

On the Physical Meaning of Maxwell Stress Tensor

최 홍 순* · 박 일 한* · 문 원 규**
(Hong-Soon Choi · Il-Han Park · Won-Kyu Moon)

Abstract - Maxwell stress tensor is one of the methods which are generally used for electromagnetic force calculation. In this paper, it is presented that Maxwell stress tensor \mathbf{T} and $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ have no physical meaning and therefore should not be used as sources of mechanical force for deformations or dynamics. The divergence of Maxwell stress tensor $\nabla \cdot \mathbf{T}$ is the one which can acquire a physical identity and is electromagnetic body force density by an action at a distance like a gravity. This result can be derived from the principle of power balance, and also verified by some thought experiments. The virtual air-gap approach is proposed as a valid solution for the calculation of the body force.

Key Words : Maxwell stress tensor, Electromagnetic force, Body force, Mechanical stress, Solid mechanics, Mechanical dynamics, Hydrostatics

1. 서 론

자성체에 미치는 전자기력밀도 계산은 전기기기의 기계역학적인 현상, 즉, 진동 또는 변형의 관찰을 위해서는 필수적인 과정이라 할 수 있다. 전기 또는 기계분야 공학자들은 맥스웰 응력 텐서(Maxwell stress tensor)와 같은 이미 기존의 확고하게 구축되어 졌다고 여겨지는 전자기력식의 계산 방법들을 사용하여 기계역학적 분석과 응용을 하고 있다. 그러나, 현재까지도 자성체에서 기계역학적 해석의 기본이 되는 전자기력의 밀도의 계산식은 그 개념뿐 아니라 표현식에 대한 논란이 계속되고 있으며, 명확한 결론과 물리적인 개념의 정립이 제대로 이루어지지 않은 논란의 상태이다. 진공 또는 공기 중에서의 전자와 전류에 미치는 힘에 관한 식은 오랜 동안 여러 확고한 실험을 통해 이미 검증되었고 논의의 여지가 없다. 반면, 자성체와 같은 매체에 미치는 전자기력은 자성체 덩어리 전체에 미치는 힘은 분명한 결론을 가진다고 보는 한편, 내부 또는 표면의 전자기력 밀도에 관해서는 여전히 논란상태에 있는 것이다. 전자기력밀도 계산에 흔하게 사용되고 있는 맥스웰 응력 텐서의 경우 그 물리적인 정당성에 대한 여러 의구심에도 불구하고, 별다른 대안이 없다고 판단하여 그대로 받아들이고 있는 실정이다. 많은 대다수의 공학 분야의 연구자가 이러한 문제점에 대해 정확하게 인지하지 못하고 있거나, 그 사용이 너무나 퍼져 있어 마치 그 정당성이 이미 확보 되었을 것으로 오인 하고

있는 것이다. 결론적으로 본 논문에서는 맥스웰 응력과 응력텐서를 전자기력 밀도로 볼 수 없음을 보이게 될 것이다.

1873년 맥스웰(Maxwell)의 전자기장 방정식의 완성 전후하여 부터 시작하여, 근 150여 년이 넘도록 지속되어온 자성체와 유전체 같은 매체내의 전자기력밀도에 대한 논란은 명확한 결론을 내리지 못한 채 1970년대 이후에 많이 사라지고 있으며, 현재에는 일부 학자그룹들에 의해 간간히 제기되고 있는 형편이다. 스트라튼(Stratton [1], 멜처(Melcher [2], 바비오(Bobbio [3]와 그 외의 많은 학자[4][5][6]들은 그들의 저서와 논문에서 전자기력에 대한 이론을 전개함과 동시에 불분명한 점을 그들의 텍스트 내에서 제기하였고, 바비오는 전자기력을 주요 내용으로 다룬 그의 저서의 서문에서부터 전자기력의 정체성의 혼란스러움에 대해서 언급하기도 하였다 [7]. 로젠즈바이그(Rosensweig)는 기존의 전자기력 이론으로 자성유체역학(Ferrohydrodynamics) 라는 학문분야를 구축하기도 하였으나, 역시 전자기력의 논란에 대해서 인정하고 있다 [9]. 리날디(Rinaldi)와 브레너(Brenner (이하, 리날디로 표기)는 2002년의 논문[10]에서 로젠즈바이그의 연구[8]와 맥스웰 응력 텐서의 여러 응용에 대해 정면으로 반박하는 데, 그 이유로, 맥스웰 응력 텐서에 의한 표면전자기력의 물리적인 의미를 부여할 수 없기 때문이며, 이를 응용한 연구는 심각한 유효성의 문제에 봉착할 것이라고 주장하였다. 리날디의 이러한 주장은 완전히 새로운 것은 아니고, 이미 스트라튼도 맥스웰 응력 텐서가 물리적인 의미를 갖지 못함을 그의 1941년도의 저서에서 언급한 바 있다[11]. 이러한 혼돈의 원인으로서 매체내에서 장(field)의 표현자인 \mathbf{B} 와 \mathbf{H} 에 대한 개념상의 불분명한 정의가 그 원인으로도 지목될 수 있는데, 이는 역사적으로 중요한 논란 중에 하나이다. 이러한 문제에 대하여 최근에 로체(Roche)가 19세기와 그 이후의 논란에 대해 비교적 잘 정리하였다[12]. 본 논문에서 체적력 계산을 위해 도입하는 가상공극[13]을 채용하면 \mathbf{B} 와 \mathbf{H} 의 불

† 교신저자, 정희원 : 경북대학교 전자전기공학부 교수
E-mail : tochs@knu.ac.kr

* 정 회 원 : 성균관대학교 정보통신공학부 교수

** 비 회 원 : 포항공과대학교 기계공학과 교수

접수일자 : 2008년 7월 14일

최종완료 : 2008년 11월 20일

분명한 점을 실용적인 관점에서 해결점을 제공하는 것으로 간주할 수 있게 된다.

본 논문에서는 전자기력의 많은 문제와 논란 중에서 맥스웰 응력 또는 맥스웰 응력 텐서에 의한 전자기력 밀도 문제로 국한하여 그 물리적 유효성에 대해 논하고자 한다. 리날디의 맥스웰 응력텐서의 표면밀도로서의 무의미성에 대한 주장은 그들의 성과이나, 그 대안을 제시하지 못한 것은 한계로 보인다. 본 논문에서 제시하는 시각은 그들의 주장에 에너지 관점에서 재구성하는 것이고, 또한 그들의 일부 주장에 대해 문제점을 제기한다. 맥스웰 응력이 표면전자기력 밀도로서 물리적인 의미를 획득하지 못하는 이유에 대한 구체적인 시각을 본 논문에서는 제시하고, 그에 대한 전자기력 계산의 대안으로 가상공극[13]을 사용한 체적력 밀도법[14]을 제시한다. 모든 전자기력 밀도식을 포괄하는 일반론은 이 논문의 범위를 벗어나며 향후 미래의 연구과제로 진행하고자 한다.

본 논문의 내용 전개는 다음과 같다.

- 1) 리날디의 맥스웰 응력 텐서에 대한 주장의 핵심을 요약하여 설명한다.
- 2) 맥스웰 응력 텐서를 에너지 보존원리에 의해 유도되는 과정을 보이고, 이 과정을 해석함에 있어 응력텐서의 무효성을 보인다.
- 3) 고체역학적인 관찰, 정유체역학적인 관찰, 자성유체를 통한 전자기력 계산의 모순 등을 제시한다. 자연계에서의 또 다른 체적적인 중력과의 차이를 비교하여 본다.
- 4) 가속과 중력의 등가원리 관점에서 리날디 주장의 문제점을 제기한다.
- 5) 무효화된 맥스웰 응력 텐서 표면전자기력 밀도를 대신할 수 있는, 가상공극법에 의한 전자기 체적력의 계산법을 소개한다. 전자기 체적력은 맥스웰 응력텐서의 발산을 취함으로써 얻어질 수 있다.
- 6) 기존의 맥스웰 응력을 전자기력밀도로 사용한 응용에 대해 비판적 견해와 대안 및 최종 결론을 제시한다.

