

# 가

임 성 목<sup>†</sup>

고려대학교 경상대학 경영학부

## A Study on a Multi-period Inventory Model with Quantity Discounts Based on the Previous Order

Sungmook Lim<sup>†</sup>

College of Business and Economics, Korea University

Lee[15] examined quantity discount contracts between a manufacturer and a retailer in a stochastic, two-period inventory model where quantity discounts are provided based on the previous order size. During the two periods, the retailer faces stochastic (truncated Poisson distributed) demands and he/she places orders to meet the demands. The manufacturer provides for the retailer a price discount for the second period order if its quantity exceeds the first period order quantity.

In this paper we extend the above two-period model to a  $k$ -period one (where  $k > 2$ ) and propose a stochastic nonlinear mixed binary integer program for it. In order to make the program tractable, the nonlinear term involving the sum of truncated Poisson cumulative probability function values over a certain range of demand is approximated by an  $i$ -interval piecewise linear function. With the value of  $i$  selected and fixed, the piecewise linear function is determined using an evolutionary algorithm where its fitness to the original nonlinear term is maximized. The resulting piecewise linear mixed binary integer program is then transformed to a mixed binary integer linear program. With the  $k$ -period model developed, we suggest a solution procedure of receding horizon control style to solve  $n$ -period ( $n > k$ ) order decision problems.

We implement Lee's two-period model and the proposed  $k$ -period model for the use in receding horizon control style to solve  $n$ -period order decision problems, and compare between the two models in terms of the pattern of order quantities and the total profits. Our computational study shows that the proposed model is superior to the two-period model with respect to the total profits, and that order quantities from the proposed model have higher fluctuations over periods.

**Keywords :** Inventory, Multi-period Inventory Model, Quantity Discount, Demand Uncertainty

### 1. 서 론

본 논문에서는 단일 품종의 제품에 대한 확률적 수요를 충족시키기 위해 제조업자에게 주문을 하는 소매업자를 위한 복수 기간(multi-period) 재고 모형을 다룬다.

특히 주문량 증가에 따른 가격 할인이 있는 경우에 대한 최적 주문량 결정 모형을 수립하고 그 해법을 개발하고자 한다.

지난 수십 년간 공급사슬관리 의사결정모형의 개발을 위한 많은 연구가 이루어져 왔는데, 특히 수량 할인이

있는 재고 모형은 많은 주목을 받아 왔다. 수량 할인이 있는 재고 모형에 관한 많은 초기 연구들은 확정적 수요를 가정하고 있는데, Hadley and Whitin[8], Rubin et al.[18], Sethi[19] 등은 확정적 수요 하에서 공급업자가 수량 할인을 제공하는 경우 구매업자의 경제적 주문량을 결정하는 문제를 다루고 있다. Monahan[17]은 공급자의 이익을 최대화하면서 구매자의 비용을 증가시키지 않는 수량 할인 정책을 분석하였다. Lal and Staelin[14]은 다수의 구매자와 일정한 수요, 특정 형태의 가격할인 구조를 가정하고 고정 주문량 결정 모형을 제시하였다. Lee and Rosenblatt[16]은 Monahan의 모형을 일반화하였는데, 공급자의 L4L(lot-for-lot) 가정을 완화하고 할인율에 제약을 가함으로써 공급자의 이익을 증가시킬 수 있는 모형을 개발하였다. Weng and Wong[27]은 단일 또는 다수 구매자에 대한 최적 가격 설정 및 재고보충 정책 결정을 위한 일반적인 전량(all-unit) 수량 할인 모형을 개발하였다. Weng[26]은 그 후 최적의 전량 및 증량(incremental) 수량 할인 정책 결정을 위한 모형을 제시하면서, 수량 할인이 수요증가에 어떤 영향을 미치는지, 가격에 민감한 일반적 수요함수 하에서 Pareto-효율적인 거래를 보장하는데 어떤 영향을 미치는지 분석하였다. Hoffmann[9]은 하나의 공급자와 다수의 서로 다른 구매자로 구성된 공급사슬에서 전량 수량 할인이 채널 상호조정에 미치는 영향을 분석하였다. Chang and Chang[4]은 가변 인도기간, 시간단축 비용, 수량 할인 등을 가정한 재고모형을 푸는 혼합정수최적화 방법을 제안하였다. Yang[28]은 최근 들어 가격에 민감한 수요를 가지고 시간에 경과함에 따라 품질이 저하되는 제품에 대한 최적 가격 설정 및 주문 정책을 제시하였다. 이 이외에도 Dada and Srikanth[7], Corbett and de Groot[6], Viswanathan and Wang[24] 등이 공급업자의 관점에서 수량 할인 가격 결정 문제를 연구하였고, Chung et al.[5]과 Sohn and Hwang[21]은 수량 할인이 있는 경우 동적 로트 크기 결정 문제를 분석하였다. Bregman[1]과 Bregman and Silver[2]는 공급업자가 가격 할인을 제공하는 MRP 환경에서 구매 물품에 대한 다양한 로트 크기 결정 방법들을 분석한 바 있다. 또한, Tsai[23]은 비선형의 수량 할인 함수를 선형 근사화하는 방법을 제안하고, 선형 혼합 0-1 정수계획법으로 모형화하는 방법을 개발하였다.

비교적 최근 들어, 몇몇 연구자들은 수요의 불확실성이 가정된 수량 할인 모형을 연구하였다. Jucker and Rosenblatt[10]은 수요가 불확실한 단일 기간 재고모형에서의 수량 할인을 분석한 바 있는데, 일명 newsvendor 모형으로 알려져 있다. 그들은 한계 비용 분석을 통해 구매자의 최적 주문량을 결정하는 해법을 개발하였다.

Weng[25]은 일반화된 newsvendor 모형을 개발하였는데, 구매업자는 단일 판매 기간 종료 시점에 미충족된 수요를 위해 두 번째 주문을 낼 수 있다. 이 논문에서는 채널 수익을 최대화할 수 있는 주문량을 구매업자가 선택할 수 있도록 유도하는 제조업자의 수량 할인 정책을 제시하였다. Su and Shi[22]와 Shi and Su[20]는 단일 기간 재고모형을 사용하여 제조업자와 소매업자간 반품-수량할인 계약에 관해 분석하였는데, 제조업자는 수량 할인을 제공하고 소매업자가 다 팔지 못한 제품은 반품이 허용되었다.

