대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.4, 685-706. Dec. 2009

맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도 1)

김 명 운* · 장 경 윤**

이 연구는 분수의 곱셈 · 나눗셈에 관련한 교수-학습을 의미 있게 도울 수 있는 맥락화가 왜 필요하며, 어떻게 가능한지, 또한 효과적인 맥락화의 활용 방안은 무엇인지를 탐구하는 것을 목적으로 한다.

이를 위해 자연수에 대하여 분수의 곱셈 · 나눗셈 상황의 차이는 무엇인지를 살펴보고, 그 차이에 따라 분수의 곱셈에서는 승수인 연산자의 역할을 이해할 수 있는 맥락을 설정하여, 단위의 변화에 대한 인식을 하도록 하였다. 분수의 나눗셈에서 포함제는 그 몫이 이산량인 경우이면 남은 양이 생길 수 있고, 연속량인 경우에는 분수로 그 몫을 표현해야 하는 맥락으로 구분지었다. 그리고 등분제의 맥락은 자연수의 등분제의 맥락과 연결시켜 새롭게 제시하여, 자연수의 나눗셈에서 분수의 나눗셈으로 형식화되는 3단계의 효과적인 학습 방법을 제안하였다. 이로써 교사와 학생들의 분수의 곱셈과 나눗셈의 교수-학습 과정에 있어서 유의미한 알고리즘의 습득에 도움을 줄 수 있을 것으로 기대한다.

Ⅰ. 서 론

수학교사들에게 있어 알고리즘의 지도는 산술 교육의 핵심으로서 매우 중요하다. 알고리즘이란 일단의 문제들을 해결하기 위한 정확하고 체계적인 방법으로, 하나의 알고리즘에 주어진 정보를 입력하고, 정해진 일련의 규칙을 따르면, 유한한 단계를 거쳐 결정적인 답을 제공하는 출력을 얻게 된다(Maurer, 1998). 그러므로 알고리즘은 문제를 해결할 때 단순한 경우는 물론 복잡하여 쉽게 해결하기 어려워 보이는 경우에 이르기까지 규칙을 파악하여 해결하고자 할 때 유용한 도구이며, 우리가 일상생활을 할 때 마주치는 수많은 문제들 역시 그 속에 들어있는 알고리즘을 발견하면 종종 문제를 쉽게 해결할 수 있게 된다. 따라서 알고리즘은 수학의 본질적인 요소로서 수학 학습에 있어서 중요한 부분을 차지하며, 수학의 활용과 학습에 매우 유용하다(우정호, 1998; 장경윤, 1996).

알고리즘이 가지는 유용한 특성에 비하여 기존의 알고리즘 지도가 일련의 공식을 암기하는 등 단순히 알고리즘의 수행을 강조하거나, 지나치게 기계적인 훈련에 치중해왔음을 부인할 수 없다. 교사는 학생들에게 사칙연산을 행하는 방법을 주입해 왔고, 학생들은 그러한 연산이 가지는 의미는 간과한 채, 기계적으로 수행하여 하나의 답을 빠르고 정확하게 구하는 것이 가치롭다고 생각하게 되었다(백선수, 2002). 그러나 학생들에게 그들이 이해하지 못하는 알

* 부민초등학교 교사 (cophyta@hanmail.net)
** 건국대학교 (kchang@konkuk.ac.kr)
1) 이 논문은 2009년 김명운의 박사학위논문 일부를 요약한 것임.

고리즘을 가르치는 것은 기껏해야 제한된 잠재력을 가지게 할 뿐이며, 더욱 중요한 것은 그것이 학생들의 일반적인 수학적 지식에 기여하지 못하는 고립된 기술로 귀착된다는 점이다 (Gravemeijer & Galen, 2003). 기계적인 암기에 의해 학생들은 단편적인 사실이나 절차를 배울 순 있어도 그것을 적용하는 이유와 적용해야 하는 시기, 적용방법을 흔히 확신하지 못한다. 실제로 학생들은 단원을 배우는 동안에는 규정된 알고리즘을 잘 사용하다가도 그 단원이 끝나면 쉽게 알고리즘을 잊으며 유사한 학습 내용의 다른 알고리즘과 혼란을 일으켜 적용에 어려움을 겪는 것으로 나타났다(오승아, 2000).

특히, 분수의 곱셈과 나눗셈에 있어서 교사들과 학생들은 그 지도와 학습에서 어려움을 겪고 있다. Kamii(1999)는 분수가 초등학교 고학년생들에게 주된 부분이지만 분수에 대한 전통적인 교육 접근은 너무 기호적이고 과정적인 것에 치중해 왔음을 지적하면서 분수의 조작 감각을 발전시키지도 못한 채 연산 알고리즘을 학습시키는 것에 대한 부적절성을 지적하고 있고, Kieren(1993)은 너무 이른 기호화가 학생들이 수리와 조작감각을 발전시킬 수 있는 어떤 기회를 사실상 빼앗아버리는 결과를 나타내면서, 실제 생활과 연결시키지 못하는 기호의 지식을 만들어내는 상황을 지적하면서 실제 생활의 상황과 구체적인 연결을 강조했다.

Freudenthal(1991)의 수학화 이론을 바탕으로 한 '현실주의 수학교육'에서도 경험적으로 실제적인 맥락 문제에서 출발하여 교사의 안내 하에서 수학을 재발명할 수 있는 경험을 제공하며, 학생들의 비형식적인 해결방법을 존중하고 상호작용하는 학습과정을 강조한다. 즉 학생들은 현실 생활과 관련된 맥락문제를 가지고 다양하고 비형식적인 해결전략에 대한 논의 과정을 통해 점차 일반화, 형식화의 과정을 거치면서 수학적 지식을 재발명하게 되는 것이다. 따라서 수학교육에서 추상적인 개념을 도입하여 수학학습을 시작하는 대신에 그 개념을 발생하게 하는 맥락 문제 즉 실생활과 관련된 문제에서 출발할 필요가 있다. 따라서 현실주의적 교육과정의 학습원리와 교수원리에 따라, 특히 학생들이 힘들어 하는 알고리즘의 학습에 있어서는 그 알고리즘의 각 단계를 설명할 수 있는 맥락이 필요하다.

이와 관련하여 우정호(2001)는 훌륭한 수학학습 지도상황이란 학생들이 학교 수학의 본질을 체득하면서 궁극적으로 자기학습이 가능한 단계에 이르게 할 수 있는 상황이라고 하였다. 수학적 추상화 및 일반화는 구체적인 모델을 보면서 각 모델 간의 공통적인 속성을 찾아내도록 안내하여야 할 것이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 교수-학습 모델의 개발은 학생들의 학습에 많은 도움을 줄 것으로 기대된다.

이에 본 연구에서는 분수의 곱셈·나눗셈을 지도함에 있어 실제적 상황에 대한 이해를 바탕으로 한 형식화를 용이하도록 하는 교수학적 변환의 일환으로 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 맥락화 방안을 탐구하는 데 그 목적을 두었다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 연산 알고리즘

가. 알고리즘의 특성

알고리즘이란 일련의 문제를 해결하기 위한 정확하고 체계적인 방법이며 알고리즘에 수를 입력하고 정해진 규칙을 따르며 제한된 단계를 거치면 결정적인 답을 제공 받는 것이다(Maurer, 1998). Usiskin(1998)은 알고리즘이 가지는 특성을 강력하고 신뢰할 수 있으며, 빠르면서도 정

확한 기록된 형태를 주는, 정신적인 이미지를 형성시키면서 교육적인 것으로 보고 있다.

이러한 알고리즘 학습의 올바른 적용에 대하여 박성택(2006)은 알고리즘을 암기시켜 기계적으로 문제를 해결시킬 것이 아니라 그 알고리즘을 적용하면 왜 바른 답이 얻어지는가에 대한 이유나 의미를 이해시키는 것이 전제가 되어야 한다고 했다. Brownell(2004)도 의미 있는 산술의 가치에 대하여 교사의 입장에서는 의미 있는 산술을 가르치는 것이 즐거운 일이며, 아동의 이해를 진전시키려고 노력을 기울이는 것은 사실을 암기하도록 수업 과제를 준비하거나, 기계적인 반복 연습을 시행하기 위해 힘을 쓰는 것보다 교사의 사기를 진작시켜 줄 수 있다고 하였다. 한편 아동의 입장에서는 기억을 보장하고 일시적으로 취약한 기능을 빠르게 회복할 수 있는 단서를 제공하며, 산술적 아이디어와 기능이 사용될 수 있는 가능성을 증가시키며, 또한 정상적인 근거와 전이될 수 있는 이해를 제공함으로써 보다 쉽게 학습하는데 도움이 된다고 하였다. 또한 완벽한 학습에 필요한 반복 연습의 양을 줄이고, 수학적으로 부조리한 답으로부터 보호하며, 비지적인 암기와 연습의 영역에서 문제해결을 통한 학습이 일어나도록 하는 등의 장점이 있음을 강조하였다.

