [N]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N] dA \{ \dot{\delta}_e \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \dot{w}_e \}^T [M_p] \{ \dot{w}_e \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{\delta}_e \}^T [M_e] \{ \dot{\delta}_e \} + \frac{1}{2} \{ \dot{w}_e \}^T [M_p] \{ \dot{w}_e \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{\delta} \}^T [\overline{M}_e] \{ \dot{\delta} \} \end{aligned} \tag{8}$$

여기서

$\{ \delta_e \}$  : 판 요소의 절점변위

$\{ \dot{\delta}_e \}$  : 판 요소 절점변위의 시간에 따른 변화율

$$[M_e] = \int_A \rho [N]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N] dA$$

: 판 요소의 질량행렬

$$[M_p] = m_c(a_1, b_1) [\bar{N}]^T [\bar{N}] \quad \text{: 집중질량행렬}$$

$[\bar{M}_e]$  : 집중질량을 포함한 질량행렬

$$[\bar{N}] = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

Winkler지반 강성과 전단지반 강성을 고려한 판 요소의 변형에너지  $U_e$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_e = & \frac{1}{2} \int_A [M]^T \{\chi\} dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \{\psi\} dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A k_g \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$[M]$  : 모멘트

$[Q]$  : 전단력

$\{\chi\}$  : 곡률

$\{\psi\}$  : 전단변형각

$k_w$  : Winkler지반강성

$k_g$  : 전단지반강성

식 (3)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_e = & \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [[K_{ef}] + [K_{es}]] \{\delta_e\} \\ & + \frac{1}{2} \{w_e\}^T [[W_{ef}] + [S_{ex}] + [S_{ey}]] \{w_e\} \\ = & \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_e] \{\delta_e\} + \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_f] \{w_e\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$[K_{ef}]$  : 판 요소의 휨강성행렬

$[K_{es}]$  : 판 요소의 전단강성행렬

$[W_{ef}]$  : Winkler지반강성행렬

$[S_{ex}], [S_{ey}]$  : x, y방향 전단지반강성행렬

외력에 의한 일은 1방향 압축만을 고려하면 다음과 같다.

$$W_p = \frac{1}{2} \int_A P_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dA \quad (11)$$

식 (3)과 면내력  $P_x = \sigma h$ 을 식 (11)에 대입하면 다음과 같다.

$$W_p = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_{eg}] \{w_e\} \quad (12)$$

여기서  $[K_{eg}] = t \int_A [\bar{N}]^T \sigma [\bar{N}] dA$

$\sigma$  : 면내응력

판 요소의 운동에너지( $T_e$ )는 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ \int_A \rho \left( h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right) dA \right\} \quad (13)$$

여기서,

$\rho$  : 판의 단위 면적당 질량

$\dot{w}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$  : 판 요소의 시간 변화에 따른 변위 및 회전각

Winkler지반강성과 전단지반강성을 포함한 판 요소의 변형에너지( $U_e$ )는 다음과 같이 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U_e = & \frac{1}{2} \int_A [M]^T \{\chi\} dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \{\psi\} dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A k_g \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$k_w$  : Winkler지반강성,  $\{\chi\}$  : 곡률

$k_g$  : 전단지반강성,  $\{\psi\}$  : 전단 변형

$[M]$ : 모멘트 행렬,  $[Q]$  : 전단력 행렬

외력에 의한 일( $W_e$ )은 한 방향 압축 만을 고려하면 다음과 같다.

$$W_e = \frac{1}{2} \int P_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (15)$$

여기서,

$P_x$  : x 방향 면내력

식 (13), (14), (15)에 식 (4)를 대입하여 행렬형태로 정리하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_e\}^T [M_e] \{\dot{\delta}_e\} \\ U_e &= \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_e] + [K_f] \{\delta_e\} \\ W_e &= \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_g] \{\delta_e\} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

- [M<sub>e</sub>] : 판 요소의 질량행렬
- [K<sub>e</sub>] : 휨·전단 강성행렬
- [K<sub>f</sub>] : Winkler지반·전단지반 강성행렬
- [K<sub>g</sub>] : 기하 강성행렬

## 2.2 보강재 요소

### (1) 보강재 변위함수

보강재 요소는 Timoshenko 보-기둥 요소의 변위함수를 이용하였다.