Lee[15]는 공급업자가 직전 주문량 대비 주문량 증감 여부에 따른 수량 할인을 제공할 때, 확률적 수요를 가지는 단일 제품에 대한 소매업자의 최적 주문량을 결정하는 모형을 개발하였다. 이는 수요의 불확실성을 가정한 2-기간 재고모형에서의 수량 할인을 분석했다는 점과 직전 주문량에 기반한 수량 할인 정책을 연구하였다는 점에서 기존 연구의 확장에 기여했다고 볼 수 있다. 그는 세 가지 주된 분석 결과를 도출하였는데, 첫째는 소매업자의 두 번째 기간 최적 주문량은 두 번째 기간 초기 재고량과 첫 번째 기간 주문량의 합에 의존한다는 사실이고, 둘째는 수량 할인이 없는 경우에 비하여 첫 번째 기간에는 주문량이 줄어들고 두 번째 기간에는 주문량이 커지지만 전체 주문량의 증가는 미미하다는 결과이며, 셋째는 수량 할인은 언제나 소매업자의 이익을 증가시키지만 제조업자의 이익은 도매 마진이 소매 마진에 비해 상대적으로 클 때에만 증가한다는 점이다. 한편, Lee[15]는 첫 번째 기간에서의 주문량과 두 번째 기간의 초기 재고량이 주어졌을 때 두 번째 기간의 최적 주문량을 해석적으로 유도하였고, 첫 번째 기간의 최적 주문량은 이익 함수의 복잡함을 이유로 단순 나열법에 의해 탐색하도록 제안하였다. 따라서 Lee[15]의 모형을 1-기간 모형으로 볼 수도 있다.

본 연구에서는 Lee[15]의 모형을 확장하여  $k$ -기간의 수리최적화 모형을 수립하고 그 해법을 개발하고자 하며, 도출되는 최적 주문량의 특성을 분석하고자 한다. 본 연구는 두 가지 측면에서 기존의 연구들을 확장하고 있다. 첫째, 본 연구는 수요의 불확실성과 직전 주문량에 기반한 수량 할인이 제공되는  $k$ -기간( $k > 2$ ) 재고 모형을 다룬 최초의 연구이다. 둘째, 본 연구의 기초가 되는 모형을 연구한 Lee[15]의 2-기간 모형에서는 첫 번째 기간의 최적 주문량을 구하는 효율적 해법을 제시하지 못하고 있으나, 본 연구에서는 복수 기간 전체를 대상으로 하는 수리최적화 모형을 수립하고, 그 해법을 제시한다는 점이다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 제 2장에서는 제안

할 모형에 대한 기본 가정과 사용되는 기호를 정의하고, 비선형 혼합 정수최적화 모형의 형태로  $k$ -기간 최적 주문량 결정 모형을 제시한다. 제 3장에서는 비선형 목적함수를 구간마다 선형화(piecewisely linearization)하는 방법을 제안하고, 이를 바탕으로 주어진 비선형 모형을 선형 혼합 정수최적화 모형으로 변환하여 푸는 방법을 제시한다. 또한,  $n$ -기간( $n > k$ ) 모형을 풀기 위한 이동구간 제어(receding horizon) 기반 해법도 제안한다. 제 4장에서는 본 연구에서 제안한 모형 및 해법의 성능과 최적 주문량의 특성을 실험을 통해 알아보고, 제 5장에서는 연구의 결과를 요약한다.

## 2. 모 형

본 연구에서는 단일 제품, 확률적 수요,  $k$ -기간의 재고 모형을 고려하며, 하나의 제조업자와 하나의 소매업자만이 공급사슬 상에 존재한다고 가정한다. 소매업자는 고객으로부터의 확률적 수요를 충족시키기 위해 제조업자에게 보충주문을 내리고,  $k$ -기간별 고객 수요는 서로 독립적이고 동일한 확률분포를 가진다. 제조업자는 주문량에 기반한 수량 할인을 제공하는데, 이번 주문량이 직전 주문량보다 크면 그 초과분에 대해서는 할인된 단가를 적용한다. 소매업자는 매 기간 초에 주문을 하며 그 주문은 인도기간 없이 즉시 배달된다고 가정한다. 충족되지 못한 주문은 추후납품(backorder)되지만,  $k$ 번째 기간에 충족되지 못한 수요는 상실된다고 가정한다.  $k$ 번째 기간에 팔리지 않고 남은 제품은 가치가 소멸된다고 가정한다. 하지만 이 가정은  $k$ 번째 기간의 재고유지비용을 조정함으로써 쉽게 제거될 수 있다. 소매업자는 선형의 재고유지비용 및 결품비용을 가지며, 제조업자는 L4L(lot-for-lot) 시스템 하에서 제품을 생산한다.

본 논문에서 사용할 기호는 다음과 같다.

- $D_i$  기간  $i$ 의 수요로서 평균이  $\mathbf{E}[D_i]$ 인 이산확률 변수
- $f(\cdot)$  수요의 확률함수
- $F(\cdot)$  수요의 누적분포함수
- $x_i$  기간  $i$  초기의 재고수준
- $q_i$  기간  $i$ 의 보충 주문량
- $p$  소매 제품단가
- $w$  도매 제품단가
- $c$  생산단가
- $r$  가격 할인 폭
- $h$  소매업자의 단위당 기간당 재고유지비용

- $\pi_i$  기간  $i$ 의 단위당 기간당 소매업자 결품비용
- $R_i$  기간  $i$ 의 소매업자의 이익
- $S_i$  기간  $i$ 의 소매업자의 판매수익
- $C_i$  기간  $i$ 의 소매업자의 구매비용
- $H_i$  기간  $i$ 의 소매업자의 재고유지비용
- $O_i$  기간  $i$ 의 소매업자의 결품비용

결품비용을 제외한 모든 단가 및 비용 요소들은 기간에 따라 불변이다. 다음 <그림 1>은 기간  $i$ 와  $i+1$  사이에 발생하는 기초재고수준, 기말재고수준, 주문량을 도식화한 것이다.