나. 알고리즘 지도의 문제점

알고리즘이 수학교육 특히 산술교육에서 가지는 의미와 유용성에도 불구하고, 지금까지 학교 수학의 현장에서 알고리즘을 지도하는 데 있어 많은 문제점들을 나타내왔다. 전통적인 수학 교수에서는 어떤 내용의 학습을 할 때 개념을 도입하고 그에 대한 알고리즘적인 유도를 보여준 후, 관련된 예제를 풀어준 다음 적용 연습을 시키는 형태가 주로 이뤄져 왔다. 학습이 제대로 이루어졌느냐의 판단은 그 내용을 학습한 후, 문제가 제시되었을 때 학생이 즉시 올바른 답을 제시할 수 있는지의 여부에 있다. 답을 제시함에 있어 시간이 걸리거나, 그 문제에 결정된 풀이 방법이 즉각적으로 생각나지 않으면 답을 구하기 힘들어진다. 이처럼 문제에 대한 즉각적인 답을 구하는 것이 평가의 기준이 되다보니 학생들은 문제를 풀기 위해 자신의 경험과 사고를 반성하기보다는 답을 내기 위해 문제 유형에 대한 계산 패턴을 익히는 것에 매달리게 된다. 물론 학생들 중에는 계산 위주의 문제를 많이 풀어보는 연습을 통해 계산 패턴 이면에 있는 원리나 법칙을 무의식중에 습득함으로써 같은 유형이거나 응용문제에 알고리즘을 적용하여 답을 구하는 경우도 있지만 대다수의 학생들은 그렇지 못하다.

이와 관련하여 Usiskin(1998)은 알고리즘에 내포될 수 있는 위험성을 결과의 맹목적인 수용, 지나친 적용 등으로 지적하였다. 또한 Brownell(2004)은 알고리즘에 의한 학습의 폐해에 대하여 의미 없는 산술을 도구교과나 기능교과, 반복연습교과로 분류하는 것은 재난을 불러들이는 것과 같다고 이야기하고 있으며, van Hiele(1985)는 관계를 중시하는 교사의 수업에서 학생들이 기계적으로 학습할 가능성에 대하여 교사가 자신의 교수학적 지식으로 학생들에게 설명을 하지만 학생들은 그 근원을 알지도 못하면서 기계적인 방법으로 조작하고 끝내버린다고 경고한 바 있다. 즉, 교사의 관계적 설명에도 불구하고 학생들이 무의미한 암기로 학습할 가능성이 있는 것이다.

특히, 분수의 나눗셈의 알고리즘에 대한 학생들의 이해도를 조사한 연구(민인영, 2003; 송정화, 2005)들은 알고리즘을 이용한 학습이 기계적인 암기 위주의 학습으로 흐르고 있음을 보여주었다. 분수의 나눗셈을 왜 그렇게 계산하는지 이유를 모르거나, 제수의 역수의 의미

를 모르는 학생들이 적지 않다. 이처럼 학생들이 분수의 나눗셈 알고리즘을 이해하기 어려워하는 이유는 구체적인 맥락이 부족하기 때문이다(백선수, 2004).

알고리즘을 이용한 학습은 수학의 교수-학습에 필수적이다. 그러나 알고리즘을 이용한 학습에의 접근 방식에 따라 알고리즘이 학생들에게 약이 될 수도 있고 독이 될 수도 있다. 알고리즘의 각 단계로의 이행에 대한 유의미한 이해는 수학교육이 가지고 있는 논리적 사고력의 함양이라는 본질적인 가치와도 일치하는 것이나, 무의미한 기계적인 반복은 수학을 학생들에게 왜 학습시키는지에 대한 본질적인 목적을 잊어버린 것이다.

2. 분수의 곱셈 · 나눗셈의 지도 방법

분수의 연산에서의 일반적인 알고리즘으로 곱셈은 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리의 곱으로, 나눗셈은 제수를 역수로 바꾼 후 곱셈으로 계산한다. 이러한 알고리즘을 학생들에게 설명하기 위하여, 정수의 연산과 유리수의 연산의 영역을 연결해주는 방법인 근본적인 단위 개념에 초점을 맞춘 연구들이 최근에 많이 발표되고 있다.

Lamon(1994)과 Mack(1993)은 학생들이 직관적으로 단위를 형성할 수 있으며 더 나아가 이러한 단위에 대한 직관적인 지식이 유리수 이해를 위한 기본 방향이 될 수 있다고 제안했다. 또한 Golding(1994)도 단위에 초점을 맞추는 것이 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈을 연결해주는 연결고리가 될 수 있음을 밝혔다.

Alexander(1997)는 간단한 보고서에서 다양한 수학적 수준의 7학년 수학 학급에서 선출된 네 명의 학생으로 그들의 기존 단위 개념을 세우고 그것을 유리수의 곱셈, 나눗셈 연산으로 확장시키는 실험을 통하여 정수와 유리수의 곱셈, 나눗셈을 이어주는 고리로써의 단위의 역할을 조사했다. 이 실험의 분석에서 학생들의 단위에 대한 개념이 연속적인 교육으로 인하여 점점 향상되어 감을 보여 주며, 긍정적인 면으로 학생들의 탄력적인 단위 개념의 개발, 모형을 만드는 것에서 오는 개념 영역 간의 연속성, 단위화 시키는 기술이 지속되며 확장 가능함, 모델과 절차상의 방법 또는 선택적인 해결방안과의 상호 교류를 들었다. 부정적인 면은 등분할이 남긴 지속적인 어려움, 측정 단위에 대한 일관적인 강조가 이루어지기 어려움, 측정 단위의 선택과 사용에 따라 생기는 모델의 발전 장애를 들고 있다.

Alexander의 실험처럼 유리수에서의 연산 상황은 마치 어떤 연속량을 처음 접하는 학생들에게 그 연속량을 이산량화시켜 지도하는 것이 효과적인 것과 마찬가지로, 자연수의 연산 상황에서 자연스럽게 확장시키는 것이 바람직하다. Reys(1998) 등도 분수의 연산에 관하여 다음과 같이 언급하고 있다. 분수 연산의 유의미한 표현의 열쇠는, 특히 동치분수와 분수의 모형화 같은 분수에 관한 확고한 배경 지식을 확립하는 일이다. 그런 다음에, 분수의 연산을 포함하는 문제 상황이 제시되어야 한다. 또 가능한 한 언제라도 자연수 연산에 주어지는 의미가 분수 연산으로 확장되어져야 한다.

자연수의 곱셈은 동수누가와 동수누감의 상황을, 나눗셈은 등분제와 포함제의 상황을 의미한다. 이러한 자연수의 연산에서의 의미가 분수의 연산이 되었다고 해서 다른 의미로 바뀔 수는 없다. 많은 책과 논문에서 분수의 곱셈과 나눗셈에 대하여 자연수의 경우와는 다른 상황을 제시하고 있다. 이에 그들 상황은 어떤 상황인지 자연수에서의 연산 상황의 확대 해석과 어떤 차이가 있는지를 살펴보겠다.

가. 분수의 곱셈

분수의 곱셈은 승수가 분수인 경우에 그 분수는 연산자로서의 의미이다. 따라서 승수가 자연수인 경우의 동수누가로의 해석이 곤란하다. 따라서 분수의 연산자로서의 기능을 효과적으로 잘 드러내고 있는 교수-학습 방법이 필요하다. 이러한 점을 충분히 생각하여 분수의 효과적인 곱셈 지도에 대해 백선수와 김원경(2005)은 다음과 같은 교수-학습 방법을 제시하고 있다.

첫째, (분수)×(자연수)의 곱셈에서는 동수누가의 개념을 이용하여 같은 수의 반복을 나타내고 이를 축약하여 곱셈식으로 나타내도록 한다.

둘째, (자연수)×(분수)의 곱셈에서는 동수누가의 형식적 지식과 연결되지 않으므로 분할을 이용하여 분수의 연산자의 의미와 곱셈에서의 배의 의미를 이해할 수 있도록 해야 한다.

셋째, (단위분수)×(단위분수)의 곱셈에서는 승수에 의해 재분할된 단위를 새로운 단위로 인식시키는 것이 중요하다.