2. 맥스웰 응력 텐서

본 논문에서 언급하는 용어에서, 맥스웰 응력텐서 \mathbf{T} 는 이것의 발산divergence인 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 와는 별개로 언급할 것이며, 각각을 지칭할 때 구분하여 지칭하고자 한다. \mathbf{T} 는 응력텐서, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 는 응력stress 또는 표면전자기력 밀도, $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 는 텐서의 발산 또는 체적력 밀도로 불리울 것이다.

2.1 Rinaldi와 Brenner의 연구

본 논문의 저자들의 지식한도 내에서는, 리날디의 연구는 맥스웰 응력텐서의 표면력으로서의 물리적 의미를 부정한 유일한 논문으로 판단된다. 서론에서 언급했듯이 다른 여러 학자들에 의해 다수의 논문에서 전자기력의 혼란스러움에 대해 언급하고 있지만, 결국에는 자신만의 방식으로 다른 대안을 제시하는 데 그치고 있으며, 그 대안 또한 혼란스러움의 한 축을 이루고 있는 것이다. 아직 어느 누구도 이 혼돈을 정리해내지 못하고 있다고 평가된다. 그런 측면에서 비록 맥스웰 응력텐서에 대해 국한하고 대안 제시가 미비하

지만, 이의 의미를 정밀하게 관찰한 리날디의 논문은 주목할 만하다.

리날디의 연구에서는, 우선 전자기학의 발전과정에서 전자기력을 원격힘인 체적력 개념으로부터 시작하여 전개됨을 지적하고, 다음과 같은 정의로부터 논의를 끌어낸다.

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T}. \tag{1}$$

여기에서 \mathbf{f} 는 물리적 의미를 가지는 체적력 밀도를, \mathbf{T} 는 맥스웰 응력텐서를 뜻한다. 그런데, 전자기체적력이 \mathbf{T} 가 정의되기 전에 체적력 \mathbf{f} 의 정의가 우선 되므로, 상기 (1)식을 만족하는 텐서 \mathbf{T} 는 무수히 많을 수 있음을 지적한다. 즉, \mathbf{f} 로부터 유일하게 \mathbf{T} 가 정의될 수 없다는 것이다. 이 개념으로부터 리날디 주장의 핵심은 다음과 같다. 특정 검사체적 control volume에 대해, 이것의 체적 V 와 이것의 경계 ∂V 미치는 전체 힘을 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S. \tag{2}$$

여기에서,

$$\mathbf{F}_V = \int_V d\mathbf{F}_V, \tag{2a}$$

$$\mathbf{F}_S = \oint_{\partial V} d\mathbf{F}_S. \tag{2b}$$

식 (2a)는 원격작용 힘force by action-at-a-distance에 의해 전체 힘에 기여하는 체적력 성분을 모두 대변하는 것으로 정의 된다. (2b)는 검사체적의 표면에 직접 작용하는 직접 접촉direct contact에 의한 전체 힘에의 기여분에 대한 정의이다. (2a)의 $d\mathbf{F}_V$ 는 미소체적에 대한 체적력body force 또는 부피력volume force이고, 체적력 밀도 \mathbf{f} 를 도입함으로써 $\mathbf{f}dV$ 로 표현이 가능하다. 그런데, \mathbf{f} 를 텐서 \mathbf{T} 의 발산 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 으로 수학적으로 표현이 가능하다고 하면 수학의 발산정리divergence theorem에 의해 (2a)식은 다음과 같이 표현이 된다.

$$\mathbf{F}_V = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dS. \tag{3}$$

즉, 체적적분에 의한 힘이 표면 응력 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 에 의한 힘으로 표현이 된 것이다. 이것은 순전히 수학적 발산정리만을 적용한 결과이다. (3)식만을 따로 놓고 본다면, 전체 체적력 \mathbf{F}_V 가 마치 원격힘이 아닌 직접 접촉에 의한 표면력에 의한 표면적분으로 바뀌어 표현되고 있다는 것에 주목할 필요가 있다. 그러나, 이것은 문제의 제사에서 원격힘만이 \mathbf{F}_V 를 이룬다고 가정하였으므로 모순적인 결과가 된다. 수학적 변환을 하는 과정에서 물리적인 개념의 변질이 도출된 것이며, 원격힘에 의한 체적력이 접촉력으로 바뀔 수는 없다. 한편, (2b)는 검사체적의 표면에 직접 접촉하여 작용하는 힘에 의한 기여분인데, $d\mathbf{F}_S$ 는 $\mathbf{t}_n dS$ 로 표현이 가능하며, 여기서 \mathbf{t}_n 은 응력 벡터stress vector이다. 탄성역학에서 코시해석Cauchy's analysis[15]에 의해 이미 알려진 바와 같이, \mathbf{t}_n 은 무방향 텐서필드인 \mathbf{T} 와 관심 표면의 수직방향을 나타내는 \mathbf{n} 에 의해 $\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 로 나타내어 질 수 있다. 이것을 (2b)에 대입하여 발산정리에 의해 표면적분을 체적적분으로 변환하면,

$$\mathbf{F}_S = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}^* dV \tag{4}$$

와 같이 표현된다. (3)식과는 반대로, 접촉력의 합인 \mathbf{F}_S 가 마

치 체적력 밀도 형태인 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 의 부피적분형태로 변환이 되었다. 여기서도 분명한 것은, \mathbf{F}_s 는 접촉력만에 의한 성분이 존재한다고 가정하고 시작하였으므로, 원격힘인 체적력으로 표현된 것은 모순이 된다. 즉, 물리적인 의미를 가질 수 없는 체적력인 셈이다.

요약하면, 수학적 변환이 가능하다고 해서, 실제 물리적으로 존재하는 양인 체적력이 표면력으로 변환될 수 없는 것이며, 같은 원리로 밖에서 표면으로 직접 공급한 접촉력 또는 표면력이 체적력으로 변환해서는 안된다는 것이다. 즉, 체적력 개념으로 출발한 전자기력이 (1)식과 같이 표현되는 한, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 로 표현되는 맥스웰 응력은 물리적인 의미를 부여할 수가 없게 된다. 리날디의 논문에서는 힘의 관점뿐 아니라 토크 관점에서도 접근하며, 일률의 변화도 같이 검토하고 자성유체에 대한 예를 들었다. 리날디의 연구는 맥스웰 응력텐서의 유도과정에 대한 전체적인 비판이 아니며, 이로부터 유도되는 체적력 \mathbf{f} 와 표면력 텐서 \mathbf{T} 가 물리적으로 동시에 유의미할 수 없으므로 이를 주의하여야 한다는 것을 지적한다.

리날디의 연구 결과의 주장에서 맥스웰 응력의 기계적 응력으로서의 물리적 의미를 부정하는 성과를 낸 반면, 전자기력 계산의 대안에 대한 제시는 분명하게 하지 못하였다. 또한 식(1)이 유도되는 타당한 과정을 제시하지 않고 전자기력의 체적력관점을 당연시 채용하는 논리적인 약점을 보인다. 다른 문제점으로는 식(2b)에서 수학적 변환에 의해 식(4)가 되면서 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 가 물리적인 의미를 가지지 못하는 체적력밀도라 단정하였는데, 본 논문에서는 수학적 접근과 일 반상대성 이론의 등가원리 측면에서 볼 때 다른 결론을 유도할 수 있음을 제시하고자 한다.

2.2 에너지 보존법칙에 의한 맥스웰 응력 텐서

맥스웰 응력 텐서는 에너지 보존법칙, 정확히는 전기적 파워의 균형원리 power balance principle에 기계적 파워를 같이 고려함으로써 유도 될 수 있다. 편의를 위해 전장에너지는 제외하고 자기적인 관점에서 파워의 균형원리를 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{d}{dt} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{ds}{dt} \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (5)$$

첫째항은 미소체적에 대해 외부에서 출입되는 파워의 체적 평균치를 뜻하고, 둘째항은 축적되는 시간당 자기에너지, 셋째항은 주울열 Joule's heat, 넷째항은 미소체적의 운동에 의한 기계적인 파워를 뜻한다. 이 모든 항이 더해져서 0이 나와야 한다. 이 관계식은 미분형태로서, 무한소 체적에 대한 에너지의 보존식이라 할 수 있고, \mathbf{f} 는 무한소 체적의 평균 체적력밀도라 정의된다. 이 관계로부터 재질의 선형성을 가정하면, 다음과 같은 체적력밀도 \mathbf{f} 를 나타내는 식이 유도될 수 있다[1][16].