Fig. 4와 같이 임의의 점의 변위와 회전각은 다음과 같은 변위함수로 정의 된다.

$$w(\xi) = [N]_b \{w_e\} \quad (17a)$$

$$\theta(\xi) = [N]_b \{\theta_e\} \quad (17b)$$

$$[N]_b = [N_{bl}, N_{l2}, N_{l3}] \quad (17c)$$

여기서,  $N_{bl} = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$

$$N_{l2} = (1-\xi)(1+\xi)$$

$$N_{l3} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

$$\{w_e\}^T = \{w_1^e, w_2^e, w_3^e\}$$

$$\{\theta_e\}^T = \{\theta_1^e, \theta_2^e, \theta_3^e\}$$

### (2) 보강재의 가상일의 원리

Pasternak지반으로 지지되고 있는 길이  $2\bar{a}$ 의

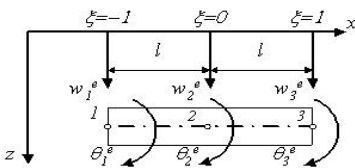


Fig. 4 Timoshenko beam-column element system

Timoshenko 보-기둥요소에 대한 변형에너지( $U_{be}$ )는 다음 식과 같다.

$$U_{be} = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \left\{ EI_b \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + k' GA_b \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 + k_w (w)^2 + k_g \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \right] \quad (18)$$

여기서,

- $EI_b$  : 보-기둥 요소의 휨 강성
- $k'$  : 전단계수
- $G$  : 전단탄성계수
- $A_b$  : 보-기둥 요소의 단면적

회전관성 효과를 고려한 보-기둥 요소의 운동에너지( $T_{be}$ )는 다음과 같다.

$$T_{be} = \frac{1}{2} \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} \rho_b \left\{ A_b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_b \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (19)$$

여기서,

- $\rho_b$  : 보 재료의 질량 밀도
- $t$  : 시간

축 하중  $P$ 에 의한 일( $W_{be}$ )은 다음과 같다.

$$W_{be} = -\frac{1}{2} \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (20)$$

Timoshenko 보-기둥 요소의 변형에너지, 운동에너지, 축 하중이 한 일은 다음과 같이 요소의 절점 변위벡터  $\{q\}^e$ 의 항으로 쓸 수 있다.

$$U_{be} = \frac{1}{2} \{q\}^{e,T} [K]_b^e \{q\}^e$$

$$T_{be} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^{e,T} [M]_b^e \{\dot{q}\}^e \quad (21)$$

$$W_{be} = \frac{1}{2} \{q\}^{e,T} [K_g]_b^e \{q\}^e$$

여기서,

- $\{ \cdot \}$  :  $t$ 에 대한 도함수
- $[K]_b^e$  : 휨 강성행렬
- $[M]_b^e$  : 질량행렬
- $[K_g]_b^e$  : 기하강성행렬

$[K_f]_b^e$  : Winkler지반강성행렬

### 2.3 고유치 방정식

식 (8), (10), (12)를 이용하여 전체 판요소에 대해 조합하고, 식 (17a)~(17c)를 이용하여 전체 보-기둥요소에 대해 조합한 후 가상일의 원리를 식 (6)에 적용하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$\{[K_E] + [K_{E,b}] - \sigma\{[K_G] + [K_{G,b}]\} - \omega^2 \{[K_M] + [K_{M,b}]\} = 0 \quad (22)$$

여기서

$[K_E]$  : 전체 판 요소의 요소강성행렬

$[K_M]$  : 전체 판 요소의 질량행렬

$[K_G]$  : 면내응력 1에 대한 전체판의 기하강성행렬

$[K_{E,b}]$  : 전체 보-기둥요소의 요소강성행렬

$[K_{M,b}]$  : 전체 보-기둥요소의 질량행렬

$[K_{G,b}]$  : 면내응력 1에 대한 전체 보-기둥요소의 기하강성행렬

$\omega$  : 판의 고유 원 진동수

식 (22)에서 좌굴응력 이하의 면내응력을 받는 집중 질량을 갖는 보강후판의 진동수  $\omega$ 를 구할 수 있다.