	$q_i$	$q_{i+1}$
$x_i$	$x_i + q_i - D_i$	$x_{i+1}$

<그림 1> 재고수준 및 주문량에 대한 기호

여기서 기간  $i$ 의 기말재고수준  $x_i + q_i - D_i$ 는 기간  $i+1$ 의 기초재고수준  $x_{i+1}$ 과 일치한다.

소매업자의 이익은 판매수익에서 구매비용, 재고유지비용 및 결품비용을 뺀 금액이다. 여기서, 기간  $i$ 의 판매수익, 구매비용, 재고유지비용, 결품비용은 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 S_i &= (x_i + q_i)^+p - (x_i + q_i - D_i)^+p + (-x_i)^+p - (-x_i - q_i)^+p \\
 &= (x_i + q_i)p - (x_i + q_i - D_i)^+p + (-x_i)^+p \\
 C_i &= q_iw - (q_i - q_{i-1})^+r \\
 H_i &= (x_i + q_i - D_i)^+h \\
 O_i &= (D_i - x_i - q_i)^+\pi_i
 \end{aligned}$$

그러면, 기간  $i$ 의 소매업자의 이익은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 R_i &= S_i - C_i - H_i - O_i \\
 &= (x_i + q_i)p - (x_i + q_i - D_i)^+p + (-x_i)^+p \\
 &\quad - q_iw + (q_i - q_{i-1})^+r - (x_i + q_i - D_i)^+h \\
 &\quad - (D_i - x_i - q_i)^+\pi_i
 \end{aligned}$$

$k$ -기간에 걸친 소매업자의 이익을 최대화하는 주문량을 구하기 위한 최적화 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \max \sum_{i=1}^k \{ S_i - C_i - H_i - O_i \} \\
 \text{s.t.} \quad & (x_i + q_i)p - (x_i + q_i - D_i)^+p + (-x_i)^+p - S_i = 0, \quad \forall i \\
 & q_iw - (q_i - q_{i-1})^+r - C_i = 0, \quad \forall i \\
 & (x_i + q_i - D_i)^+h - H_i = 0, \quad \forall i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D_i - x_i - q_i)^+ \pi_i - O_i &= 0, \quad \forall i \\ x_i - x_{i+1} + q_i &= D_i, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ x_1 &= 0, \quad q_0 = c_0. \end{aligned}$$

여기서  $c_0$ 는 기간 1 이전 기간(기간 0)의 주문량으로서, 그 값이 주어지지 않는다면 충분히 큰 수로 둘 수 있으며 이는 기간 1에서는 수량 할인이 없다는 것을 의미한다.

$D_i$ 는 확률변수이므로 (P)를 직접 풀 수는 없다. 문제 (P)와 같이 불확실한 값을 가지는 파라미터를 포함하고 있는 최적화 문제를 푸는 방법 중 대표적인 것이 로버스트 최적화(robust optimization) 기법인데, 불확실한 파라미터를 모형에 어떻게 반영하느냐에 따라 두 가지, 즉 스토캐스틱 로버스트 최적화(stochastic robust optimization)와 worst-case 로버스트 최적화(worst-case robust optimization)로 분류할 수 있다. 둘 간의 차이를 설명하기 위해 다음과 같은 일반적인 최적화 문제를 고려하자.

$$\begin{aligned} \min f_0(x, u) \\ \text{s.t. } f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

여기서  $x \in R^n$ 은 의사결정변수, 함수  $f_0 : R^n \rightarrow R$ 은 목적함수, 함수  $f_i : R^n \rightarrow R$  ( $i = 1, \dots, m$ )은 제약식, 그리고  $u \in R^k$ 는 불확실한 값을 가지는 파라미터이다.

스토캐스틱 로버스트 최적화 모형에서는 파라미터  $u$ 를 특정 확률분포를 가지는 확률변수로 모형화한 후 제약식과 목적함수의 평균값을 이용한다. 즉, 제약식을 평균적으로 만족시키는 해 중에서 목적함수의 평균값을 최적화시키는 해를 찾는다. 이를 수식으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \min \mathbf{E} f_0(x, u) \\ \text{s.t. } \mathbf{E} f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

와 같다. 여기서  $\mathbf{E}$ 는 확률변수  $u$ 에 대한 해당 함수의 평균을 의미한다.

Worst-case 로버스트 최적화 방법에서는 불확실성을 가지는 파라미터의 값의 범위를 표현하는 불확실성 집합(uncertainty set)을 구성하고, 최악의 경우를 최적화하는 해를 찾는다. 이를 수식으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \min \sup_{u \in U} f_0(x, u) \\ \text{s.t. } \sup_{u \in U} f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

와 같다. 여기서  $U$ 는 파라미터  $u$ 에 대한 불확실성 집합이다.

본 연구에서는 기간별 고객 수요  $D_i$ 가 truncated Poi-

sson 분포를 가진다고 가정하고, 스토캐스틱 로버스트 최적화 기법을 사용하여 문제 (P)를 풀고자 한다.  $D_i$ 의 최대값은  $\bar{D}$ , 그 평균은  $\lambda$ 로 표시하기로 한다. 문제 (P)에서 제약식과 목적함수의 평균값을 취하면 다음과 같은 문제 (P1)이 도출된다.

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \\ \max \sum_{i=1}^k \{S_i - C_i - H_i - O_i\} \\ \text{s.t. } (x_i + q_i)p - \mathbf{E}[(x_i + q_i - D_i)^+]p + (-x_i)^+p - S_i = 0, \quad \forall i \\ q_i w - (q_i - q_{i-1})^+ r - C_i = 0, \quad \forall i, \\ \mathbf{E}[(x_i + q_i - D_i)^+] h - H_i = 0, \quad \forall i \\ \mathbf{E}[(D_i - x_i - q_i)^+] \pi_i - O_i = 0, \quad \forall i \\ x_i - x_{i+1} + q_i = \mathbf{E}[D_i], \quad i = 1, \dots, k-1, \\ x_1 = 0, \quad q_0 = c_0. \end{aligned}$$