넷째, (진분수)×(진분수)의 곱셈에서는 분할을 이용한 단위의 재개념화가 필요하고, 피승수의 분자와 승수의 분모가 서로소가 아닌 경우보다 서로소인 경우를 먼저 형식화하는 것이 바람직하고, 구체적인 모델을 활용하도록 한다.

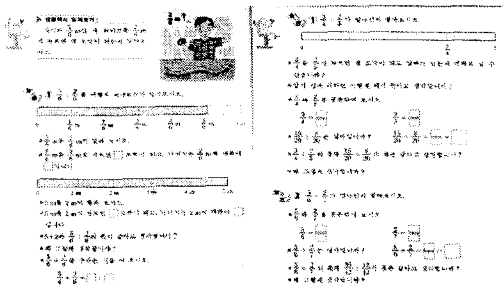
나. 분수의 나눗셈

분수의 나눗셈에 관한 연구 논문은 최근 계속해서 발표되고 있다. 서관석 · 전경순(2000); Ma(1999); 김민경(2003); 박교식 등(2004); 이종욱(2005) 등은 예비교사의 분수 나눗셈의 이해에 관한 논문에서 분수의 나눗셈이 갖는 현실적인 상황에 대한 이해의 심각한 부족을 보이며, 예비 교사의 교육과정에서 학생들에게 다양한 경험을 제공하고 실제 상황을 현실적인 맥락과 관련시켜 이해시킬 수 있는 의식적인 지도가 이루어질 필요성을 언급하고 있다.

박교식 등(2004)은 Sinicrope, Mick와 Kolb(2002)가 분수의 나눗셈의 상황을 '포함제', '등분제', '단위 비율 결정', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'의 다섯 가지 유형으로 나눈 것을 기초로 각각 설명을 하고 있다.

이러한 분류는 수학을 가르치고 배우는 교사와 학생들에게는 무척 혼란을 줄 수가 있다. 왜냐하면 자연수의 나눗셈의 분류와도, 분수의 다양한 의미에서의 분류와도 다른 접근이기 때문에 복잡성만 가중시킬 수 있기 때문이다. 교사와 학생들의 교수-학습을 보다 더 쉽게 하기 위해서는 자연수의 나눗셈 상황에서 확장된 형태의 분류가 필요하다.

제7차 교육과정에서는 분수의 나눗셈에 획기적인 변화를 보인다. 분수의 나눗셈 단원에서 처음으로 등장하는 문제가 '생활에서 알아보기'에서 나누어떨어지지 않는 경우의 동분모 분수의 나눗셈 문제로 아래의 [그림 Ⅱ-1]과 같이 제시되어 있다.



[그림 Ⅱ-1] 제 7차 교육과정-분수의 나눗셈
(교육인적자원부, 2002, p. 2, p. 4)

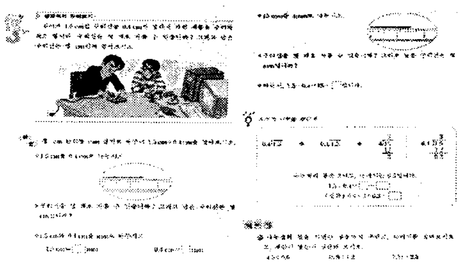
[그림 Ⅱ-1]을 보면, '길이가 $\frac{5}{6}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 몇 도막이 되는지 알아보시오'라는 문제이고, 그 풀이과정의 진술을 보면 아래와 같다.

◎ $\frac{5}{6}$m를 $\frac{2}{6}$m씩 잘라 보시오.

◎ $\frac{5}{6}$m를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 □도막이 되고, 나

머지는 $\frac{2}{6}$m에 대하여 □입니다.

일단 문제의 진술에서 '$\frac{2}{6}$m의 도막'이 몇 도막인가에 대한 확실한 진술이 부족하고, 이것은 차치하고라도, 나머지를 다루는 부분에서 풀이 과정의 진술은 일반적인 나눗셈의 나머지에 관한 진술과는 너무 차이를 보인다. 같은 제 7차 교육과정에서의 소수의 나눗셈에서 나머지를 묻는 문제를 아래의 [그림 II-2]에서 비교하여 보자.



[그림 II-2] 제 7차 교육과정-소수의 나눗셈
(교육인적자원부, 2002, pp. 50-51)

소수의 나눗셈에서의 나머지에 관한 부분의 진술은 대체로 깔끔하다. '길이가 1.5cm인 구리선을 0.4cm씩 잘라서 가전제품을 수리하려고 합니다. 구리선을 몇 개로 자를 수 있습니까? 그리고 남은 구리선은 몇 cm인지 알아보시오.' 에서 보면 원래의 구리선의 단위는 cm였고, 나머지는 그 단위인 cm로 몇 cm가 남았느냐고 묻고 있다. 그런데 분수의 나눗셈에서 나머지 부분을 묻는 진술을 살펴보면, '나머지는 $\frac{2}{6}$m에 대하여 □입니다'이다. 이것은 (자연수)÷(자연수)의 상황에서 각색을 해 보면, '사탕을 15개 가지고 있습니다. 한 학생에게 4개씩 나누어 주려고 합니다. 몇 명의 학생에게 나누어 줄 수 있으며, 나머지는 4개의 □입니까?'라는 진술과 똑같다. 원래 있었던 사탕의 단위는 '개'이고, 나머지를 물으려면 '남은 사탕은 몇 개입니까?'라고 원래의 단위인 '개'로 물어야 정상이다.

하지만 이렇게 '나머지는 $\frac{2}{6}$m에 대하여 □입니다'로 묻는 것은 아직도 '$\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = 2\frac{1}{2}$'에서 몫은 2이고, 나머지는 몫의 분수 부분인 '$\frac{1}{2}$'로 생각하고 있다는 것을 보여 준다. 이것은 나머지를 묻는 것이 아니고, 몫의 분수부분을 묻는 것이 된다. 묻는 맥락의 변화나 식의 전개의 변화가 필요한 부분이다.

III. 기초 연구

1. 자연수와 분수의 곱셈 상황

가. 자연수의 곱셈

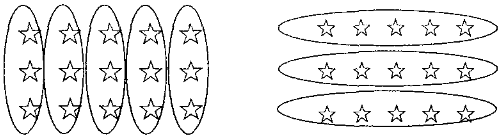
1) 피승수와 승수의 역할의 차이

자연수에서의 곱셈의 장면이 (수량)×(횟수)라고 할 때, 횟수로 쓰이는 수는 여러 가지의 모습을 갖는다. 예를 들어 보면 "1m에 3kg이 나가는 쇠파이프가 있다. 4m의 쇠파이프의 무게는 얼마인가?"라는 상황에서의 식은 3×4=12이다. 이 때 3은 무게를 의미하고 4는 길이를 의미한다. 하지만 이 문제의 상황은 무게를 물으므로 길이인 4m는 3kg이 4번 있다는 횟수를 의미한다. 이와 같이 수량의 역할이 횟수로 쓰이는 경우에는 그 수의 기능을 그 수의 원래의 기능인 수량의 역할을 하는 것이 아닌 횟수로서의 기능을 하는 것이 된다. 이는 마치 형용사가 주어의 역할을 할 수도 있고, 목적어의 역할을 할 수도 있고, 서술어의 역할을 할 수도 있는 것과 마찬가지인 것이다.

2) 형식화 되는 곱셈

7차 교육과정에서는 곱셈의 계열은 2-가 단계에서 곱셈을 도입하여 2-나 단계에서 곱셈구구를 익힌다. 2학년 단계에서 피승수와 승수를

맥락화를 통하여 구별하며 배운 곱셈은 4-가 단계의 (네 자리수)×(두 자리수)까지 매학기 배우면서 곱셈을 형식화한다. 즉, '$a \times b = b \times a$'이라는 곱셈의 교환법칙을 다양한 예를 통해 익힌다. 예를 들면, 3×5를 계산할 때, 3×5=5×3이 성립함을 [그림 Ⅲ-1]에서와 같은 활동을 통하여 익히는 것이다.



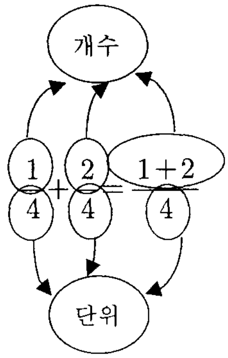
3×5=15　　　　5×3=15

[그림 Ⅲ-1] 곱셈의 교환성을 나타내는 그림

이렇게 자연수의 곱셈에서 피승수와 승수의 구별이 없이 형식화된 학생들에게 정수와 분수의 곱셈에서 맥락화를 시도하려 할 때, 다시 피승수와 승수를 구별할 수 있는 맥락의 지도가 이루어져야 확장된 수개념에서의 연산의 상황을 이해할 수 있다.