### 2.4 동적 안정 방정식 구성

동적안정문제에서 작용하는 하중  $\sigma$ 는 다음과 같다.

$$\sigma = \alpha\sigma_\alpha + \beta\sigma_\alpha \cos \bar{\omega}t \quad (23)$$

여기서,

$\alpha$  : 좌굴응력에 대한 정응력비

$\beta$  : 좌굴응력에 대한 동응력비

$\sigma_\alpha$  : 정적 좌굴응력

$\bar{\omega}$  : 동적 응력의 진동수

식 (23)을 식 (22)에 대입하면 다음의 Mathieu-Hill 방정식을 얻는다.

$$[K_M]\{\ddot{\delta}\} + \{[K_E] - \alpha\sigma_\alpha [K_G]\} - \beta\sigma_\alpha \cos \bar{\omega}t [K_G] \{\delta\} = 0 \quad (24)$$

여기서,

$[\overline{K_{G_s}}]$  : 평균 응력  $\sigma_0$ 에 대한 기하강성행렬

$[\overline{K_G}]$  : 주기 응력 진폭  $\sigma_t$ 에 대한 기하강성행렬

위 Mathieu-Hill 방정식의 해를 다음과 같이 급수 형태로 가정된다.

$$\delta(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\bar{\omega}}{2}t + b_k \cos \frac{k\bar{\omega}}{2}t \right) \quad (25)$$

식 (24)를 만족하기 위해서는 식 (25)의 계수의 행렬식은 0이 되어야 한다.  $a_k$ 와  $b_k$ 에 대한  $k \times k$ 행렬식을 일차 근사화하면 다음식이 된다.

$$\{[K_E] - \alpha \cdot \sigma_\alpha [\overline{K_{G_s}}] \pm \frac{1}{2} \beta \sigma_\alpha [\overline{K_G}] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M]\} = 0 \quad (26)$$

평균응력과 응력진폭의 영향을 동일하게 취하여  $[\overline{K_{G_s}}] = [\overline{K_{G_t}}] = [\overline{K_G}]$ 로 하면 식 (26)은 다음과 같이 된다.

$$\{[K_E] - \left( \alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) \sigma_\alpha [\overline{K_G}] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M]\} \{w\} = 0 \quad (27)$$

식 (27)에서 정적응력 계수비  $\alpha$ 와  $\beta$ 값에 따른 판의 진동수비( $\bar{\omega}/\omega_e$ =면내응력의 진동수/판의 고유진동수)를 구하여 동적불안정 영역을 표시한다.

## 3. 비교 분석 및 적용

### 3.1 비교 분석

이 연구에서 유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 정확성을 검토하였다.

Table 1은 *SFP*가 10일 때 *WFP*의 변화에 따라 평판의 고유진동수를 산출하여 참고문헌해와 비교한 것으로 최대 0.28%이내의 오차를 보였다. Table 2는 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 taper ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 이 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

### 3.2 변단면 후판의 동적안정해석

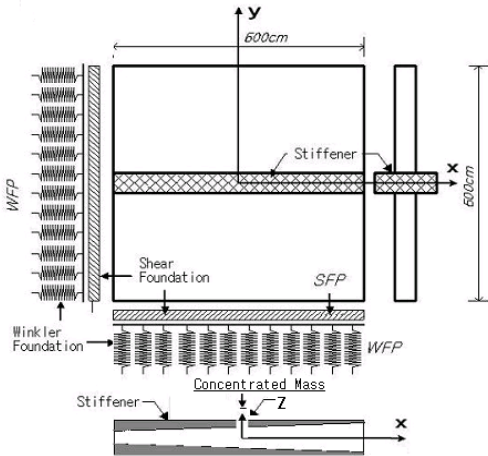
**Table 1** Natural frequency of plates on Pasternak foundation  
 $(\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0})$

WFP	Reference(9)	Present study	Error(%)
0	22.2117	22.25175	0.18
10	22.4104	22.46566	0.25
100	24.2698	24.30675	0.15
1000	38.0638	38.09225	0.075
10000	99.4473	99.6619	0.2

**Table 2** Natural frequency of tapered thick plates  
 $(\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0})$

Taper ratio	Reference <sup>(5)</sup>	Present study	Error(%)
0.2	21.59051	21.58787	0.01
0.4	23.54861	23.45184	0.19
0.6	25.37844	25.29344	0.33
0.8	27.23463	27.08043	0.56