이제 문제의 제약식에 포함되어 있는  $\mathbf{E}[(x_i + q_i - D_i)^+]$ 와  $\mathbf{E}[(D_i - x_i - q_i)^+]$ 를 구해보자. 우선, 다음의 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$x_i + q_i - D_i = x_1 + \sum_{j=1}^i q_j - \sum_{j=1}^i D_j.$$

여기서  $s_i = x_1 + \sum_{j=1}^i q_j$ ,  $\hat{D}_i = \sum_{j=1}^i D_j$ 라고 두면,  $x_i + q_i - D_i = s_i - \hat{D}_i$ 이다. 그러면  $\hat{D}_i$ 는 평균이  $\lambda_i = i\lambda$ 인 truncated Poisson 분포를 가지게 되며, 그 확률함수와 누적분포함수를 각각  $\hat{f}_i$ 와  $\hat{F}_i$ 로 표시하기로 한다.  $\hat{D}_i$ 의 최대값을  $\bar{D}_i$ 로 표시하면,  $\bar{D}_i = \sum_{j=1}^i \bar{D} = i\bar{D}$ 가 된다. 한편 truncated Po-

isson 분포의 확률함수는  $\hat{f}_i(d) = \frac{e^{-\lambda_i} (\lambda_i)^d}{d! \Theta}$  ( $d = 0, 1, \dots, \bar{D}_i$ ),  $\Theta = \sum_{x=0}^{\bar{D}_i} \frac{e^{-\lambda_i} (\lambda_i)^x}{x!}$ 와 같다.

이제  $\mathbf{E}[(s_i - \hat{D}_i)^+]$ 와  $\mathbf{E}[(\hat{D}_i - s_i)^+]$ 를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(s_i - \hat{D}_i)^+] &= \sum_{d=0}^{s_i} (s_i - d) \hat{f}_i(d) \\ &= s_i \hat{F}_i(s_i) - \sum_{d=0}^{s_i} d \hat{f}_i(d) \\ &= s_i \hat{F}_i(s_i) - \{ \hat{f}_i(1) + 2\hat{f}_i(2) + 3\hat{f}_i(3) + \dots + s_i \hat{f}_i(s_i) \} \\ &= s_i \hat{F}_i(s_i) - \{ s_i \hat{F}_i(s_i) - \sum_{d=0}^{s_i-1} \hat{F}_i(d) \} \\ &= \sum_{d=0}^{s_i-1} \hat{F}_i(d), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[(\widehat{D}_i - s_i)^+] &= \sum_{d=s_i+1}^{\overline{D}_i} (d-s_i)\widehat{f}_i(d) \\
 &= \sum_{d=s_i+1}^{\overline{D}_i} d\widehat{f}_i(d) - s_i(1-\widehat{F}_i(s_i)) \\
 &= \lambda_i - s_i\widehat{F}_i(s_i) + \sum_{d=0}^{s_i-1} \widehat{F}_i(d) - s_i(1-\widehat{F}_i(s_i)) \\
 &= \lambda_i - s_i + \sum_{d=0}^{s_i-1} \widehat{F}_i(d).
 \end{aligned}$$

여기서  $s_i=0$ 인 경우  $\sum_{d=0}^{s_i-1} \widehat{F}_i(d)=0$ 으로 정의한다.

이제,  $\tilde{t}_i = \sum_{d=0}^{s_i-1} \widehat{F}_i(d)$ 로 두면  $\mathbf{E}[(D_i - x_i - q_i)^+] = \lambda_i - s_i + \tilde{t}_i$ ,

$\mathbf{E}[(x_i + q_i - D_i)^+] = \tilde{t}_i$ 와 같으므로, 상기 최적화 문제 (P1)은 아래와 같이 변환될 수 있다.

(P2)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i=1}^k \{S_i - C_i - H_i - O_i\} \\
 \text{s.t.} \quad & (x_i + q_i)p - \tilde{t}_i p + (-x_i)^+ p - S_i = 0, \quad \forall i \\
 & q_i w - (q_i - q_{i-1})^+ r - C_i = 0, \quad \forall i \\
 & \tilde{t}_i h - H_i = 0, \quad \forall i \\
 & (\lambda_i - s_i + \tilde{t}_i)\pi_i - O_i = 0, \quad \forall i \\
 & s_i = x_1 + \sum_{j=1}^i q_j, \quad \tilde{t}_i = \sum_{d=0}^{s_i-1} \widehat{F}_i(d), \quad \forall i \\
 & x_i - x_{i+1} + q_i = \lambda, \quad i = 1, \dots, k-1, \\
 & x_1 = 0, \quad q_0 = c_0.
 \end{aligned}$$

문제 (P2)는 그 특성상 비선형 혼합 정수 최적화(non-linear mixed integer optimization) 문제에 해당한다. 목적함수는 선형이지만 복잡한 제약식의 형태로 인해 볼록 최적화(convex optimization) 문제도 아니어서, 전역 최적해를 찾기가 어려운 문제이다. 이 문제를 좀 더 풀기 쉬운 문제로 만들기 위해 본 연구에서는 비선형 함수를 선형으로 근사시키는 방법을 사용하며, 구체적인 방법론은 제 3장에서 논하기로 한다.

### 3. 해법

본 장에서는 제 2장에서 도출된 비선형 혼합 정수 최적화 문제를 선형 혼합 정수 최적화 문제로 근사시키는 해법을 제시한다. 또한,  $k$ -기간 모형을 사용하여  $n$ -기간 ( $n > k$ ) 문제를 푸는 방법으로 이동구간제어(receding horizon control)[13]의 개념에 기반한 방법을 제안하도록 한다.