나. 자연수와 분수의 곱셈 상황의 차이

곱셈에서의 차이를 살펴보기 전에 덧셈과 뺄셈에서의 차이를 살펴보면 자연수에서의 덧셈과 뺄셈은 그 단위가 '1'인 수들의 연산이다. 그러나 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 그 단위가 분모에 따라 다르다는 것을 알 수 있다. 동분모의 두 분수의 덧셈과 뺄셈에서는 분모는 그대로 두고 분자끼리 더하는 것은 분모가 그 단위를 나타내기 때문이다. 예를 들면, $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}$로 동분모의 덧셈에 있어서 분모인 4는 그냥 두고 분자인 1과 2를 더하는 이유는, 분모가 나타내는 $\frac{1}{4}$은 그 수량의 단위이고 분자는 그 단위의 개수를 의미하므로 분자만 계산한 후 그 단위를 붙이게 된다.



[그림 Ⅲ-2] 동분모 분수의 덧셈 알고리즘

이분모분수의 덧셈과 뺄셈에 있어서 먼저 통분을 하는 이유도 단위가 다른 두 수의 덧셈을 할 수 없으므로 단위를 같게 한 후, 덧셈이나 뺄셈을 하는 것이다. 이분모분수들의 대소의 비교에 있어서도 통분을 한 후 비교를 하는 것도 마찬가지 이유에서이다.

분수의 곱셈에서 승수가 분수인 경우는 승수인 '연산자(演算者)' 때문에 그 단위의 변화가 일어날 수 있다. 연산자로 사용되는 어떤 양의 $\frac{a}{b}$는 그 대상을 동등하게 b조각으로 가르고, 그 중에서 a조각을 취하는 조작이다. 가르는 것은 '분석 조작'이고, 취하는 것은 '종합 조작'이다. 이러한 '분석 조작'으로 일어나는 단위의 변화는 자연수의 곱셈에서는 일어나지 않는 것으로 '분모만큼 등분한 후 분자만큼 취한다'는 연산자의 역할에서 분모만큼 등분할 때, 피승수인 분수의 분모가 나타내는 단위가 더 작게 쪼개어지면서 나타나게 된다. 따라서 분수의 곱셈에서의 맥락은 이와 같은 단위의 변화를 제시할 수 있는 맥락이어야 한다.

2. 자연수와 분수의 나눗셈 상황

가. 자연수의 나눗셈

1) 제수의 차이에 따른 나눗셈의 두 가지 상황

일상생활에서 나눗셈이 이루어지는 경우에는 두 가지 상황이 있다. 하나는 등분제이고 다른

하나는 포함제이다. 등분제의 경우는 똑같이 나누어 주었을 때 몫이 얼마인가를 묻는 상황이다. 예를 들면 '귤 15개를 3사람에게 똑같이 나누어 주었을 때 1사람이 몇 개씩 가지게 되는가?'라는 문제 상황은 1사람의 몫(1묶음의 양)을 묻는 것이다. 포함제는 양의 크기를 일정한 단위로 측정하였을 때 얼마나 되는가를 묻는 상황이다. 예를 들면 '귤 15개를 1사람에게 5개씩 나누어 주면 몇 사람에게 줄 수 있는가?'라는 문제 상황은 귤 15개를 5개의 단위로 재면 얼마나 되는지 측정 결과(묶음의 수)를 묻는 것이다. 두 상황의 의미는 다르지만 어느 경우에나 나눗셈으로 통합된다. 이러한 두 가지의 상황의 차이는 제수에 따라 분류할 수도 있다.

등분제 : $a \times b = c \;\Rightarrow\; c \div b = a$ …①

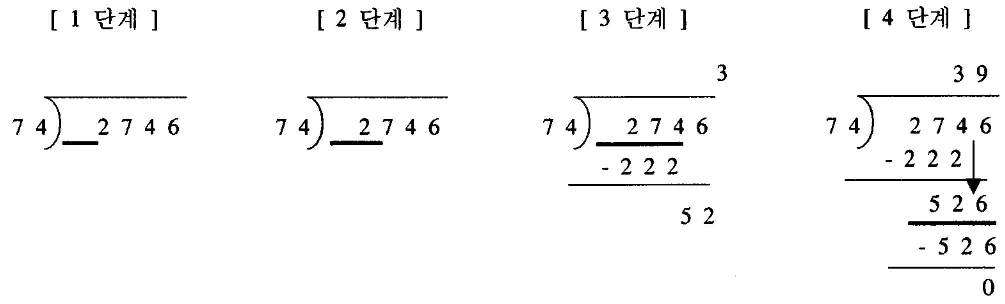
포함제 : $a \times b = c \;\Rightarrow\; c \div a = b$ …②

등분제인 ①식에서의 제수인 b는 피젯수인 c와는 다른 종류의 수량이다. 앞의 예에서 살펴보면 b는 사람의 수를 의미하고, c는 귤의 개수를 의미한다. 포함제인 ②식에서의 제수인 a는 피젯수인 c와 같은 종류의 수량이다. 앞의 예에서 살펴보면 둘 다 귤의 개수를 의미한다. 이렇게 제수의 차이에 따라 나눗셈의 두 가지 상황을 구분할 수도 있다.

2) 상황에 관계없는 나눗셈의 계산

나눗셈이 등분제에 의한 것이든 포함제에 의한 것이든 학생들은 나눗셈이면 장제법으로 풀어서 답을 낸다. 만약에 나머지를 구하라는 문제이면 몫을 제시된 자릿수까지 구하고 남은 부분을 나머지로 제시한다. 하지만 장제법의 각 단계별 과정을 이해시키기 위한 활동을 할 때는 등분제의 상황으로 설명하는 것이 일반적이다. 예를 들어 2746÷74의 계산을 장제법으로 해결한다고 할 때 다음과 같은 과정을 거친다.

먼저 [1 단계]에서 천의 자리가 2개 있으므로 74명에게 나누어 줄 수 없다. 그래서 [2 단계]에서 천의 자리 2개를 백의 자리로 바꾸고 백이 20개가 되고, 원래 있던 백의 자리 7개와 합쳐서 백의 자리가 27개가 되었으나 역시 74명에게 나누어 줄 수 없다. [3 단계]에서 백의 자리 27개를 십의 자리로 바꾸어 270개로 만들고, 원래 있던 십의 자리 4개와 합쳐서 274개의 십의 자리로 74명에게 나누어 줬더니 한 명에게 십의 자리가 3개씩 나누어줄 수 있었다. 그리고 십의 자리가 52개가 남아 이것을 [4 단계]에서 일의 자리로 바꾸어 원래 있던 일의 자리 6개와 합쳐서 526개의 일의 자리로 74명에게 나누어 주었더니 한 명에게 일의 자리가 9개씩 나누어 줄 수 있었다. 따라서 한 명이 가진 양은 39개가 되었다.



[그림 Ⅲ-3] 장제법 알고리즘의 단계별 상황

이 문제가 '2746개의 귤을 1상자에 74개씩 넣으면 몇 개의 상자에 넣을 수 있는가?'라는 포함제의 상황이라도 그 계산은 이와 같은 장제법으로 한다. 그러나 이 알고리즘은 포함제 상황의 각 단계에서의 활동이 맞지 않으나, 포함제의 나눗셈도 모든 학생이 장제법의 알고리즘으로 계산하여 답을 구한다. 계산을 하여 답을 구할 때에는 두 상황의 차이에 따른 구분은 의미가 없이 자연수의 나눗셈이 형식화된 것이다.

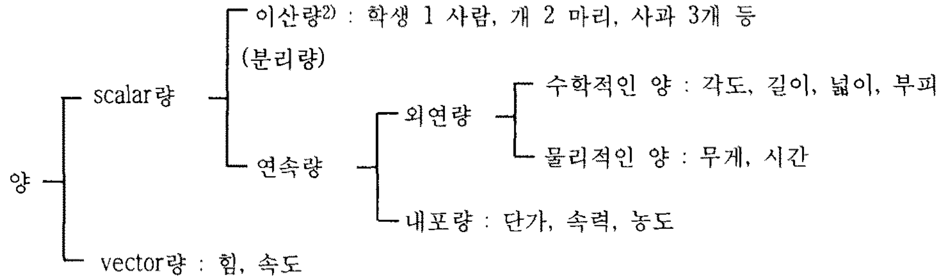
나. 자연수와 분수의 나눗셈 상황의 차이

분수의 나눗셈의 상황이 자연수의 나눗셈의 상황과 차이를 보이는 것은 분수 나눗셈의 몫이 이산량인지 연속량인지에 따라 몫의 처리가 다르고, 몫이 연속량일 경우에는 등분제인지 포함제인지에 따라 연산 알고리즘의 진행이 다르다. 따라서 먼저 이산량과 연속량에 대한 정리가 되어야 한다.