판 지지상태 : 4변 단순지지  
 판의 체적당 질량( $\rho$ ) :  $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$   
 판의 크기 :  $600 \text{ cm} \times 600 \text{ cm}$   
 보강재의 크기 :  $30 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$  ( $\delta = 0.1$ )  
 $\delta = A_b / (bh_0), \gamma = EI_b / (bD_0)$   
 $I_b$  : 보강재의 단면 2차모멘트,  
 $A_b$  : 보강재의 단면적  
 $b$  : 판의 폭,  
 $E$  : 탄성계수  
 $D_0$  : 판의 휨강성  
 변단면율( $t_r$ ) : 0.25, 0.5  
 판의 두께 :  $h_0 = 26.67 \text{ cm}$  ( $t_r = 0.25$ 일 경우)  
 $h_0 = 24.00 \text{ cm}$  ( $t_r = 0.50$ 일 경우)  
 집중질량의 크기 :  $0.25 m_c, 1.0 m_c$   
 면내응력의 변화 :  $0.4\sigma_{cr}, 0.6\sigma_{cr}, 0.8\sigma_{cr}$   
 Winkler지반 파라미터 : 10, 100, 1000  
 전단지반 파라미터 : 5, 10  
■ : 동적불안정영역,  : 동적안정영역



**Fig. 5** Modelling of tapered stiffened thick plates concentrated mass on Pasternak foundation

이 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 Pasternak 지반에 지지된 4변 단순지지 변단면 보강후판의 동적 안정영역을 결정한다.

유한요소법을 적용한 해석을 위한 제원은 다음과 같다.

- 탄성계수( $E$ ) :  $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$
- 푸아송 비( $\nu$ ) : 0.167

판의 동적안정문제는 좌굴응력과 정응력계수  $\alpha$ , 동응력계수  $\beta$ 를 적용하고 고유값 문제를 풀므로써  $\alpha, \beta$  및 후판의 고유진동수에 대한 비  $\bar{\omega}/\omega_e$ 의 관계를 곡선으로 표시하여 불안정영역의 경계를 나타내게 된다.

Fig. 6(a)~(i)는 면내응력을 받는 변단면 후판의 동적안정 해석을 한 것으로 그래프내 곡선은 동적안정과 불안정영역의 경계를 나타낸다.

이 그래프들은 정응력 계수  $\alpha$ 를 0.4, 0.6, 0.8으로 하고 안정과 불안정영역의 경계에 해당되는 고유진동수에 대한 면내응력의 진동수비  $\bar{\omega}/\omega_e$ 와 동적응력계수  $\beta$ 의 관계를 plot하였다.

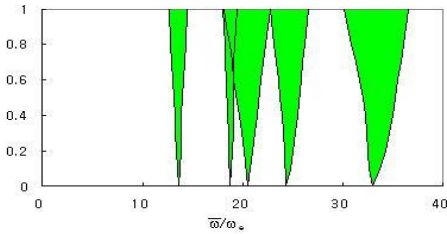
각 그래프에는 5개로 분리된 곡선군을 볼 수 있는데 좌측 수직축으로부터 가까운 순서대로 1차 진동 mode에서 5차 진동 mode를 나타낸 것이다.

Fig. 6(a)~(d)에서는 지반 파라미터의 변화 따른 진동수비( $\bar{\omega}/\omega_e$ )의 차이를 나타낸 것이다. 저차 모드보다 고차모드(5차)에서 진동수비가 약간 줄어든 것으로 나타났다.

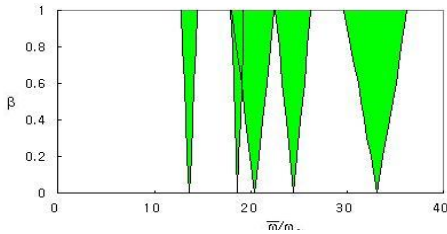
Fig. 6(c),(e),(f)는 정적응력비( $\alpha$ )에 변화에 따른 그래프를 나타낸 것이다. 정적응력비가 클수록 불안정

영역이 크게 확대 됨을 알 수 있다. 또한 정적응력비가 클수록 진동수비( $\bar{\omega}/\omega_e$ )가 적어지는 경향을 보였다. 이 경우 Winkler지반 계수가 커짐에 따라 각 불안정 모드가 중첩되어 나타나는 것을 볼 수 있다.