먼저,  $u_i = (-x_i)^+$ 는 이진변수  $I_i$ 를 사용하여 다음과 같은 네 개의 부등식으로 선형화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 -x_i &\leq MI_i, & 0 &\leq u_i \leq MI_i, \\
 -x_i &\geq -M(1-I_i), & 0 &\leq u_i + x_i \leq M(1-I_i).
 \end{aligned}$$

여기서  $M$ 은 충분히 큰 수이다. 마찬가지로  $e_i = (q_i - q_{i-1})^+$ 도 이진변수  $J_i$ 를 사용하여 다음과 같은 네 개의 부등식으로 선형화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 q_i - q_{i-1} &\leq MJ_i, & 0 &\leq e_i \leq MJ_i, \\
 q_i - q_{i-1} &\geq -M(1-J_i), & 0 &\leq e_i - q_i + q_{i-1} \leq M(1-J_i).
 \end{aligned}$$

한편,  $\tilde{t}_i = \sum_{d=0}^{s_i-1} \widehat{F}_i(d)$ 를 정확하게 선형화하는 것은 어렵고 구간마다 선형화(piecewise linearization)를 통해 근사시키고자 한다.  $s_i$ 의 함수인  $\tilde{t}_i$ 를 다음과 같이  $l$ -구간마다 선형함수인  $t_i$ 로 근사시킬 수 있다고 하자. 단,  $l$ 은 1보다 큰 정수이다.

$$t_i = \begin{cases} 0 & s_i \leq ub_i^1, \\ \alpha_i^2 s_i + \beta_i^2 & lb_i^2 \leq s_i \leq ub_i^2, \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_i^l s_i + \beta_i^l & lb_i^l \leq s_i \leq ub_i^l, \\ \alpha_i^l s_i + \beta_i^l & lb_i^{l+1} \leq s_i. \end{cases}$$

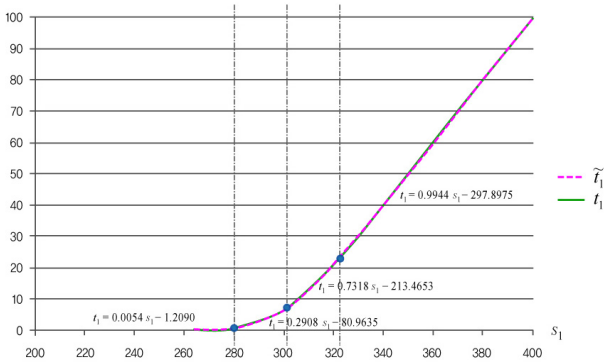
여기서  $\alpha_i^j$ 와  $\beta_i^j$  ( $j=1, \dots, l$ )는 구간마다 선형식의 기울기 및 절편을 나타내는 상수이고,  $lb_i^j$ 와  $ub_i^j$ 는 각 구간의 상하한을 나타내는 상수이다. 또한  $ub_i^1 > 0$ ,  $lb_i^j < ub_i^j$  ( $j=2, \dots, l$ )와  $lb_i^{j+1} = ub_i^j + 1$  ( $j=1, \dots, l$ )의 관계가 성립한다. 그러면  $t_i$ 는 이진변수  $T_i^j$  ( $j=1, \dots, l$ )를 사용하여 다음과 같은 관계식으로 선형화할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 -M(1-T_i^1) &\leq t_i \leq M(1-T_i^1), & -MT_i^1 &\leq s_i - ub_i^1 \leq M(1-T_i^1), \\
 -M(1-T_i^2) &\leq t_i - (\alpha_i^2 s_i + \beta_i^2) \leq M(1-T_i^2), \\
 -M(1-T_i^2) &+ (lb_i^2 - ub_i^2) \leq s_i - ub_i^2 \leq M(1-T_i^2), \\
 &\vdots & &\vdots \\
 -M(1-T_i^l) &\leq t_i - (\alpha_i^l s_i + \beta_i^l) \leq M(1-T_i^l), \\
 -M(1-T_i^l) &\leq s_i - lb_i^l \leq MT_i^l, \\
 \sum_{j=1}^l T_i^j &= 1.
 \end{aligned}$$

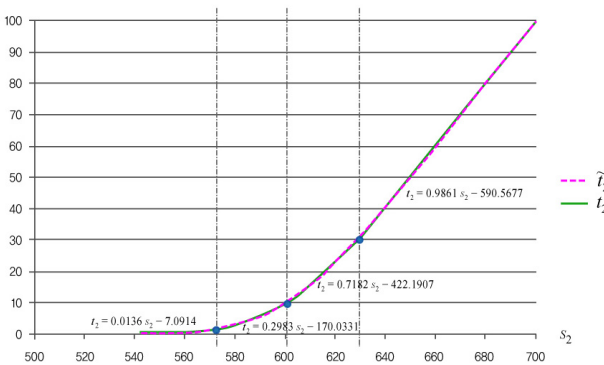
상기와 같은 선형화를 통해 최종적으로 얻어지는 최적화 모형은 다음과 같다.



오차제곱은 0.4175이었고,  $\tilde{t}_2$ 의 경우는 그 값이 0.7253이었다.  $\tilde{t}_2$ 의 경우 오차가 더 크게 발생한 이유는 확률변수  $\hat{D}_2$ 가 확률변수  $\hat{D}_1$ 에 비해 그 분포의 폭이 더 넓기 때문이다. 즉, 구간  $[lb_i^2, ub_i^2]$ 의 폭을 동일하게 유지하고 구간 경계점의 개수를 같게 한다면,  $i$ 가 커질수록  $\tilde{t}_i$ 에 대한 구간마다 선형화의 정확도는 떨어지게 된다. 구간마다 선형화의 정확도를 더 높이고자 한다면 구간  $[lb_i^2, ub_i^2]$ 의 폭을 넓히고 구간 경계점의 개수를 더 늘이면 되지만, 도입되는 부등 제약식의 개수가 증가한다는 상쇄관계(trade-off)가 있다.



<그림 3>  $\tilde{t}_1$ 의 구간마다 선형화 결과



<그림 4>  $\tilde{t}_2$ 의 구간마다 선형화 결과

지금까지는  $k$ -기간 모형의 구성과 그 해법을 살펴보았다. 그러나  $k$ 가 커질수록 선형화를 위해 도입되는 제약식과 변수의 개수가 크게 늘어나고 계산시간이 증가하므로, 계획 구간(planning horizon)이 긴 실제 문제에서  $k$ -기간 모형을 적용하는 데는 현실적으로 어려움이 있다. 이에, 본 연구에서는  $k$ -기간 모형으로  $n$ -기간( $n > k$ ) 문제를 푸는 방법으로 이동구간제어(receding horizon control)에 기반한 온라인(on-line) 알고리즘을 제안하도록 한

다. 이 방법에서는 우선  $k$ -기간 모형을 풀어 기간  $i$ 의 최적 주문량  $q_i$ 를 결정하고, 시간이 경과하여 기간  $i$ 의 고객 수요  $D_i$ 가 실현되어 기간  $i+1$ 의 기초재고수준이 결정되면, 다시  $k$ -기간 모형을 풀어 기간  $i+1$ 의 최적 주문량  $q_{i+1}$ 를 결정하는 방식으로 진행된다. 구체적인 절차는 다음과 같다.