양이란 어떤 사물의 무게, 부피, 수량 등의 많고 적음과 크고 작은 정도를 나타내는 것으로 일반적으로 이산량과 연속량으로 분류된다. 이산량은 더 이상 분할할 수 없는 양으로서 독립된 개체의 수를 나타내는 양을 뜻하고, 연속량은 얼마든지 분할 가능한 양으로 길이 넓이, 부피, 무게, 시간, 각도, 속력, 농도, 밀도 등이 있다. 양을 서성보(2000)는 아래와 같이 분류하고 있다.

자연수의 곱셈과 나눗셈에서 수가 어떤 양(量)을 나타낼 때, 그 양은 이산량(분리량)이 될 수도 있고, 연속량이 될 수도 있다. 곱셈에서는 곱의 결과가 항상 자연수로 나오므로 양의 종류가 무엇인지 문제가 되지 않으나, 나눗셈에서는 몫이 반드시 자연수로 나타나는 것이 아니므로 몫으로 나타내는 양은 구분을 하여야 한다. (자연수)÷(자연수)에서 그 몫이 이산량이면 그 속성상 자연수로밖에 나타낼 수 없기 때문에 나머지가 나타날 수 있으며, 그 몫이 연속량이면 분수의 형태로 나타낼 수 있다. 이는 분수가 발생하게 된 근원으로 그 나눗셈이 등분제이든 포함제이든 $a \div b = \frac{a}{b}$로 나타내면 된다.

그러나 분수의 나눗셈에서는 (분수)÷(분수)에서 그 몫이 이산량인지 연속량인지에 따라 몫의 처리에 차이가 있다. 몫이 이산량이면 이산량의 특성상 그 몫을 자연수로밖에 나타낼 수 없는데 분수의 나눗셈에서 나머지가 남는다는 것이 유리수체에서의 나눗셈이라는 입장에서 보면 문제가 있고, 그 나머지가 분수로 표현된다는 것이 나머지를 정의하는 정수론적으로



[그림 III-4] 양의 분류(서성보, 2000, p. 336)

2) 서성보(2000)는 분리량이라는 용어를 사용하고 있으나 일반적으로 이산량이라는 용어를 더 많이 사용하므로 본 논문에서는 이산량이라는 용어를 사용하기로 함.

문제가 있다. 두 입장이 서로 모순되는 상황에서 '그 몫을 어떻게 처리할 것인가?'하는 것이 자연수의 나눗셈과는 다른 차이이다.

몫이 연속량일 경우에는 그 몫을 분수로 처리하므로 나머지의 문제는 없으나 등분제의 상황과 포함제의 상황이 연산 알고리즘의 진행에 있어서 차이를 보인다. 이는 자연수의 나눗셈에서 등분제와 포함제에 관계없이 장제법으로 계산하는 것과 다른 점이다.

이와 같이 분수의 나눗셈의 상황을 <표 Ⅲ-1>과 같이 구분해서 다루어야 한다.

위의 <표 Ⅲ-1>에서 등분제의 경우에는 몫인 양이 연속량밖에 될 수 없는 이유는 등분제가 피젯수와 몫이 같은 양을 뜻하기 때문이다.

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ 의 나눗셈의 식이 등분제의 원리에서 나온 나눗셈식이면 $\frac{a}{b}$와 $\frac{e}{f}$가 같은 종류의 양이다. 피젯수가 $\frac{a}{b}$인 분수로 표현되었다는 것은 그와 같은 종류의 양인 나눗셈의 몫도 분수인 $\frac{e}{f}$로 표현될 수 있는 양이이므로, 그 양은 연속량이다.

Ⅳ. 분수의 곱셈과 나눗셈의 맥락화

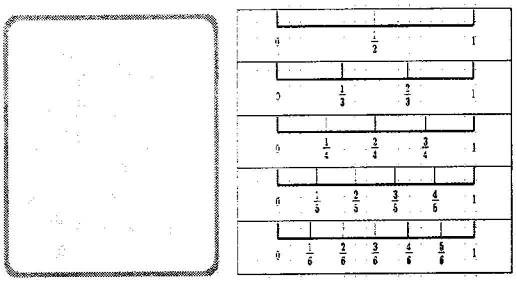
1. 분수의 곱셈의 맥락화

분수의 곱셈을 설명하려고 하면 앞에서 그와 관련된 지식이 무엇이 있었나를 점검을 해 주고 그 지식에 연관시켜 주는 수업을 해야 학생들의 두뇌 속에서 연산 지식에 대한 관계망이 형성되어 그 적용과 확산 적용이 용이해진다. 따라서 '자연수의 곱셈은 어떤 의미였고, 분수의 덧셈은 어떤 의미였는데 분수의 곱셈은 이런 의미이다'라는 설명이 필수적인 것이다. 이러한 설명에는 분수의 곱셈 알고리즘의 전개 과정을 포함한, 학생들이 공감할 수 있는 현실적 상황이 첨가 되어져야 하는데, 이러한 현실적 상황이 '맥락'이다. 그리고 그 '맥락'을 설정하는 것이 '맥락화'이다.

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$를 수업을 한다고 할 때 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$를 설명하기에 앞서서 $\frac{3}{4} \times 2$와 $3 \times \frac{2}{5}$의 설명이 먼저 이루어져야 한다.

◎ 분수의 곱셈 · 나눗셈 모델: '동물원의 식빵 간식'

동물원에서는 여러 동물들의 간식으로 많은 양소가 골고루 들어간 식빵을 특별히 만들어 제공하고 있었다. 그리고 동물원을 관람하러 온 아이들에게 간식을 직접 주게 하는 행사를



[그림Ⅳ-1] 빵 분할용 자와 동물원 식빵

<표 Ⅲ-1> 분수 나눗셈 상황의 분류

나눗셈의 상황	몫인 양(量)의 종류	나머지의 발생 유무
포함제	이산량	○
	연속량	×
등분제	연속량	×

하였다. 사육사들은 식빵을 동물들이 먹기 좋도록 잘라 놓았다. 그리고 아이들로 하여금 얼룩말에게는 $\frac{1}{2}$, 양에게는 $\frac{1}{3}$, 염소에게는 $\frac{1}{4}$, 토끼에게는 $\frac{1}{5}$, 이구아나에게는 $\frac{1}{6}$의 크기의 도막을 먹이도록 안내하였다.

① '동물원의 식빵 간식' 모델에서 $\frac{3}{4}\times 2$의 문제 상황은 다음과 같이 제시할 수 있다.

"염소에게 간식을 주기 위해 2명의 아이가 $\frac{1}{4}$크기의 조각을 각각 3개씩 가지고 갔다. 이 때 아이들이 가져간 식빵의 양은 얼마인가?"

이 상황에서 가지고 간 식빵의 양을 계산하도록 하면, 아이들의 눈에는 3조각씩 2번 가져간 것이 되므로 먼저 '3×2'를 통해 6도막을 계산한 후, 그것이 $\frac{1}{4}$크기의 도막임을 생각해서 $\frac{6}{4}$이라고 대답할 것이다.

이는 $\frac{3}{4}$을 두 번 더하는 것과 같다. 결국 승수인 2가 자연수이므로 이러한 경우 승수는 횟수의 의미를 가지게 됨을 쉽게 알 수 있다. 이를 동수누가의 측면에서 살펴보면 그 계산은 다음과 같다.

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3+3}{4}=\frac{3\times 2}{4}$$

A　　B

이 연산의 상황에서 A단계는 분모인 4의 경우 두 분수들의 단위가 $\frac{1}{4}$을 의미하는 것이므로 그 단위의 개수를 뜻하는 분자끼리의 계산을 하면 된다. 다음의 B단계는 같은 수인 3을 2번 더하므로 3×2의 곱셈식이 된다. 이와 같이 동분모분수의 덧셈에서 분모끼리 더해지지 않는 이유는 분모가 단위의 의미를 가지는 수이기 때문이다.

② '동물원의 식빵 간식' 모델에서 $3\times\frac{2}{5}$의 문제 상황은 다음과 같이 제시할 수 있다.