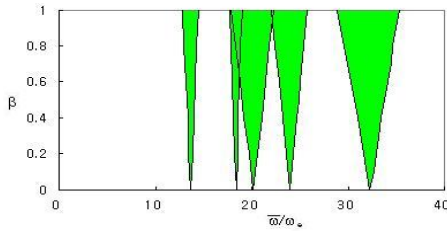
집중질량의 변화에 대한 그래프는 Fig. 6(c),(g)에서 보듯이 같은 조건하에서 집중질량이 변하는 경우는 면내력의 크기에 따른 진동수의 변화보다 그



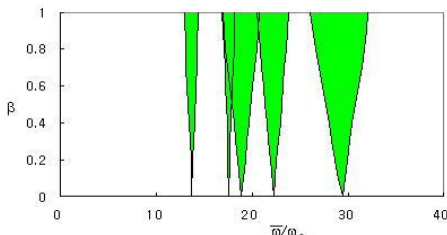
(a) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=10, SFP=5



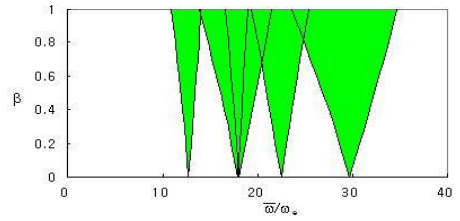
(b) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=100, SFP=5



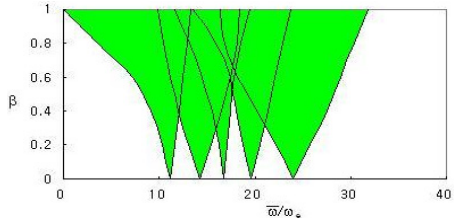
(c) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=100, SFP=10



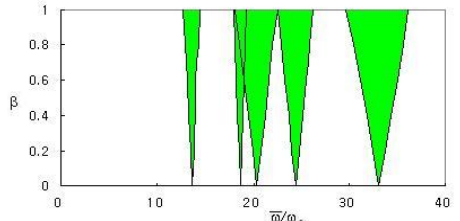
(d) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=1000, SFP=5



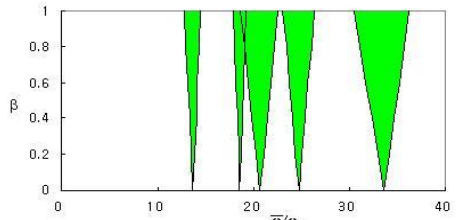
(e) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.6\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=100, SFP=5



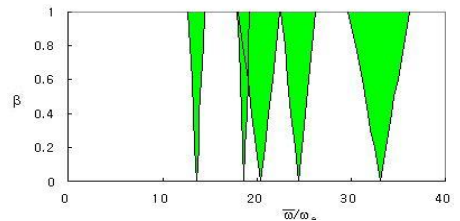
(f) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.8\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=100, SFP=5



(g) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=1.0, WFP=100, SFP=5



(h) Stiffener :  $\delta = 0.1$ , taper ratio( $t_r$ )=0.50,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=100, SFP=5



(i) Stiffener :  $\delta = 0.2$ , taper ratio( $t_r$ )=0.25,  $\sigma = 0.4\sigma_{cr}$ , concentrated mass=0.25, WFP=100, SFP=5

**Fig. 6** Stability area of tapered stiffened thick plates



리 크지 않게 나타났다. 그리고 지반강성작용에 따른 진동수의 변화는 Fig. 6(a),(b),(d)와 Fig. 6(b),(c)를 비교할 경우 집중질량과 같이 진동수의 변화에는 많은 영향을 미치지 않는 것으로 사료된다. 따라서 지반강성의 변화는 판의 불안정 영역의 변화에 거의 영향을 주지 않음을 알 수 있다.

Fig. 6(b),(e),(f)는 면내력의 변화에 대한 판의 불안정 영역을 파악한 것이다. 정적응력이  $0.4\sigma_{cr}$ ,  $0.6\sigma_{cr}$ ,  $0.8\sigma_{cr}$ 로 증가 할수록 불안정 영역은 급격히 큰 폭으로 확대됨을 알 수 있다.