< 알고리즘 1 :  $n$ -기간 모형의 해법 >

- 단계 0 :  $j=1$ .
- 단계 1 :  $v = \min\{n-j+1, k\}$ .
- 단계 2 : 기간  $j$ 의 기초재고수준  $x_j$  및 직전 주문량  $q_{j-1}$ 을 입력값으로 하는  $v$ -기간 모형 (P3)를 풀어 구간  $[j, j+v-1]$ 에 걸친 최적 주문량을 구한다.
- 단계 3 : 기간  $j$ 의 최적 주문량  $q_j$ 로 주문을 내린다.
- 단계 4 : 시간이 경과하여 기간  $j$ 의 고객 수요  $D_j$ 가 실현되면 기간  $j$ 의 기말재고수준, 즉 기간  $j+1$ 의 기초재고수준  $x_{j+1} = x_j + q_j - D_j$ 이 결정된다.
- 단계 5 : 만일  $j=n$ 이면 종료하고, 그렇지 않으면  $j:=j+1$ 로 하고 단계 1로 간다.

위 해법에서  $v$ 가 1인 경우, 즉 1-기간 모형은 Lee[15]가 제시한 해법을 적용하여 풀 수 있다. 참고로, 제 1장에서도 밝혔듯이 Lee[15]의 2-기간 모형은 그 특성상 1-기간 모형으로도 볼 수 있다. 즉, Lee[15]은 첫 번째 기간의 주문량과 두 번째 기간의 기초재고수준이 주어진 경우 두 번째 기간의 최적 주문량을 구하는 방법을 제시하고 있다. 첫 번째 기간의 최적 주문량은 단순 나열법에 의해 탐색하도록 되어 있다. 논문의 완결성을 위해 Lee[15]의 해법을 아래에 소개한다.

<알고리즘 2 : Lee[15]의 2-기간 해법>

- 두 번째 기간의 최적 주문량  $q_2$ 의 결정
- 기초재고수준이  $x_2$ 이고 직전 주문량이  $q_1$ 로 주어질 때,
- (i)  $x_2 + q_1 < u$ 이면  $q_2 = s_r - x_2$ ,
  - (ii)  $x_2 + q_1 \geq s_r$ 이면  $q_2 = s_w - x_2$ ,
  - (iii)  $u \leq x_2 + q_1 < s_r$ 이고  $x_2 \leq s_w$ 이면  $q_2 = s_w - x_2$ ,
  - (iv)  $u \leq x_2 + q_1 < s_r$ 이고  $x_2 > s_w$ 이면  $q_2 = 0$  또는  $q_2 = s_r - x_2$ .
- 단,  $u, s_r, s_w$ 에 대한 식은 Lee[15]를 참조한다.

- ② 첫 번째 기간의 최적 주문량  $q_1$ 의 결정
- 가능한 주문량  $q_1$ 을 모두 열거(enumeration)하면서( $0 \leq q_1 \leq \bar{D}$ ,  $q_1$ 은 정수), 소매업자의 2-기간 기대 이익을 최대화하는 주문량을 탐색한다.

<표 1> 시뮬레이션 실험결과 ( $r=9$ )

$n$	시뮬레이션 통계량		Method 1	Method 2
2	소매업자 이익	평균	11434.841	11433.834
		표준오차	6.839	6.881
	$q_1$		277.00	280
	$E(q_2)$		332.86	329.85
3	소매업자 이익	평균	17353.532	17843.372
		표준오차	6.278	6.881
	$q_1$		277	280
	$E(q_2)$		332.70	395.71
$E(q_3)$		294.59	228.15	
4	소매업자 이익	평균	23293.031	24300.512
		표준오차	7.487	7.476
	$q_1$		277	280
	$E(q_2)$		333.01	396.02
	$E(q_3)$		294.63	204.23
$E(q_4)$		303.09	329.75	
5	소매업자 이익	평균	29256.686	30709.329
		표준오차	7.432	7.483
	$q_1$		277.00	280.00
	$E(q_2)$		333.11	396.10
	$E(q_3)$		294.72	204.33
$E(q_4)$		303.27	395.94	
$E(q_5)$		299.00	228.11	
10	소매업자 이익	평균	59038.709	62900.549
		표준오차	9.117	8.645
	$q_1$		277.00	280.00
	$E(q_2)$		333.27	396.27
	$E(q_3)$		294.41	204.03
	$E(q_4)$		303.41	396.00
	$E(q_5)$		298.69	203.95
	$E(q_6)$		300.72	396.03
	$E(q_7)$		299.92	204.30
	$E(q_8)$		299.83	395.64
$E(q_9)$		300.01	204.16	
$E(q_{10})$		299.88	329.79	

<알고리즘 1>에서  $v$ 가 1인 경우, <알고리즘 2>의 ①을 사용하면 된다.

### 4. 수치 예제 및 실험 결과

본 연구에서 개발한 모형과 해법의 성능을 검토하기 위해 시뮬레이션 실험을 수행하였다. 실험에서 사용한 비용 및 가격 모수는 Lee[15]에서 사용한 것과 동일하며 아래와 같다. 다만, 가격 할인 폭을 나타내는  $r$ 의 경우 \$5/개와 \$9/개, 두 가지만 실험하였다.

$$c = \$10/\text{개}, p = \$50/\text{개}, w = \$30/\text{개},$$

$$r = \$5/\text{개 또는 } \$9/\text{개},$$

$$\pi_1 = \$20/\text{개/기간}, \pi_i = \$30/\text{개/기간 } (i > 1),$$

$$h = 0.1w.$$

실험 대상 문제는 계획 구간을 달리하여 2-기간, 3-기간, 4-기간, 5-기간, 10-기간 문제로 구성하였다( $n=2, 3, 4, 5, 10$ ).