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (6)$$

여기서 맥스웰 응력텐서 \mathbf{T} 는 $\mathbf{T} = \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I}$ 이다. 맥스웰 응력텐서로부터 맥스웰 응력 또는 표면 전자기력 밀도는 임의의 표면 수직단위벡터 \mathbf{n} 에 대해 $\mathbf{f}_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 로 표현이 되

고, 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} \mu_0 (H_n^2 - H_t^2) \mathbf{n} + \mu_0 H_n H_t \mathbf{t} \quad (7)$$

여기서, H_n 와 H_t 는 각각 \mathbf{H} 의 수직성분, 수평성분이다. \mathbf{t} 는 표면의 수평단위벡터이다. (6)식의 의미에서 주의 할 것은, 이 식은 파워균형식 (5)로부터 구해진 체적력밀도 $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T}$ 라는 것이다. 다시 말하면 (5)로부터 \mathbf{T} 나 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 가 구해진 것이 아니다. \mathbf{f} 의 구체적인 형태가 (6)과 같은 표현이 된 것이다. 이 체적력밀도를 체적적분하면 전체전자기력을 구할 수 있는 데,

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV \quad (8)$$

와 같이 되고, 이 식에 발산정리 divergence theorem를 적용하면,

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \quad (9)$$

와 같이 된다. 이 발산정리에서 주의하여야 할 성질이 있는데, (8)식의 체적적분내의 물리적 의미를 갖는 피적분함수 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 가 (9)식의 표면적분으로 바뀌면서 (9)식의 전체 적분값은 (8)식과 동가성이 확보가 되지만 (9)식의 피적분함수 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 아무런 물리적인 의미를 담보할 수 없다. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 은 이의 표면 전체 적분을 통해 전체 전자기력을 대변할 뿐, 그 자체는 아무런 물리적인 의미를 확보할 수 없는 것이다. 즉, 맥스웰 응력은 바로 이러한 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 또는 (7)식으로 표현 되는 데, 이것의 물리적인 실체가 없다는 것을 의미하게 된다. 다시 말하면 맥스웰 응력은 기계적인 응력의 실체가 아니다.

전자기학의 초창기인 19세기에는 이러한 맥스웰 응력을 가상적인 매체인 에테르 ether에 작용하는 응력으로 보았던 것인 데, 아인슈타인 Einstein의 특수상대론 이론에서 에테르 가설은 완전히 폐기되었음을 상기할 필요가 있다. 결국 전자기적인 현상만에 의해 기계적 응력을 논할 수 없으며, 전자기력의 본질인 전자기 체적력과 기계적인 구속 조건, 즉, 대상의 가속도, 특정 경계에서의 구속여부에 관한 정보가 부가 되고, 이 조건으로 다시 형성된 편미분 방정식 관계를 풀어내어야 물리적 의미를 갖는 기계적인 응력의 분포가 도출이 될 수 있는 것이다. 리날디도 강조한 것이지만, (8)에서 (9)로 변환되는 수학적 변환 과정에서, 물리적인 의미의 유실을 놓치지 말아야 한다. 수학적 변환에만 함몰되어 체적적분이 표면적분으로 변환될 때 모든 피적분함수가 유의미할 것이라고 취급하는 것은 치명적인 실수인 것이다.

3. 역학적 관찰

실험에 의한 맥스웰 응력 실체의 관찰은 매우 어려운 과제이다. 고체역학적 관점에서 관찰하게 되면 체적력의 적분으로 나타나는 표면력 즉, 맥스웰 응력만에 의한 것과 전자기 체적력에 의한 변형은 다를 수밖에 없다. 체적력에 의한 왜곡과 표면력에 의한 차이를 판단하려면 부피 자체가 찌그러들거나 늘어나는 현상을 관찰하여야 하는데, 이러한 차이를 관찰하기 위한 장비와 제반 조건들을 필요한 수준까지 갖추는 것은 상당히 어려운 것으로 판단이 되며, 체적력 여

부의 판단에 적합한 재료의 개발과 특성 파악등이 전제 되어야 할 것이다. 실제 실험에 의한 판단은 향후의 과제로 남겨두고, 현재로서는 고체역학과 자성유체의 역학적인 관찰을 통한 사고실험thought experiment적인 증거를 제시하고자 한다.

체적력이 사용되는 기계적 역학관계를 표현하는 동역학적 평형 미분방정식은 다음과 같다.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{T}_{mech} + \mathbf{f}_b + \eta \nabla^2 v \quad (10)$$

여기서, ρ 는 질량 밀도, v 는 미소체적의 속도, D/Dt 는 미소체적을 따라가면서 작용하는 라그랑지안 미분Lagrangian derivative, \mathbf{T}_{mech} 는 기계적 응력텐서, \mathbf{f}_b 는 미소체적에 미치는 외부의 체적력, η 는 점성도viscosity이다. 윗 식의 등호 오른쪽항들은 결과적으로 모두 체적력적인 의미를 지닌다. \mathbf{f}_b 는 중력만에 의한 체적력인 경우 중력가속도 g 를 포함하여 $\mathbf{f}_b = \rho g$ 로 표현이 된다. 전자기 체적력 \mathbf{f} 를 포함하려면 체적력항이 $\mathbf{f}_b = \rho g + \mathbf{f}$ 로만 바뀌면 된다. ρg 의 방향은 지구중심을 향한 일정한 벡터값인데 비해, 전자기 체적력 \mathbf{f} 는 전자기의 분포에 따라 모든 방향의 값을 가질 수 있는 벡터라는 점이 다르다. 기계적 응력텐서 \mathbf{T}_{mech} 는, (10)에서 다른 항들이 모두 주어지거나 계산이 가능하다고 가정할 때, 접촉력 또는 고정변위조건과 같은 외부의 입력조건을 미분 모델이 아닌 전체모델 수준에서 경계조건으로서의 간접적인 부여에 의해 결정이 될 수 있다. 전자기체적력 \mathbf{f} 는 응력을 구하는 이산화된 시스템방정식에서 중력이 그러하듯 입력항 forcing term에만 추가가 되는 양이므로, 기존의 응력유도과정과 최종 시스템 행렬(질량행렬과 강성행렬stiffness matrix 등으로 구성)에 영향을 미치지 않는다. 단, 매질의 분포와 매질경계의 변화가 전자기장의 분포에 영향을 미치므로 대변형large deformation의 고체문제이거나 자유표면free surface을 가지는 유체문제에서는 비선형적 접근을 통해 수렴해를 구해나가야 한다.

3.1 고체역학적 관찰

자연계에 존재하는 근원적인 힘들, 즉, 강력, 약력, 중력, 전자기력들은 모두 원격힘이며 체적력이라 할 수 있는 데, 우리가 쉽게 접하는 것이 전자기력과 함께 중력이라 할 수 있다. 그림 1에서와 같이 2차원적인 간단한 가상적인 건물이 존재한다고 하고, 각 층의 무게는 mg 로 일정, 원래의 체적도 모두 동일하다고 하자. 중력은 이 건물에 대해 작용하여 내부에 응력을 유발하게 되고 변형이 일어날 것이다. 즉, 힘의 근원은 중력이며, 이에 의해 응력과 변형이 만들어질 것이다. 그러나 중력에 의한 무게의 분포가 바로 응력의 분포를 뜻하지는 않는다는 것을 인지하여야 한다. 무게의 분포와 더불어 고정 경계조건이 주어져야한다. 그림 1에서 보듯이 기계적인 경계조건, 즉, 밑면이 고정되어 있는 경우와 윗면이 고정되어 있는 경우가 전혀 다른 응력분포와 변형이 생기게 되는 것이다. 일반적으로 y 방향에 의한 힘은 x 방향으로도 프와송비Poisson's ratio만큼 변형을 유발하지만 그림 1은 응력에 의한 변형이 y 방향으로만 생긴다고 가정