"사육사가 토끼에게 먹이를 주기 위해서 온 아이들에게 식빵 3조각의 $\frac{2}{5}$만큼을 주었다. 이 때 아이들에게 준 식빵의 양은 얼마인가?"

이 경우 사육사는 3조각의 식빵을 모두 5등분한 후, 2도막씩 아이들에게 나누어 줄 것이다. 이처럼 5등분할 때, 식빵 1도막의 단위는 $\frac{1}{5}$이 되고 그런 단위가 3개씩 2부분을 취하는 것이므로 모두 6개의 도막이 된다.

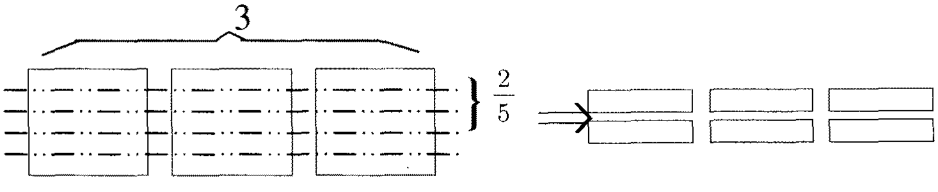
이와 같이 $3\times\frac{2}{5}$의 계산은 [그림 Ⅳ-2]에서와 같이 3을 5등분하여 2부분을 취하는 양만큼이라는 조작적인 경험을 제공하면 된다. 이 때 단위가 1인 양이 세 개 있는 상황에서 5등분을 할 때, 그 수의 단위가 $\frac{1}{5}$로 바뀌게 됨을 강조하여야 한다.

그리고 $3\times\frac{2}{5}$의 계산 알고리즘의 진행은 다음과 같다.

$$3\times\frac{2}{5}=(3\div 5)\times 2=\frac{3}{5}\times 2=\frac{3\times 2}{5}$$

A　　B　C

이러한 연산 상황에서 A단계는 연산자로 쓰인 분수의 분모가 피승수를 분모만큼 등분할



[그림 Ⅳ-2] (자연수)×(분수)의 모형

하는 것이다. 다음의 B단계는 등분할되면서 원래의 피승수인 수량의 단위를 바꾼다. 이 때, 피승수가 연산자로 쓰인 분수의 분모의 배수이면 단위의 바뀜이 없이 그냥 피승수의 단위로 묶음이 나누어질 수도 있다. 마지막 C단계는 바뀐 단위의 도막수의 계산이다. 결국 (자연수)×(분수)의 계산에서도 그 자연수는 분수의 분자에 곱해지는 알고리즘을 얻을 수 있다.

③ '동물원의 식빵 간식' 모델에서 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$의 문제 상황의 제시는 다음과 같다.

"$\frac{1}{4}$크기의 조각을 3개 가져간 아이가 빵 분할용 자로 잘라서 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$만큼 염소에게 주는 것이다. 이때 '염소에게 준 빵의 양은 얼마인가?"

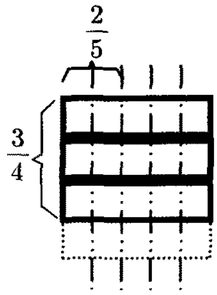
이 상황에서 [그림 Ⅳ-3]과 같이 아이에게 보이는 것은 $\frac{1}{4}$이 단위인 3도막의 빵이고(만약 아이들이 단위를 인식하지 못할 경우, 교사는 아이들에게 단위를 인식시켜 줄 필요가 있다), 그것을 5등분할 때 단위가 $\frac{1}{20}$로 바뀌게 된다. 그 중에서 2부분을 취하면서 '3×2'를 통해 6도막을 계산한 후, 그것이 $\frac{1}{20}$크기의 도막임을 생각해서 $\frac{6}{20}$이라고 대답할 것이다.

이 양의 계산은 다음과 같다.

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=(\frac{3}{4}\div 5)\times 2=\frac{3}{20}\times 2=\frac{6}{20}$$

A B C

이 연산의 전개에서 A단계는 연산자로 쓰인 분수의 분모가 피승수를 분모만큼 등분할 하는 것이다. 다음의 B단계는 등분할되면서 원래의



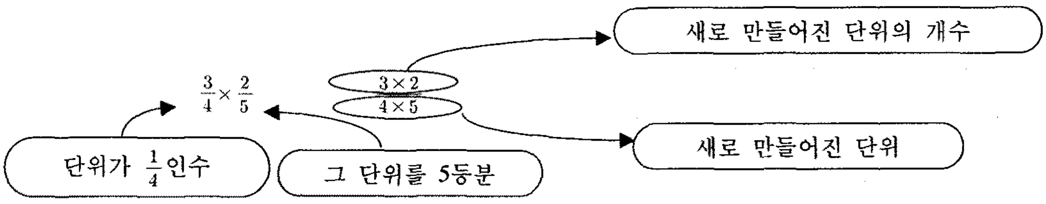
[그림 Ⅳ-3] (분수)×(분수)의 모형

피승수인 수량 $\frac{3}{4}$의 단위인 $\frac{1}{4}$을 $\frac{1}{20}$이 단위인 수로 바꾼다. C단계는 앞의 ① 에서와 마찬가지로 분자의 동수누가 상황이다. 즉, 바뀐 단위인 $\frac{1}{20}$의 도막수의 계산이다.

이 때 주의할 것은 $\frac{3}{4}$은 어떤 양을 뜻하는 수량적인 개념의 수이고, $\frac{2}{5}$는 연산자로서의 의미를 갖는 수라는 것이다. 따라서 원래의 수(피승수)의 단위는 $\frac{1}{4}$이었는데 이를 5등분하면서 그 단위가 $\frac{1}{20}$로 바뀌게 된다. 또한 [그림 Ⅳ-3]에서와 같이 3도막을 각각 5등분하여 2부분을 취하므로 그 도막의 개수는 3×2인 6개가 된다. 따라서 분수의 곱셈은 그 알고리즘이 다음의 [그림 Ⅳ-4]와 같고, 분모의 곱의 의미는 새로운 단위를 뜻한다. 이 때 분자의 곱의 의미는 그 새로운 단위의 개수를 의미한다.

2. 분수의 나눗셈의 맥락화

현재의 분수의 나눗셈에 대한 상황은 앞의 3장에서 밝힌 바와 같이 '포함제', '등분제', '단위



[그림 Ⅳ-4] 분수의 곱셈 알고리즘

비율의 결정', '곱셈의 역', '카테시안의 곱의 역'으로 크게 다섯 가지로 나누고 있다. 그러나, '단위 비율의 결정', '곱셈의 역', '카테시안의 곱의 역'의 상황은 따로 구분하지 않아도 되는데, 그 이유는 다음과 같다.

단위 비율의 결정이라고 하는 것은 불특정한 분수로 주어진 값을 기본 단위에 해당하는 값으로 환산한 양을 구하는 경우인데, '무게가 $1\frac{3}{4}$kg인 철봉의 길이를 재어 보았더니 $\frac{1}{2}$m이었다. 이 철봉 1m의 무게는 몇 kg인가?'와 같은 문제가 그 예가 된다. 이 상황에서 수치만 자연수로 바꾸면 그 상황은 등분제의 상황이 되는 것이다. 예를 들어 '12kg인 철봉의 길이가 4m였다. 철봉 1m의 무게는 몇 kg인가?'에서 역연산인 곱셈의 상황으로 보면, '1m에 3kg의 무게를 가진 철봉을 4m만큼의 무게를 재었다. 그 무게는 얼마인가?'라는 상황인데, 3kg이 4번 더해지는 경우이므로 여기서의 4m는 길이로서의 역할이 아닌 더하는 횟수로서의 역할을 하고 있다. 다시 말하면 3kg의 묶음의 수의 역할을 한다. 따라서 나눗셈의 상황은 '12kg의 철봉을 4부분(묶음)으로 나누면 한 부분(묶음)의 무게는 얼마인가?'와 같은 상황이 되는 것이므로 등분제라고 할 수 있는 것이다.

곱셈의 역이라고 하는 것은 곱셈의 역이 등분제와 포함제의 두 가지 경우뿐이므로 그 두 가지의 상황에 맞는 경우로 생각을 하면 되므로 따로 생각할 필요가 없다.