몬테카를로 시뮬레이션은 Microsoft의 Visual Studio 2005를 이용해 구현하였는데, truncated Poisson 분포를 따르는 수요의 생성은 Knuth[11]의 알고리즘을 사용했으며 truncated Poisson 분포의 누적확률값의 계산은 Bowerman et al.[3]의 알고리즘을 사용하였다. 시뮬레이션 반복 시행회수는 10,000번으로 하였고, 난수 발생을 위한 seed 값은 동일한 양수값을 사용하여 아래에서 행할 두 해법 간 비교가 공평하도록 하였다. 선형 혼합 정수계획법의 풀이는 Dash Optimization의 Xpress-Optimizer 19.00.17을 이용하였다. 실험에 사용된 컴퓨터의 CPU는 Intel Core 2 1.86GHz이고, 메모리는 1GB RAM 이다.

본 실험에서는 두 가지 해법을 비교하였는데, 첫 번째 해법은 Lee[15]의 2-기간 모형(알고리즘 2)을 이동구간제어의 형태로 구현한 것이다. 즉, ‘알고리즘 1’에서  $k$ 를 2로 하고, 단계 2에서  $v$ -기간 모형 (P3)를 푸는 대신 ‘알고리즘 2’의 ①을 적용하는 것이다. 두 번째 해법은 본 연구에서 제안한 ‘알고리즘 1’을 그대로 적용하는 것으로  $k$ 는 3으로 설정하였다. 실험의 결과는 다음 <표 1>와 <표 2>와 같다. 단, 첫 번째 해법은 ‘Method 1’으로, 두 번째 해법은 ‘Method 2’로 표시한다.

이 실험결과에서 2-기간 문제에 대한 결과를 보면, ‘Method 1’과 ‘Method 2’를 통해 얻어지는 소매업자 이익값의 차이가 아주 근소하며, 그 차이에 대한 통계적 유의성을 찾을 수 없다( $p\text{-value} < 0.01$ ). 2-기간 문제의 경우 Lee[15]가 제안한 ‘Method 1’이 최적 해법이고, ‘Method 2’는 본 연구에서 제안한 근사 해법인데, 가격 할인 폭이 \$9/개인 경우와 \$5/개인 경우 모두에서 유의한 차이를 보이지 않고 있다. 이는 본 연구에서 제안한 모형 및 근사 해법의 타당성 및 효과를 보여준다고 할 수 있다.

$n$ -기간( $n > 2$ ) 문제의 결과를 보면, 제안한 ‘Method 2’의 성능이 소매업자의 총이익 기준으로 더 우수함을 알 수 있고, 통계적 유의성도 충분하다. 한편, 기간별 주문량 측면에서 두 가지 해법 결과 간의 극명한 차이를 발견할 수 있다. ‘Method 2’에서의 기간별 주문량은 비교적 큰 증감을 반복하고 있는 반면, ‘Method 1’에서의 주문량은 평균 수요에 수렴해 가는 것을 볼 수 있다. 즉, 본 연구에서 제안한 ‘Method 2’는 ‘Method 1’에 비해 더 긴 계획구간을 대상으로 최적 주문량을 결정함으로써 수량할인의 효과를 더 누리고 있다. 한편, 충분히 예상



<표 2> 시뮬레이션 실험결과 ( $r=5$ )

$n$	시뮬레이션 통계량		Method 1	Method 2
2	소매업자 이익	평균	11360.085	11359.200
		표준오차	6.410	6.484
	$q_1$		318.00	322.00
	$E(q_2)$		286.36	282.28
3	소매업자 이익	평균	17270.469	17364.162
		표준오차	7.078	7.013
	$q_1$		318.00	280.00
	$E(q_2)$		285.98	395.87
$E(q_3)$		301.74	227.65	
4	소매업자 이익	평균	23164.928	23470.637
		표준오차	7.201	8.055
	$q_1$		318.00	280.00
	$E(q_2)$		286.16	395.87
	$E(q_3)$		302.01	246.26
	$E(q_4)$		299.23	284.69
5	소매업자 이익	평균	29044.928	29578.136
		표준오차	7.555	8.627
	$q_1$		318.00	280.00
	$E(q_2)$		285.81	395.49
	$E(q_3)$		301.68	245.87
	$E(q_4)$		299.12	353.52
$E(q_5)$		300.26	228.45	
10	소매업자 이익	평균	58495.927	59981.506
		표준오차	9.142	13.049
	$q_1$		318.00	280.00
	$E(q_2)$		286.30	396.00
	$E(q_3)$		302.27	246.42
	$E(q_4)$		299.03	332.79
	$E(q_5)$		300.24	280.33
	$E(q_6)$		299.90	311.98
	$E(q_7)$		299.78	292.30
	$E(q_8)$		299.91	304.40
$E(q_9)$		300.02	308.79	
$E(q_{10})$		299.98	252.13	

할 수 있는 사항으로, 가격 할인 폭  $r$ 의 값이 클수록 소매업자의 이익은 더욱 증가하였다.

### 5. 결론

본 연구에서는 주문량 증가에 따른 가격 할인이 있는 경우에 대한 최적 주문량 결정 모형을 수립하고 그 해법을 개발하였다. 수요의 불확실성과 직전 주문량에 기반한 수량 할인이 제공되는  $k$ -기간( $k > 2$ ) 재고 모형을 다룬 최초의 연구라는 점과, Lee[15]의 2-기간 모형에서는 첫 번째 기간의 최적 주문량을 구하는 효율적 해법을 제시하지 못하고 있으나 본 연구에서는 복수 기간 전체를 대상으로 하는 수리최적화 모형을 수립하고 그 해법을

제시한다는 점에서 본 연구의 의의를 찾을 수 있다.

비선형 혼합 정수최적화 형태의 문제로 모형화되는  $k$ -기간 최적 주문량 결정 모형을 제시하였고, 이의 효율적 해법을 구성하기 위해 비선형 목적함수에 대한 선형화 방법을 개발하였다. 비선형 목적함수에 대한 구간마다 선형화 방법으로서 시뮬레이션과 선형회귀에 기반한 방법을 제안하였고, 이를 바탕으로 주어진 비선형 모형을 선형 혼합 정수최적화 모형으로 변환하여 푸는 방법을 제시하였다. 또한,  $n$ -기간( $n > k$ ) 모형을 풀기 위한 이동구간 제어(receding horizon) 기반 해법도 제안하였다.