한 것이다. 그림 1(a)는 건물의 가장아래 부분이 가장 심하게 응력을 받으며, 변형도 가장 많이 된다. 전체적인 건물의 높이는 응력으로 인해 짜부라들 것이다. 그림 1(b)의 경우는 윗부분이 가장 높은 응력과 변형이 만들어지며, 변형의 형태도 줄어드는 것이 아닌 늘어나는 방향으로 된다. 즉, 건물 전체의 길이는 중력으로 인해 늘어나게 되는 것이다. 이렇게, 동일한 중력 체적력을 가지고도 무한히 많이 설정할 수 있는 경계조건에 따라 무한히 많은 응력분포 경우의 수를 얻을 수 있다. 즉, 실제 힘의 근원인 무게의 분포와 상관없이 경계조건에 따른 응력분포를 얻게 되는 것이다. 여기에서 평형미분방정식은, (10)으로부터, 정적인 상태를 가정하였으므로, 속도 $v=0$ 이며 체적력은 중력에 의한 것만 존재하므로 $\nabla \cdot \mathbf{T}_{mech} = \rho g$ 와 같이 정역학 관계식이 성립된다. 즉, 체적력으로서 응력텐서의 발산값 $\nabla \cdot \mathbf{T}_{mech}$ 가 일정하게 주어지며, 응력텐서 \mathbf{T}_{mech} 는 경계조건에 따라 무수한 경우의 수로 존재할 수 있는 것이다. 이 경우는 그대로 전자기 체적력의 경우에도 적용이 된다. 우리가 구한 것이 전자기 체적력이기 때문에 기계적인 구속조건이 갖추어질 때만 전기기기의 전자기력에 의한 기계적 응력을 언급할 수 있게 되는 것이다. 전자기적인 체적력만에 의해 바로 맥스웰 응력이 구해지는 것은 이런 면에서도 기계역학적 의미가 없음을 추론할 수 있게 된다. 전동기의 경우라면, 축의 고정상태와 부하조건, 외부 프레임의 고정면이 고려된 기계적 변형을 생각해야 하는 것이다. 전동기의 기계적 변형을 유발하는 것은 전자기력뿐 아니라 중력, 그리고 회전에 따른 진동 등이 있을 수 있다.

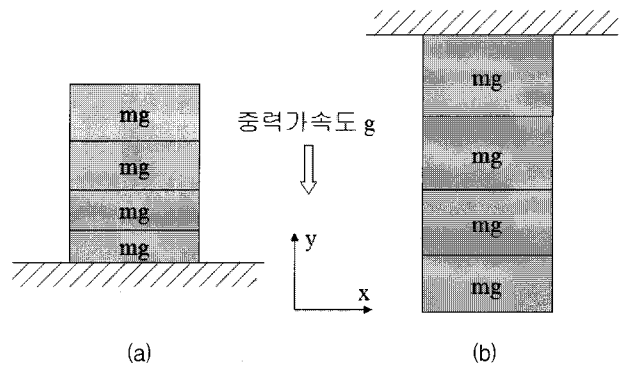


그림 1 각 층의 무게가 mg 이고 원래 크기가 동일한 경우의 중력에 의한 개략적 변형의 예. (a) 밑면이 고정 (b) 윗면이 고정

Fig. 1 Schematic deformations by gravity when the weight of each layer is mg (a) with fixed bottom (b) with fixed top

기계동역학적 관점에서 보면, 만약 물체 내부에 균일한 전자기 체적력이 존재하고 기계적 고정경계가 존재하지 않으면, 물체는 뉴턴공간Newtonian space에서 자유가속운동을 하게 되는 데, 이럴 때 동역학적 관점에서 보면 물체 내부에 응력은 전혀 생기지 않게 된다. 이러한 상황은 물체가 지표면 위에서 자유낙하로 가속될 때, 그 물체에 중력에 의한 응

력이 존재하지 않은 경우와 동일하다. 그러나 맥스웰 응력은 물체의 가속여부와 상관없이 전자기장에만 의존하여 항상 존재하게 되는 데, 이 또한 실제 기계적 응력이 될 수 없음을 보여주는 측면이다.

체적력으로서 중력과 전자기력의 간단한 비교를 해 보도록 하자. 중력도 질량 m 에 대해 작용하는 중력장 \mathbf{G} 로서 $\mathbf{f} = m\mathbf{G}$ 와 같이 표현이 가능하다. 전기장이 전하 q 에 작용하는 쿨롱 전자기력 $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$ 와 비교하면 유사한 형태를 띠고 있음을 알 수 있다. 그러나 전자기장에서는 문제가 좀더 복잡한 양상을 띤다. 우선 전하 또는 자하가 양과 음의 값을 모두 가질 수 있으므로, 항상 상호간에 당기는 방향의 힘만을 가지는 중력에 비해 당기는 힘과 반발하는 힘을 모두 가지는 커다란 차이점을 가지고 있다. 자성체나 유전체내의 경우 전자기력은 더욱 미묘하고 복잡하다. 자기장에서의 켈빈Kelvin의 체적력 밀도 수식 $\mathbf{f} = \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}$ 은 자성체내에서의 필드 변화가 체적력 발생의 근원이 됨을 의미하고 있다 [3]. 즉, 자성체의 경우 일정한 방향과 크기를 갖는 외부 자계에 놓여 질 경우, 전체 전자기력은 발생이 되지 않는다. 불균일한 외부 자계하에서는 자성체 내부의 자계도 불평형하게 될 것이므로, 전체 전자기력이 발생된다. 일정한 중력장에서 질량체가 놓일 경우에 그 것에 중력이 발생하는 현상과는 상반된 결과인 것이다. 켈빈식이 아니더라도, 뒤의 절에서 설명할 가상공극에 의해 체적력을 구하게 되면 역시 자계의 변화가 체적력발생의 근원임을 보여준다.

3.2 자성유체의 유체정역학적 관찰

자성을 띠면서 유체의 성질을 가지는 물질을 자성유체라 하는 데, 참고 문헌 [8]과 [17]을 보면 자세한 성질과 응용을 알 수 있다. 자성유체가 그릇에 담겨 있고, 외부에서 자계가 가해진다고 가정하면, 자성유체는 변형이 일어나 공기과 접촉하는 자유표면이 반드시 평면이 아닐 수 있다. 곡면을 띠는 자유표면free surface과 그릇의 면과 밀착되어 담겨있는 정적인 상태를 생각해 보기로 한다. 외부의 자계는 자석등에 의해 밑에서 또는 옆에서 공급하는 것으로 가정하여도 무방하다. 유체는 정적인 상태에서 내부에 전단응력shear stress(관심표면의 수평방향의 응력성분)를 유지할 수 없으며, 오로지 수직방향으로의 압력성분만이 존재한다. 자성유체도 이러한 성질을 만족시켜야 하는 것은 자명하다. 그러나 맥스웰 응력을 자성유체의 표면을 따라 모두 적용한다고 생각하면, 일반적으로 전단응력 성분이 상당량 존재하게 된다. 표면에서의 맥스웰 응력의 수평성분이 바로 전단응력 성분이기 때문이다. 이것이 정유체역학적으로 보면 바로 모순임을 알 수 있다. 자성유체 내부에서의 단면을 생각하고, 여기에서의 전단력을 생각하여도 마찬가지로 결론을 얻어낼 수 있다.