카테시안의 곱 상황은 양과 양의 곱, 차원과 차원의 곱이며, 이에 대한 예로서 직사각형의 넓이를 구하는 상황을 들 수 있다. 이는 가로의 길이가 6cm이고 세로의 길이가 4cm인 직사각형의 넓이를 구하는 상황에서 6cm×4cm=24cm^2으로 생각하는 것으로, 직사각형의 넓이를 처음 접하고 있는 초등학생들에게는 6cm^2×4줄=24cm^2의 해석이 학습하기에 용이하다. 그러므로 양과 양의 곱, 차원과 차원의 곱은 동수누가의 상황으로 해석하는 것이 옳다. 따라서 경우의 수에서 사건의 가짓수가 분수로 나올 수는 없으므로 분수의 나눗셈에서 카테시안의 곱의 역상황을 생각할 필요가 없는 것이다.

따라서 분수의 나눗셈은 크게 '포함제'와 '등분제'의 2가지 경우로 나눌 수가 있다.

가. 포함제

(분수)÷(분수)의 포함제는 문제에 제시된 피젯수와 제수가 같은 종류의 양이다. 예를 들어 $\frac{6}{8}\div\frac{2}{8}$의 경우를 맥락으로 제시하면 아래와 같다.

"피자 한 판을 8등분하여 2도막은 먹고, 6도막이 남아 있다. 남아 있는 피자를 2도막씩 접시에 담으려면 몇 개의 접시가 필요한가?"

이 때, $\frac{6}{8}\div\frac{2}{8}=3$의 계산식이 성립이 된다. 나눗셈의 몫이 자연수 3이라서가 아니라, 끄집어내어야 할 접시의 개수를 의미하므로 몫은 이산량을 나타내는 수가 적혀져야 한다. 만약 피젯수가 $\frac{7}{8}$이었다면 근삿값의 처리에서 올림을 하든지 버림을 하든지 하여 꺼내는 접시의 개수는 3개 또는 4개가 되어야지 접시를 $3\frac{1}{2}$개 꺼낸다는 것은 적절한 해답이 될 수 없다.

따라서 포함제의 경우에는 그 몫이 이산량인지 연속량인지에 따라 나누어 생각할 필요가 있다. 이산량인 경우에는 몫은 항상 자연수로 나와야 하고 나머지가 남을 계산식이면 나머지를 다루어야 한다. 또한 이산량으로 취급되어야 하는 맥락임을 분명히 밝혀서 학생들이 몫을 분수로 처리하는 경우가 없도록 해야 한다.

1) 남은 양[3]이 있는 나눗셈(몫이 이산량일 경우)

3) 수학에서 나머지는 정수환에서 정의되는 것이지 유리수체에서는 언급될 수 없는 것이다. 교과서처럼 나머지라고 표현하고 있는 것은 재고되어야 한다.

남은 양이 있는 나눗셈의 경우를 동분모 분수와 이분모 분수의 경우를 나누어 생각해 보자.

① '동물원의 식빵 간식' 모델에서 $\frac{5}{6}\div\frac{2}{6}$의 맥락은 다음과 같이 제시할 수 있다.

> "이구아나에게 간식으로 주기 위해서 한 아이가 $\frac{5}{6}$만큼의 식빵을 가지고 갔다. 이구아나는 한 번의 간식으로 $\frac{2}{6}$만큼의 식빵을 먹여야 충분한 간식거리가 된다고 한다. 가져간 식빵으로 몇 마리의 이구아나에게 충분히 간식거리를 먹일 수 있는가? 그리고 남은 식빵의 양은 얼마인가.?"

이 상황에서 먼저 충분한 간식을 먹일 수 있는 이구아나의 마리수를 구해야 하고, 다음으로 식빵이 남는다면 남은 식빵의 양을 구해야 한다.

사육사가 준 식빵 도막은 이구아나를 위해 만든 크기가 $\frac{1}{6}$인 도막이다. 그것을 이구아나에게 먹이므로 아이는 도막의 크기에 대한 생각은 하지 않고 도막의 개수로만 식을 생각하면 된다. 따라서 5도막으로 2도막씩 먹이면 2마리의 이구아나에게 충분한 간식을 제공한 것이고, 남은 1도막은 그 크기가 $\frac{1}{6}$이었으므로 남은 양은 $\frac{1}{6}$인 것이다.

그리고 그 계산의 알고리즘의 진행은 아래와 같다.

(경우 1)

묶음 수

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} \Rightarrow 5 \div 2 = 2 \cdots 1$$

단위가 $\frac{1}{6}$인 수

$$\therefore \text{ 몫 : 2, 남은 양 : } \frac{1}{6}$$

위 알고리즘의 진행에서 등호가 아닌 화살표 (⇒)의 표기에 주의해야 한다. 앞에서 언급한 바와 같이 남은 양이 있는 나눗셈의 상황인 7차 교육과정의 교과서에서의 상황과 비교를 하여 보자.

활동 1에서의 진술의 일부분이다.

> "길이가 $\frac{5}{6}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 자르면 □ 도막이 되고, 나머지는 $\frac{2}{6}$m에 대하여 □입니다' 의 서술에서 자르면 몇 도막이 되는지 알아 보시오."

활동 2에서 진술의 일부분이다.

> "활동 1에서 $\frac{5}{6}\div\frac{2}{6}=5\div 2$ 입니다.
> 그런데 $5\div 2=\frac{5}{2}$이므로 $\frac{5}{6}\div\frac{2}{6}=\frac{5}{2}$입니다."

이 부분에서의 문제점은 활동 1에서 남은 양을 묻고 있는데 활동 2에서 그 나눗셈의 계산의 진행을 명시하면서도 남은 양을 생각하는 풀이 방법이 아닌 몫을 분수의 형태로 처리하고 있다는 점이다.

남은 양으로 처리한다면 그 식의 진행은 아래와 같이 될 수 있는데 (경우 2)와 (경우 3) 두 가지 모두 식의 전개에 문제점을 안고 있다.

(경우 2)

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = 5 \div 2 = 2 \cdots \frac{1}{6}$$

단위가 $\frac{1}{6}$인 수

$$\therefore \text{ 몫 : 2, 남은 양 : } \frac{1}{6}$$

이 식의 전개에서는 $5\div 2 = 2 \cdots \frac{1}{6}$의 부분이 성립하지 않는다. 검산식에서 $2\times 2+\frac{1}{6}=5$가 성립하지 않기 때문이다.

(경우 3)

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = 5 \div 2 = \overset{\text{묶음 수}}{2} \cdots 1$$

단위가 $\frac{1}{6}$인 수

이 식의 전개에서는 $5 \div 2 = 2 \cdots 1$의 부분이 성립하나, 중간의 $5 \div 2$를 제외해 버린다면 $\frac{5}{6} \div \frac{2}{6} = 2 \cdots 1$의 부분이 성립하지 않는다. 역시 검산식에서 $\frac{2}{6} \times 2 + 1 = \frac{5}{6}$이 성립하지 않기 때문이다.

현실적 맥락에서 남은 양이 생기는 나눗셈을 이야기 하면서 수식의 전개가 문제가 있다고 해서 몫의 처리를 나머지가 없는 분수로 처리하는 것과 남은 양을 처리하면서 등호를 사용하여 형식적인 면은 충족되지만, 식의 전개에 문제가 있는 (경우 2)와 (경우 3)을 사용하는 것과 화살표를 사용하여 수식의 전개상의 형식적인 면은 부족하지만 식의 전개와 맥락과 식의 전개가 일치하는 (경우 1)의 선택에 있어서 본 연구자는 (경우 1)의 선택이 현실적 수학교육에서 강조하는 맥락을 활용한 수학교육에 더 일치한다고 본다. 또한 교과서의 문제에 대한 풀이과정을 남은 양의 처리에 있어서 몫의 분수부분을 묻는 것이 아닌 정상적인 물음이 되려면 '남은 양은 몇 m입니까?'로 제시하여야 한다.

이분모분수의 나눗셈에서도 마찬가지의 생각이다.

'한 개의 제품을 만드는데 $\frac{2}{5}$kg의 원료가 쓰인다. 현재 $\frac{7}{8}$kg의 원료가 있다면 몇 개의 제품을 만들 수 있는가?'라는 맥락에서 생각을 해보자. 일단 수식은 $\frac{7}{8} \div \frac{2}{5}$가 될 것이다. 그리고 두 분수의 분모가 다르므로 단위가 다른 상태로 해석을 하여 단위를 같게 해 주기 위해서 $\frac{7}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} \div \frac{8 \times 2}{8 \times 5}$로 통분을 한다. 이렇게 해서 단위가 같아지면 그 단위의 개수로 다음과 같은 계산을 하면 된다.