수치 예제에 대한 시뮬레이션 실험을 통해 본 연구에서 제안한 방법의 효율성을 검토한 결과, 최적해를 알 수 있는 2-기간 문제에 대해서 최적해에 아주 근접한 해를 산출함을 알 수 있었다. 또한,  $n$ -기간 문제에 대해서는 Lee[15]의 2-기간 최적해법에 기반한 해법에 비해 더 나은 성능을 보여주었다.  $n$ -기간 문제를 2-기간 최적해법에 기반한 해법으로 풀었을 경우 주문량이 평균 수요에 수렴해 가는 반면, 본 연구에서 제안한  $k$ -기간 모형에 기반한 해법으로 풀면 주문량이 비교적 큰 증감을 반복함으로써 수량할인 효과를 증대시키고 있음을 관찰할 수 있었다.

본 연구가 기존의 연구를 의미있게 확장하고는 있으나, 선형화에 바탕을 둔 근사 해법이라는 점에서 그 한계가 있다. 직전 주문량에 기반한 수량 할인이 있는 복수 기간 재고 모형이 가지는 실용적 가치를 고려할 때 [12], 최적 해법의 개발은 추후 연구 과제로 삼을 가치가 있다.

### 참고문헌

- [1] Bregman, R. L.; "An experimental comparison of MRP purchase discount methods," *Journal of Operational Research Society*, 42 : 235-245, 1991.
- [2] Bregman, R. L. and Silver, E. A.; "A modification of the silver-meal heuristic to handle MRP purchase discount situations," *Journal of Operational Research Society*, 44 : 717-723, 1993.
- [3] Bowerman, P. N., Nolty, R. G., and Scheuer, E. M.; "Calculation of the poisson cumulative distribution function," *IEEE Transactions on Reliability*, 39 : 158-161, 1990.
- [4] Chang, C. T. and Chang, S. C.; "On the inventory model with variable lead time and price-quantity discount," *Journal of the Operational Research Society*, 52 : 1151-1158, 2001.
- [5] Chung, C-S., Chiang, D. T., and Lu, C-Y.; "An optimal

- algorithm for the quantity discount problem," *Journal of Operations Management*, 7 : 165-177, 1987.
- [6] Corbett, C. J. and de Groote X.; "A supplier' optimal quantity discount policy under asymmetric information," *Management Science*, 46 : 444-450, 2000.
- [7] Dada, M. and Srikanth, K. N.; "Pricing policies for quantity discounts," *Management Science*, 33 : 1247-1252, 1987.
- [8] Hadley, G. and Whitin, T. M.; *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1963.
- [9] Hoffmann, C.; "Supplier's pricing policy in a Just-in- Time environment," *Computers and Operations Research*, 27: 1357-1373, 2000.
- [10] Jucker, J. V. and Rosenblatt, M. J.; "Single-period inventory models with demand uncertainty and quantity discounts: Behavioral implications and a new solution procedure," *Naval Research Logistics Quarterly*, 32 : 537-550, 1985.
- [11] Knuth, D. E.; "Seminumerical Algorithms, The Art of Computer Programming," 2 : Addison Wesley, 1969.
- [12] Kesner, I. F., and Walters, R.; "Class-or mass?" *Harvard Business Review*, 83 : 35-45, 2005.
- [13] Kwon, W. H., and Han, S.; *Receding horizon control: Model predictive control for state models*, Springer, 2005.
- [14] Lal, R. and Staelin, R.; "An approach for developing an optimal discount pricing policy," *Management Science*, 30 : 1524-1539, 1984.
- [15] Lee, J-Y.; "Quantity discounts based on the previous order in a two-period inventory model with demand uncertainty," *Journal of Operational Research Society*, 59 : 1004-1011, 2008.
- [16] Lee, H. L. and Rosenblatt, J.; "A generalized quantity discount pricing model to increase supplier's profits," *Management Science* 33 : 1167-1185, 1986.
- [17] Monahan, J. P.; "A quantity pricing model to increase vendor profits," *Management Science*, 30 : 720-726, 1984.
- [18] Rubin, P. A., Dilts, D. M., and Barron, B. A.; "Economic order quantities with quantity discounts : Grandma does it best," *Decision Sciences*, 14 : 270-281, 1983.
- [19] Sethi, S. P.; "A quantity discount lot size model with disposal," *International Journal of Production Research*, 22 : 31-39, 1984.
- [20] Shi, C-S. and Su, C-T.; "Integrated inventory model of returns-quantity discounts contract," *Journal of Operational Research Society*, 55 : 240-246, 2004.
- [21] Sohn, K. I. and Hwang, H.; "A dynamic quantity discount lot size model with resales," *European Journal of Operational Research*, 28 : 293-297, 1987
- [22] Su, C-T. and Shi, C-S.; "A manufacturer' optimal quantity discount strategy and return policy through game-theoretic approach," *Journal of Operational Research Society*, 53 : 922-926, 2002.
- [23] Tsai, J-F.; "An optimization approach for supply chain management models with quantity discount policy," *European Journal of Operational Research*, 177 : 982-994, 2007.
- [24] Viswanathan, S. and Wang, Q.; "Discount pricing decisions in distribution channels with price-sensitive demand," *European Journal of Operational Research*, 149 : 571-587, 2003.
- [25] Weng, Z. K.; "Coordinating order quantities between the manufacturer and the buyer: A generalized news- vendor model," *European Journal of Operational Research*, 156 : 148-161, 2004.
- [26] Weng, Z. K.; "Modeling quantity discounts under general price-sensitive demand functions: Optimal policies and relationships," *European Journal of Operational Research*, 86 : 300-314, 1995.
- [27] Weng, Z. K. and Wong, R. T.; "General models for the supplier's all-unit quantity discount policy," *Naval Research Logistics*, 40 : 971-991, 1993.
- [28] Yang, P. C.; Pricing strategy for deteriorating items using quantity discount when demand is price sensitive," *European Journal of Operational Research*, 157 : 389-397, 2004.