그림 2와 같이 자성유체의 그릇에 비자성 고체를 담그었을 때, 고체에 미치는 힘에 대해 생각해 보자. 이 비자성체는 자성유체의 비중보다 약간 커서, 그릇의 바닥으로 가라앉는다고 보자. 이 그릇의 바닥 밑에서 약간 떨어진 거리에서 영구자석을 갖다 놓으면, 비자성체가 부상하는 현상을 관찰[17]할 수 있다. 지금까지 맥스웰 응력은 그 자체는 실제

가 없다 해도 그것의 폐표면 적분인 전체 전자기력은 의미가 있다고 언급하였다. 그러나 이 경우에는 비자성체가 부상력buoyance force으로 받는 힘을 계산하려고 할 때 맥스웰 응력의 표면 전체 적분조차 의미 없는 결과가 나오게 된다. 비자성체의 폐곡면을 적분하게 되면, 그 값은 수치해석적으로나 실제적으로 0 이 나올 수밖에 없다. 비자성체는 전자기력을 받지 않기 때문이다. 그러면 전자기력으로 비자성체 부상을 설명할 수 없는 모순적인 결과라 할 수 있다. 이러한 모순적인 이해는 전자기적 현상과 유체정역학의 융합 물리적인 현상으로 접근하지 못함으로 해서 생긴 것이다. 부상력을 받는 이유는 자성유체가 자석 방향으로 끌리게 되는 데, 이 현상이 비자성 물체를 위로 밀어 올리기 때문이다. 이 문제는 다음과 같은 해법으로 접근하여야 한다. 유체에 미치는 힘은 중력이라는 체적력과 더불어, 전자기 체적력이 가해지게 되는 데, (10)식으로부터 속도 $\mathbf{v} = 0$ 와, 유체내에서는 전단응력이 부재하여 응력은 압력만으로 존재하므로 $\nabla \cdot \mathbf{T}_{mech} = \nabla p$ 이고, 점성 η 또한 무시할 수 있으므로 다음과 같은 유체정역학적 평형방정식이 도출 된다 [18].

$$\nabla p = \rho\mathbf{g} + \mathbf{f} \tag{11}$$

여기서, p 는 압력, $\rho\mathbf{g}$ 중력에 의한 체적력, \mathbf{f} 는 전자기 체적력이다. 이 수식과 유체의 자유표면에서의 압력이 대기압으로 일정하다는 조건하에서, 비자성체의 각 면에 미치는 압력이 계산이 가능하다. 중력에 의한 이러한 압력의 합은 위로 밀치는 것이 되고, 그림 2와 같이 영구자석이 밑에 있을 경우의 전자기력에 의한 압력의 합은 역시 위로 밀치는 힘으로 기여한다. 이 힘들과 비자성체의 무게와의 차이로부터 최종적인 부상력이 얻어지게 되는 것이다.

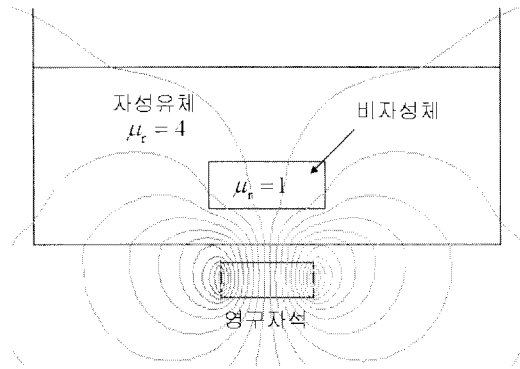


그림 2 밑면에서 공극되는 불균일 자계하에서의, 자성유체의 그릇에 유체보다 큰 비중을 가지는 비자성 고체가 잠긴 경우

Fig. 2 A case of non-magnetic solid material submerged in magnetic liquid subject to non-uniform magneto-static field

3.3 접촉력에 의한 체적력의 발생

리날디는 크게 두 가지의 주장을 하였는데, 물리적인 의미 관점에서 볼 때, 체적력이 접촉력으로 변환될 수 없다는

것과 그 반대의 경우로서 외부에서 공급된 접촉력이 체적력으로 변환될 수 없다는 것이다. 전자에 대해서는 리날디의 타당한 논리전개와 더불어 본 논문에서도 완전하게 동의하는 바이지만, 후자의 경우에 대해서는 비판적인 견해를 제시하고자 한다.

(2b)식과 (4)식을 결합하여 다시 표현하면 아래와 같다.

$$\mathbf{F}_s = \int_{\partial V} \mathbf{t}_n dS \tag{12a}$$

$$= \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \tag{12b}$$

$$= \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV \tag{12c}$$

외부에서 공급된 물리력인 접촉력 벡터 \mathbf{t}_n 은 무방향 텐서 \mathbf{T} 로 나타내어 질 수 있다. (12b)에서 발산정리에 의해 (12c)로 변환이 되는 과정을 다시 한 번 살펴보자. \mathbf{t}_n 의 분포(즉, \mathbf{T} 의 분포)가 주어지는 경우에, 공간에 대한 미분형태인 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 은 유일한 분포로 수학적으로 결정이 된다. 즉, 수학적으로 (12c)의 피적분함수는 유일하게 결정된다. (2a)에서 (3)식으로 갈 때 수학적으로 유일하게 \mathbf{T} 가 결정되지 않는 것과는 다른 상황인 것이다. 이것을 물리적으로 바라본다면 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 가 여전히 물리적인 의미를 지녀야 한다는 것을 암시하는 것이고, 바로 체적력을 뜻하게 된다.

그림 3에서는 중력이 없는 우주공간에서 물체A를 한 면의 접촉력만으로 밀어 낼 때의 상황을 가정한 것이다. 자유공간으로 가정하였으므로 뉴턴의 법칙에 의해 가속이 일어나고 있는 상태이다. 이 상태에서 물체A의 변형을 구하려면 어떠한 외부 힘을 고려하여야 하는가에 대한 문제제기이다. 아인슈타인의 일반상대성 이론에서는 가속에 의한 관성력과 중력의 구분을 제거하여 물리적으로 동등하다고 보는 등가원리를 제시하였다. 이러한 등가원리를 적용하면, 그림 3의 문제는 가속으로 인해 중력과 같은 체적력(관성력)이 물체A내에서 발생이 되며, 이것에 접촉력 면을 고정면으로 가정하면 변형을 구할 수 있게 된다. 즉, 물체A를 바라보는 관점을 물체와 동일한 속도로 가져갈 때 접촉력의 체적력 변환은 정당성을 얻을 수 있다. 여기에서 물체A내에 작용하는 체적력을 위한 중력 가속도는 실제 가속도의 반대 방향으로 작용하는 반작용힘으로부터 비롯된다. 고전역학에서는 이러한 반작용 힘을 실제 힘이 아닌 유효 역작용 힘 effective reverse force라 본다.

만약 전자기적인 접촉력, 즉, 표면전자기력이 존재하고, 그것에 의해 자유가속운동이 행해지는 상황을 가정한다면, 이 또한 등가원리적인 체적력으로 볼 수 있음을 의미한다. 리날디의 주장인 접촉력이 체적력으로 변환될 수 없다고 보는 것과는 다른 관점인 것이다. 자유가속운동을 가정하지 않고, 단지 접촉력 표면을 제외한 물체의 다른 표면들에 어떠한 접촉력도 가해지지 않는 경계조건을 생각하고, 이로부터 구성되는 편미분방정식을 풀어도 동일한 결론을 이끌어 낼 수 있다. 이러한 의미의 해석은 매우 미묘한 부분을 내포하고 있으며, 더 이상의 자세한 논의는 본 논문의 범위를 넘어서며, 전자기력과 일반상대론이 포함된 동역학적인 견지에서 좀 더 자세한 관찰을 하여야 할 것이다.

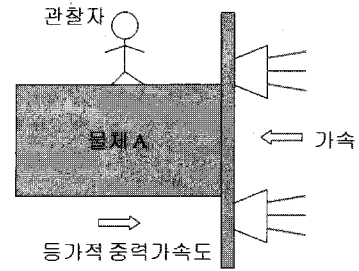


그림 3 중력이 없는 우주공간에서 접촉력만으로 물체A를 밀어내는 상황에서 변형 생각하기.