Fig. 6(c),(i)는 보강재의 변화에 대한 것이며 보강재의 강성변화에 대해서는 거의변화가 발생하지 않음을 알 수 있다. 따라서 판의 일정한 진동수 유지를 위해서 보강재를 설치할 경우 진동의 급격한 변화를 주지 않아 판 구조물의 안정성에 많은 도움이 될 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

이 연구 해석 오차를 검증하기 위하여 참고 문헌해와 비교한 결과 최대 0.28%이내의 오차를 보여 참고해와 매우 근사함을 보였다

지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 taper ratio의 변화에 따른 참고문헌해와 비교한 결과 최대 0.56%의 오차를 나타내어 이 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

Fig. 6(a)~(d)에서는 저차 모드보다 고차모드(5차)에서 진동수비( $\bar{\omega}/\omega_c$ )가 약간 줄어든 것으로 나타났다.

Fig. 6(c),(e),(f)에서 보듯이 정적응력비( $\alpha$ )가 클수록 불안정 영역이 크게 확대됨을 알 수 있다. 또한 정적응력비가 클수록 진동수비( $\bar{\omega}/\omega_c$ )가 적어지는 경향을 보였다. 이 경우 Winkler지반 계수가 커짐에 따라 각 불안정 모드가 중첩되어 나타났다.

정적응력이  $0.4\sigma_{cr}$ ,  $0.6\sigma_{cr}$ ,  $0.8\sigma_{cr}$ 로 증가 할수록 불안정 영역은 급격히 큰 폭으로 확대됨을 알 수 있다. 정적응력의 감소가 판의 불안정영역 감소에 많은 영향을 주는 것으로 보인다.

집중질량의 크기변화, 보강재의 강성변화, 지반강성작용의 변화에 대한 판의 안정성영역의 변화에는 영향을 거의 주지 않는 것으로 보인다. 따라서 판의 일정한 진동수 유지를 위해서 보강재를 설치할 경

우 진동의 급격한 변화를 주지 않아 판 구조물의 안정성에 많은 도움이 될 것으로 판단된다.

#### 후 기

이 논문은 2008학년도 원광대학교 교내 연구비에 의해 연구되었음.

#### 참 고 문 헌

- (1) Horenberg, J. A. G. and Kerstens, J. G. M., 1985, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II: Modal Constraint Method," J. Sound and Vibration, Vol. 101, pp. 317~324.
- (2) Celik, M. and Saygun, A., 1998, "A Method for the Analysis of Plates on a Two-parameter Foundation," Computer & Structures, Vol. 36, pp. 2891~2915.
- (3) Matsunaga, H., 1997, "Buckling Instability of Thick Elastic Plates Subjected to In-plane Stresses," Computer & Structures, Vol. 62, No.1, pp. 205~214.
- (4) Yokoyama, T., 1988, "Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation," Computer & Structures, Vol. 28, No. 2, pp. 207~216.
- (5) Kukreti, A. R., Farsa J. and Ber, C. W., 1996, "Differential quadrature and Rayleigh-Ritz method to Determine the Fundamental Frequencies of Simply Supported Rectangular Plates with Linearly Varying Thickness," J. Sound & Vibration, Vol. 189, Issue 1, pp. 103~122.
- (6) Oh, S. K., 2003, "Free Vibration Analysis of Thick Plate Subjected to In-plane Force on Inhomogeneous Pasternak Foundation," Korean Society of Steel Construction, Vol. 15, No. 3, pp. 291~298.
- (7) Lee, Y. S. and Kim, I. J., 2005 "Free Vibration Analysis of Tapered Opening Thick Plate," Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference, pp. 907~910.
- (8) Kim, I. J., Lee, Y. S. and Oh, S. K., 2004,

“Dynamic Stability Analysis of Tapered Thick Plate,” Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference, pp. 894~897.

(9) Matsunaga, H., 2004, “Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations,” J. Engineering Mechanics, pp. 27~34.

(10) Lee, B. G., Li G. F., Kang, H. J. and Yoon, H. M., 2007, “Parametric Studies of Flexural

Free Vibrations of Circular Strip Foundations with Various End Constraints Resting on Pasternak Soil,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 9, pp. 835~846.

(11) Oh, S. K., 2004, “Stability Analysis of Stiffened Thick Plates on Pasternak Foundation,” Ph.D. Thesis, Wonkwang Univ.