Fig. 3 Thinking deformation of material A when there is only contact force in the free space

4. 가상공극에 의한 전자기 체적력 밀도

지금까지의 내용에서 맥스웰 응력텐서는 물리적 실체가 없는 것으로 증명되었다. 그렇다면 전자기적인 원인에 의한 진동현상이나 기계적인 변형은 어떻게 구해낼 수 있을까? 앞에서도 언급했지만, 전자기력을 체적력으로 보아야 하고, 그 값의 분포는 맥스웰 응력텐서의 발산으로 구할 수 있다. 수치해석으로 볼 때, 체적력을 구하기 위해서는 물체내의 작은 체적에 대해 그에 작용하는 전체 전자기력을 구하고, 그 체적을 나누어 줌으로써 그 체적에서의 평균 체적력 밀도 \mathbf{f} 를 구할 수 있게 된다. 이러한 과정은 발산의 정의와 일치하고, 다만 관심체적의 크기를 무한소로 가져가지 않는 수치해석적인 타협인 것이다. 그러나 여기서도 여전히 문제점이 존재하는 데, 맥스웰 응력법에 의한 전체 전자기력을 구하기 위해 적분하는 과정에서 표면으로 표현된 적분경로를 따라 적분을 행할 때, 그 경로를 따라 반드시 공극 또는 진공이어야 한다는 것이 지금까지 일반적으로 받아들이는 원리이다. 공기층이 아닌 곳으로 표면 적분을 행하게 되면 자성체나 유전체의 경우, 그 내부에서 거의 0에 가까운 값이 도출이 되고, 결국 표면근처에서만 0이 아닌 값이 나타나게 된다. 이러한 원인은 서론에서도 언급하였듯이 매체내에서 장의 표현자인 \mathbf{B} 와 \mathbf{H} 에 대한 개념상의 불분명한 정의가 그 원인으로도 지목될 수 있다. 이러한 불분명성에 대한 엄밀한 논의는 본 논문의 의도와 벗어날 뿐 아니라, 아직 명백한 결론을 내릴 수 있는 단계가 아니다.

본 논문의 저자들은 실용적인 관점에서 이 문제에 대한 성공적인 해결책을 제시한 바 있는 데, 바로 가상공극 virtual air-gap적인 접근법이다. 이 접근법에 의하면 두 개의 자성체가 적당한 거리를 두고 특정 자계하에 있을 때, 상호간에 전자기력이 발생이 되는 데, 그 간격 거리를 줄여나가 완전한 접촉이 되었을 때, 각 매체의 전체 전자기력을 계산해 낼 수 있는 방법이다. 물론, 유전체의 경우도 동일하게 적용이 가능하다. 접촉면에서도 마치 공극이 미소하게 존재하는 것으로 가정된 방법이며 다음 절과 참고문헌 [13][14][19]-[23]등을 참고하기 바란다. 맥스웰 응력을 면적 적분할 때, 어떠한 \mathbf{B} , \mathbf{H} , 투자율을 취하는가의 문제가 가상공극하에서는 분명해지게 되는 데, 바로 가상공극에서의 그 값들을 취하면 되는 것이다. 가상공극을 유한요소의 각 요소의 변에서 적용하면 요소에서의 전체전자기력을 구할 수 있는 데,

이를 요소의 크기로 나누면 그 요소에서의 평균적인 체적력 밀도가 나오게 된다. 이렇게 구한 체적력 밀도는 그 요소에서의 맥스웰 응력텐서의 평균적인 발산을 의미한다.

가상공극적인 방법은 모든 전자기력 계산법에 통용되는 상위적인 개념의 접근법으로서, 지금까지 자하법[19], 자화전류법[20], 맥스웰 응력법[13], 가상일법[23]등에 모두 성공적으로 적용이 된바 있다.

4.1 매체간 접촉시 힘구하기

지금까지는 두 개의 자성체가 접하고 있을 경우, 각 자성체에 미치는 전자기력을 구하려면 그 접촉면 사이에 공기층을 만들어 주어야 수치적인 계산이 가능하였었다. 공기층을 실제적으로 만들지 않더라도, 가상적으로 공기층을 두어서 자성체가 서로 접하고 있는 경우라도 전자기력을 계산할 수 있는 방법은 일반화된 자하법generalized magnetic charge method[19]을 통해 개발이 되었는데, 가상공극에서의 자계값을 전자기적 경계조건을 만족하면서 수식으로 유도될 수 있었다. 즉, 한번 풀이된 해를 가지고, 후처리 과정에서 가상공극에서의 자계값을 얻어낸다는 것이다. 일반화된 자하법에서는 등가적인 자하가 접촉하고 있는 면에서도 서로 상쇄되어 없어지지 않는다는 가정을 도입하여 접촉 상태에서도 각 자성체의 전체 전자기력을 계산 한 것이다. 자하가 자화(magnetization)를 모델링하기 위한 가상적인 방법이고, 이러한 등가 소스가 분자 또는 원자 내부에서 발생한다고 할 때, 두 원자 간에 완전한 접촉이 이루어져 표면으로 등가화된 자하가 서로 상쇄 된다고 보는 것은 애초에 무리가 있는 가정이라 볼 수 있다. 상쇄된다고 보기 보다는 서로 일정한 거리를 두고 모두 존재하되, 그 효과가 일정 거리 이상에서 상쇄된다고 보는 것이 더욱 합리적이라 볼 수 있는 것이다. 일반화 되는 과정을 관찰해보면 마치 두개의 자성체가 접촉 후에도 그 사이에 가상적으로 공극(가상공극)이 있는 것과 같은 수식이 유도됨을 보였던 것이다. 두 개의 자성체가 서로 끌리는 전자기력에 의해 접근해갈 때, 그 전자기력이 접촉시에 가장 큰 값을 유지한다는 직관적인 상식과 본 방법에 의한 결과는 정확히 일치한다. 기존의 방법에서는 접촉시의 계산은 불가능상태라 보고 계산을 회피하거나 실제공극을 두는 임시방편적인 수단을 사용한다. 이러한 가상공극은 일반화된 자화전류법generalized magnetizing current method을 통해서도 동일하게 유도가 될 수 있었다[20].

가상공극은 등가소스법인 자하법과 자화전류법으로 접근할 때 동일한 형태로 나타나고, 에너지 접근법인 맥스웰 응력법과 가상일virtual work법에서 다르게 표현이 된다. 자세한 유도과정은 참조문헌을 참고하고 여기서는 맥스웰 응력과 가상일법을 위한 가상공극상의 $H_{vgap\ inside}$ 값의 최종식을 다음과 같이 나타낸다. 우선, 그림 4에서 재질 1에서부터 B 값의 면수직성분의 연속과 H 값의 면수평성분 연속의 원리로부터 다음의 가상공극 $H_{vgap\ from\ 1}$ 식을 얻어낼 수 있다.

$$H_{vgap\ from\ 1} = (\mu_r H_{1n} + M_{01n})n_1 + H_{1t}t_1 \quad (13)$$

여기서, 각 변수의 색인 1은 재질 1을 뜻하고, μ 은 비투자율, H_n, H_t 은 각각 자계 세기의 수직, 수평성분, M_{0n} 은 영구

자화의 수직성분을 뜻한다. 재질 2로부터 가상공극을 구하면,

$$H_{vgap\ from\ 2} = (\mu_r H_{2n} + M_{02n})n_2 + H_{2t}t_2 \quad (14)$$

와 같다. 색인 2는 재질 2를 뜻한다. 맥스웰 응력은 가상공극의 중간을 지나는 적분경로를 취하므로, (13)와 (14)의 평균을 취한 값이 중간 적분경로의 가상공극값으로 유도가 된다[13][23].

$$H_{vgap\ inside} = \frac{H_{vgap\ from\ 1} + H_{vgap\ from\ 2}}{2} \quad (15)$$

(15)식을 맥스웰 응력 (7)식에 적용(응력 자체는 물리적 의미가 없음을 이미 언급하였다)하여, 접촉면과 나머지 폐곡면에 대해 적분을 하면, 폐곡면이 감싸는 매체의 전체 전자기력을 구할 수 있게 되는 것이다.

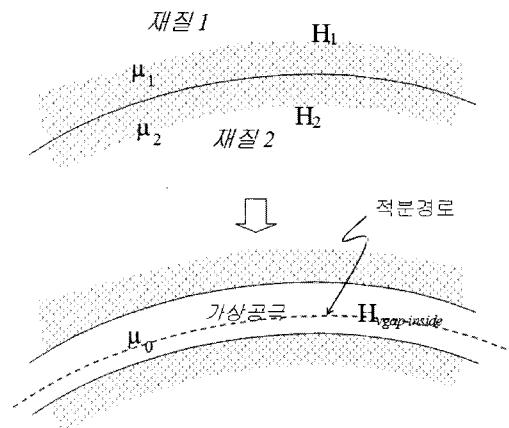


그림 4 두 재질간의 사이에 가상공극의 생성과 맥스웰 응력을 위한 적분경로

Fig. 4 Conceptual procedure of virtual air-gap creation in the interface of the two objects, and the integral path in the gap for Maxwell stress

4.2 체적력 밀도 계산

어떤 자성체 덩어리(또는 유전체)에 전자기력이 작용하여, 그에 의한 변형을 구하려면 그 덩어리의 전자기적인 체적력을 구할 필요가 있다. 이 체적력을 구하기 위한 개념적인 접근을 우선 살펴보자.

주어진 자계하에서 어떠한 자성체 덩어리에 미치는 전자기력은 밖에서 주어지는 외력과 덩어리 내부의 자성체 질점간에 서로 작용하는 힘인 내력이 있다. 체적력 밀도의 의미는 바로 이런 질점에 미치는 모든 영향을 고려한 전자기력 밀도인 것인데, 이러한 체적력과 더불어 기계적 구속경계조건을 부여하면 자성체 덩어리의 변형을 구할 수 있게 되는 것이다. 어떤 질점에 미치는 내력은 자신의 질점을 제외한 모든 질점과의 상호 작용으로부터 힘을 모두 더해야 하고, 모든 질점에 대해 이러한 적분을 행하는 것은 무한대의 시간이 걸리게 된다. 만약, 유한 요소와 같이 N개의 체적으로 덩어리를 분할한다고 하면, 그 덩어리의 내부 힘을 구하기 위해 $N(N-1)$ 번의 유한요소 해석을 요구하게 되며, 이는 현실적인 방법이 되지 못한다. 덩어리 관점에서 외력과 내력

을 구분하기 보다는, 관점을 덩어리 내부의 질점으로 옮길 필요가 있는데, 질점에서 미치는 모든 힘은 모두 외력으로 보는 것이다. 이 질점에 미치는 힘이 바로 체적력 밀도로 표현이 된다.

가상공극적인 관점에서는 특정 질점을 유한한 크기로 보고, 그 유한한 부위를 감싸는 가상공극을 생각할 수 있으며, 이 공극 안쪽의 체적에 대해 전체 전자기력을 구하게 된다. 이러한 유한체적에 대한 전체 전자기력의 의미는 덩어리 밖의 모든 상황과 덩어리 내부에서 일부분인 유한체적과 그 유한체적을 제외한 다른 모든 부위와의 관계를 반영한 것이라 할 수 있다. 즉, 가상공극에서의 자계값은 앞에서 언급한 모든 관계를 반영한 최종 결과물로 간주할 수 있다. 이렇게 구한 전체 전자기력을 그것의 유한체적으로 나누어 주게 되면 그 유한체적내에서의 평균적인 체적력 밀도로 간주할 수 있다. 유한한 체적은 그 부피를 무한소로 가져감으로 해서 하나의 질점을 표현 할 수 있게 되는데, 무한소의 전자기력을 무한소 부피로 나눈, 즉, 질점에서의 평균적 개념의 체적력 밀도를 구하게 되는 것이다. 이와 같은 과정은 다음과 같이 맥스웰 응력의 발산인 체적력 밀도 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 의 정의로 표현 된다.

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} ds}{V} \quad (16)$$

여기서, 현실적인 수치해석적 타협을 통해, 무한소의 부피 대신에 유한한 크기의 요소를 하나의 커다란 질점으로 보고 거기에서의 평균적인 체적력 밀도를 구하는 방식으로 귀착이 될 수 있다. (16)식에서 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 는 (7)식에 의해 가상공극에서 구해지고, 물리적 실체가 없는 맥스웰 응력 또는 표면전자기력 밀도 \mathbf{f}_s 이다. 한 요소내의 무한소 질점들에서의 체적력 밀도는 한 요소 전체에서 구한 체적력 밀도와 동일하다고 봐도 수치해석적으로는 무방할 것이다. 즉, 자성체 덩어리내의 임의의 질점에서의 자기적 외력을 후처리과정에서 완전하게 구해낼 수 있다고 볼 수 있다.

하나의 요소에 대한 가상공극과 맥스웰 응력의 실제적인 적용은 그림 5와 같이 할 수 있다. e_0 에 대한 전체 전자기력은 그 부피를 나누어 줌으로 해서, 전자기 체적력 밀도를 구할 수 있게 된다. 이렇게 구한 체적력 밀도는 요소 e_0 내의 모든 질점의 체적력 밀도에 대한 평균값으로 간주되어야 한다.

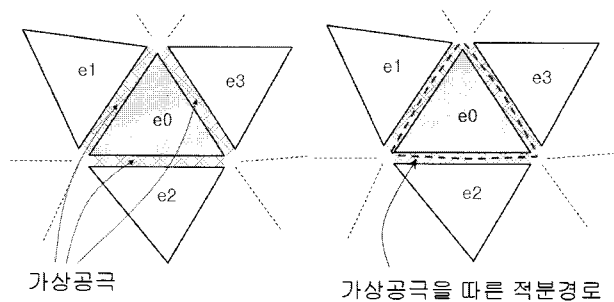


그림 5 체적력밀도를 구하기 위해, 요소 e_0 주위에 가상공극 만들어 맥스웰 응력 적분하기.

Fig. 5 For the calculation of body force density, integrating the Maxwell stress along the virtual air-gap

그림 6에서는 영구자석 표면부착형 전동기 SPM motor 내의 체적력을 보여주고 있다. 본 해석은 유한요소법에 의해 수행이 되었고, 각 요소별로 가상공극과 맥스웰 응력법을 사용하여 각 요소별 전자기력을 표시한 것이다. 그림에서 보듯이 표면에 치우치지 않은, 자성체 내부에 비교적 골고루 분포하고 있는 전자기력 밀도를 보여주고 있다. 체적력 분포가 국소적인 부위에서 일정치 못하고 들쭉날쭉한 것은 요소의 모양에 의존적인 체적력의 특성 때문이다. 이는 정규화 과정[22] 또는 켈빈식에 의해 해결이 될 수 있다.

전자기체적력은 응력을 구하는 역학관계식에서 입력항에만 추가가 되는 양이므로, 기존의 상용 소프트웨어를 거의 그대로 사용하거나 약간의 수정보완을 통해 가능할 것으로 본다. 분포적인 전자기 체적력을 입력으로하여 기계구조해석의 상용소프트웨어를 사용하려면, 전자기 체적력을 각 요소별로 구조해석 소프트웨어에 '입력'이 가능하거나, 요소의 모양과 개수가 일치하지 않는 경우에는 보간법에 의해 체적력 밀도를 입력할 수 있도록 해야 할 것이다. 전자기 체적력을 각 질점에서의 양으로 변환하여, 입력하는 방법도 가능할 것이다. 기계적 변형의 크기가 전자기적 변화를 초래할 정도로 크다면, 변경된 형상으로 전자기 해석을 재수행하는 절차가 가미되어야 하며, 이러한 비선형적 해법과정은 특정 오차 이내까지 반복적으로 수행되어야 한다.

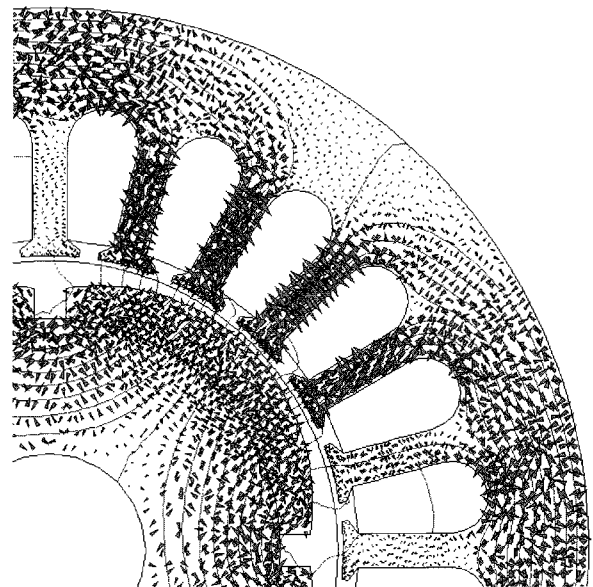


그림 6 가상공극과 맥스웰 응력텐서의 발산으로부터 계산한 4극 SPM 전동기 내부의 체적력 분포도

Fig. 6 Body force distributions of 4 pole SPM motor using virtual air-gap applied Maxwell stress tensor method

5. 결 론

본 논문에서는, 맥스웰 응력 텐서 \mathbf{T} 가 물리적인 의미가 없는 가상적인 응력텐서이며, 고체역학 또는 동역학적인 해석을 위해 이를 물리적인 기계력으로 취하면 안 된다는 것을 밝혔다. 물리적 의미를 부여할 수 있는 것은 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 이며 이는 전자기 체적력을 의미하고, 중력과 같은 원적작용에 의

한 힘이다. 맥스웰 응력 텐서의 유도과정을 에너지적인 접근에서 관찰하여 그 과정으로부터 본 결론을 유도 할 수 있음을 보였고, 몇 가지 역학적 관찰을 통해서도 동일한 결론이 도출할 수 있었다. 전자기 체적력 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 의 계산을 위한 방법론으로 가상공극법이 유용함을 제시하였다.

그 동안 많은 국내의 논문이 맥스웰 응력을 기계적 표면의 힘으로 간주하여 연구되어 오고 있는 실정이다. 전자기력에 논란은 그 동안에도 계속 있어 왔지만, 맥스웰 응력에 대한 무효성은 본 논문에서 밝혀졌으므로, 이러한 접근법은 앞으로 지양되어야 한다. 맥스웰 응력을 다룬 대부분의 논문이 실험적 결과와 수치해석 결과의 일치 또는 경향적 일치를 언급하고 있는데, 이는 유사한 결과에 대한 착각으로 간주된다. 체적력을 입력으로 한 변형상태와 표면력(체적력 적분과 표면력 적분이 동일한 전체 전자기력을 나타낼 때)을 입력으로 한 것은 대상 물체를 탄성체로 간주할 경우, 그 변형이 달리 나타날 수밖에 없으며, 최종적인 변위의 차이도 당연히 존재하여야 한다. 이는 고체역학적으로 타당한 결과 추론이다. 이에 대한 추가적 관찰 또는 실험적 시도는 미래 과제로 남기고자 한다. 현재, 다수의 전자기장 해석 소프트웨어가 자성체 또는 유전체 표면에서의 맥스웰 응력을 기계적 입력이 가능한 표면전자기력 밀도로 제시하고 있는 실정인데, 수정이 되어야 할 것이다.

맥스웰 응력의 전자기력 밀도로서의 무효화는 다른 전자기력 방법들에 대해서도 동일한 부정적 비판에 직면할 것이라는 암시를 주고 있는데, 이 또한 본 저자들의 향후 과제로 여기고자 한다.

감사의 글

이 논문은 2008학년도 경북대학교 신입교수정착연구비에 의하여 연구되었습니다.

참 고 문 헌

[1] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw Hill Book Co., 1941.
 [2] H. A. Haus and J. R. Melcher, *Electromagnetic Fields and Energy*, London: Prentice-Hall, 1989, pp. 504-510.
 [3] S. Bobbio, *Electrodynamics of Materials: Forces, Stresses, and Energies in Solids and Fluids*, Academic Press, 2000.
 [4] J. Slepian, "Electromagnetic ponderomotive forces within material bodies," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 36, no. 9, pp. 485-497, Sep. 1950.
 [5] A. DiCarlo, "G. Lame vs. J, C, Maxwell: How to Reconcile Them?," *Proc. of Scientific Computing in Electrical Eng.*, pp. 1-13, June 2002.
 [6] A. Bossavit, "On local computation of the electromagnetic force field in deformable bodies," *Int. J. Applied Electromagnetics in Materials*, 2, 4, pp. 333-343, 1992.

[7] See Ref [3], pp. xi-xv in the preface.
 [8] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, New York: Dover, 1997.
 [9] See Ref. [8], pp. 100.
 [10] C. Rinaldi and H. Brenner, "Body versus surface forces in continuum mechanics: Is the Maxwell stress tensor a physically objective Cauchy stress?," *Physical Review E*, Vol. 65, 036615, 2002.
 [11] See Ref. [1], pp. 97-103.
 [12] J. J. Roche, "B and H, the intensity vectors of magnetism: A new approach to resolving a century-old controversy," *Am. J. Phys.* 68(5), pp. 163-168, May 2000.
 [13] H. S. Choi, I. H. Park, and S. H. Lee, "Concept of virtual air gap and its application for force calculation," *IEEE Trans. Magn.*, vol.42, no.4, pp. 663-666, April 2006.
 [14] H. S. Choi, S. H. Lee, and I. H. Park, "Electromagnetic body force calculation based on virtual air-gap," *Journal of Applied Physics* 99, 08H903, 2006.
 [15] R. Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, New York, 1989.
 [16] K. Reichert, H. Freundl, and W. Vogt, "The calculation of force and torque within numerical magnetic field calculation method," *Proceedings on COMPUMAG*, pp.64-74, 1976.
 [17] 민만기, 서이수, "자성유체의 물리적 성질과 그의 응용," *대한기계학회지*, 30권, 2호, pp.188-193, 1990.
 [18] H. S. Choi, Y. S. Kim, K. T. Kim, and I. H. Park, "Simulation of hydrostatical equilibrium of ferrofluid subjected to magneto-static field," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.44, No.6, pp.818-821, June 2008.
 [19] H. S. Choi, S. H. Lee, and I. H. Park, "General formulation of equivalent magnetic charge method for force density distribution on interface of different materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol.41, no.5, pp. 1420-1423, May 2005.
 [20] H. S. Choi, S. H. Lee, and I. H. Park, "Generalized Equivalent Magnetizing Current Method for Total Force Calculation of Magnetized Bodies in Contact," *IEEE Trans. Magn.*, vol.42, no.4, pp.531-534, April 2006.
 [21] H. S. Choi, J. H. Lee, and I. H. Park, "Separation of each torque component on parts of electric machine using magnetic force density," *IEEE Trans. Magn.*, vol.41, no.5, pp.1464-1467, May 2005.
 [22] H. S. Choi, Y. S. Kim, J. H. Lee, and I. H. Park, "An Observation of Body Force Distributions in Electric Machines", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.43, No.4, pp.1861-1864, April 2007
 [23] H. S. Choi, S. H. Lee, Y. S. Kim, K. T. Kim, and

I. H. Park, "Implementation of Virtual Work Principle in Virtual Air Gap," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol.44, No.6, pp.1286-1289, June 2008.

저 자 소 개



최 홍 순 (崔 鴻 洵)

1963년생. 1986년 서울대 전기공학과 졸업. 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2000년 동 대학원 전기공학부 졸업(박사). 1988년-1994년 삼성전기/삼성 SDS. 1995-1997 기초전력공학연구소 전임연구원. 1997-2003 (주)코모텍 이사.

2003.9-2007.2 성균관대학교 정보통신공학부 연구교수. 2007.3-현재 경북대 전자전기공학부 전임강사. 주 관심분야: 전동기 설계, 전기 및 기계 융합, 전자기장 응용.

Tel : 054-530-1328

Fax : 054-530-1329

E-mail : tochs@knu.ac.kr



박 일 한 (朴 日 韓)

1960년 생. 1984년 서울대 전기공학과 졸업. 1986년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1991년-1992년 프랑스 그레노블공대 post-doc., 2005년-2006년 미국 MIT 방문교수, 1998년-현재 성균관대학교 정보통신공학과 교수. 주 관심분야: 전기기기, 전자기 시스템 최적설계, 전자장 수치해석, 전자장 다물리시스템

Tel : 031-290-7146

Fax : 031-290-7942

E-mail : ihpark@skku.ac.kr



문 원 규 (文 元 圭)

1984년 서울대학교 기계공학과 학사, 1986년 한국과학기술원 석사, 1995년 오스틴 주재 텍사스주립대 박사, 1996-1998 삼성중합기술원, 1998년부터 포항공과대학교 기계공학과 교수로 재직중. 관심분야는 전기-기계 결합 현상을 이용한 트랜스듀서로 압전 응용 디바이스 개발 및 연구에 집중. 미세 가공기술을 이용한 다양한 트랜스듀서 연구에 참여 중임.

Tel : 054-279-2184

Fax : 054-279-2887

E-mail : wkmoon@postech.ac.kr