이 식에서도 35와 16은 그 단위가 $\frac{1}{40}$이라는 사실을 염두에 두어야 한다. 또한 그 나눗셈의 결과인 몫은 만들어진 제품의 개수로서 이산량이 되므로 자연수로 구해져야 하고 남은 양이 있다면 남아야 하는 것이다. 따라서 남은 양은 $\frac{1}{40}$이 3 도막이 남았으므로 $\frac{3}{40}$이 되는 것이다.

2. 남은 양이 없는 나눗셈(몫이 연속량일 경우)

Sinicrope 등(1991)은 카테시안 곱의 역 상황으로 직사각형의 한 변의 길이와 넓이가 제시되었을 때, 다른 한 변의 넓이를 구하는 맥락을 제시하고 있다.

"한 변은 길이가 $\frac{2}{5}$cm이고, 넓이가 $\frac{6}{20}\,cm^2$인 직사각형의 다른 한 변의 길이는 얼마인가?"

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} \div \frac{8 \times 2}{8 \times 5} \Rightarrow (7 \times 5) \div (8 \times 2) = 35 \div 16 = \overset{\text{묶음 수}}{2} \cdots 3$$

단위가 $\frac{1}{40}$인 수

이는 두 변의 길이가 3cm, 4cm인 직사각형의 넓이를 구할 때의 상황을 카테시안의 곱 상황으로 해석한 결과인데 이 경우의 식의 전개가 $4cm^2 \times 3줄 = 12cm^2$이라는 측면에서 본다면 곱셈의 상황은 동수누가의 상황이고, 이의 역상황이므로 '넓이가 $12cm^2$인 직사각형에 단위 넓이가 $4cm^2$인 줄이 몇 줄 있는가?'의 나눗셈과 마찬가지 유형으로 보아서 포함제로 생각할 수 있다. 그리고 그 계산의 알고리즘의 진행은 아래와 같다.

$$\frac{6}{20} \div \frac{2}{5} = \frac{6}{20} \div \frac{4 \times 2}{4 \times 5} = \underbrace{6 \div (4 \times 2) = 6 \div 8}_{\text{단위가 } \frac{1}{20}\text{인 수}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

식의 전개 중의 $6 \div (4 \times 2)$에서 6과 (4×2)는 그 단위가 $\frac{1}{20}$임에 유의해야 한다. 이와 같이 연속량의 나눗셈에서는 그 맥락을 연속량이 인정될 수 있는 다음과 같은 맥락으로 설정할 수 있다.

◎ 방앗간의 떡시루

설날을 맞아 방앗간에 많은 사람들이 떡을 찌러 왔다. 그런데 떡을 찌려고 가져온 쌀의 양은 제각각이었다. 그리고 떡시루들의 모양과 크기는 두 가지로 대형 떡시루 한 개에 담을 수 있는 쌀의 양이 $\frac{6}{5}$kg이었고, 소형 떡시루 한 개에는 담을 수 있는 쌀의 양은 $\frac{2}{5}$kg이었다.

위의 방앗간의 떡시루의 맥락에서 $\frac{7}{8} \div \frac{2}{5}$의 나눗셈 맥락을 생각해 보면 '한 개의 떡시루에 $\frac{2}{5}$kg의 쌀을 담을 수 있다. $\frac{7}{8}$kg의 쌀을 찌려면 얼마만큼의 떡시루에 쌀이 채워지는가?'와 같은 맥락으로 제시할 수 있다. 그리고 다음과 같은 수식이 전개 된다.

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} \div \frac{8 \times 2}{8 \times 5} = \underbrace{(7 \times 5) \div (8 \times 2) = 35 \div 16}_{\text{단위가 } \frac{1}{40}\text{인 수}} = \frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}$$

이 경우의 식의 전개를 분수의 나눗셈은 역수의 곱셈으로 한다는 알고리즘을 적용하기 위한 식으로 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} \div \frac{8 \times 2}{8 \times 5} = \underbrace{(7 \times 5) \div (8 \times 2)}_{\text{단위가 } \frac{1}{40}\text{인 수}} = \frac{7 \times 5}{8 \times 2} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}$$

나. 등분제

박교식 등(2004)은 '등분'이라는 말은 나누는 수가 자연수인 경우에는 잘 어울리지만 나누는 수가 분수인 경우에는 잘 어울리지 않는다는 이유로 분수로 나누는 경우의 적절한 문장제는 만들 수 없을 것이라고 하였다. 이것은 '등분'이라는 용어로 인하여 몇 명의 사람에게 나누어 주는 상황으로 한정지어 생기는 문제이다. 나눗셈에서의 '등분'이 일어나는 상황이 어떤 수량을 몇 개의 묶음으로 나눌 때 한 묶음의 수량임을 생각해 본다면, 등분제의 상황을 생각할 수가 있다.

등분제 상황의 자연수끼리의 나눗셈을 먼저 생각해 본다면 12÷3=4에서 적절한 상황으로 이산량의 현실적 맥락은 '12개의 빵을 3개의 접시에 똑같이 나누어 담는다면 1개의 접시에는 몇 개의 빵을 놓아야 하나?', '12자루의 연필을 3명에게 똑같이 나누어 준다면 한 사람에게 몇 자루의 연필을 주어야 하나?'등이 될 것이다. 이런 맥락으로 분수의 나눗셈에 적용하려면 이산량이기 때문에 그 상황의 부자연스러움 때문에 힘들다. 연속량으로의 모델은 '떡을 만들기 위해 12kg의 쌀을 찌려고 떡시루에 넣었더니 3개의 떡시루에 골고루 채워졌다. 1개의 떡시루에 담긴 쌀의 무게는 몇 kg인가?', '12L의 페인트로 3개의 모형물에 채색이 되었다. 한 개의 모형물에 채색한 페인트의 양은 몇 L인가?'등을 들 수 있을 것이다. 분수의 나눗셈은 이러한 연속량으로의 나눗셈이 적합하므로 이 두

상황에 대한 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$의 적당한 예를 다음과 같이 들 수 있다. '떡을 만들기 위해 $\frac{4}{5}$kg의 쌀을 찌려고 떡시루에 넣었더니 떡시루의 한 개의 $\frac{2}{3}$만큼 채워졌다. 1개의 떡시루에 담길 수 있는 쌀의 무게는 몇 kg인가?', ' $\frac{4}{5}$L의 페인트로 모형물에 채색을 했더니 모형물의 한 개의 $\frac{2}{3}$만큼 채색되었다. 한 개의 모형물을 채색하기 위해서 필요한 페인트의 양은 얼마인가?'

$\frac{4}{5}$kg의 쌀이 떡시루의 한 개의 $\frac{2}{3}$만큼 채워진 상황을 그림으로 나타내어 한 개의 떡시루에 채울 수 있는 쌀의 양을 생각해 보면 아래와 같다.

한 개의 떡시루에 쌀을 가득 채우려면 떡시루 $\frac{2}{3}$개의 $\frac{3}{2}$배가 필요하므로 한 개의 떡시루에 들어갈 쌀의 양은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = 1\frac{1}{5}$$

$$\therefore 1\frac{1}{5}(\text{kg})$$

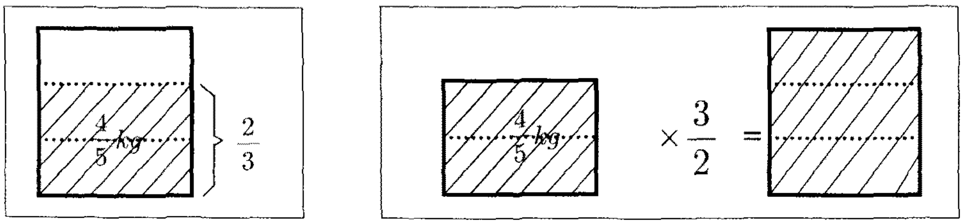
이와 같이 등분제의 알고리즘(등분제)은 제수의 역수의 곱셈으로 바로 바뀐다. 교과서에서의 설명처럼 포함제(포함제)의 알고리즘과 같이 동분모분수로의 전환이 일어나지 않고 바로 역수의 곱셈으로의 전환이 일어나는 것이다.

분수의 나눗셈에서의 포함제와 등분제는 앞에서 살펴본 바와 같이 그 맥락에 따라 나눗셈식의 상황과 몫의 표현에 있어서 <표 Ⅳ-1>과 같은 성질을 보인다.

또한 각각의 맥락은 그 알고리즘의 전개가 다르며 이는 자연수의 나눗셈 알고리즘에서 분수의 나눗셈 알고리즘으로 형식화하는 과정에서 [그림 Ⅳ-6]과 같은 분절된 단계를 나타낸다.

과정①, ②는 자연수의 포함제에서 분수의 포함제인 1단계와 2단계로 변화되는 과정이다.

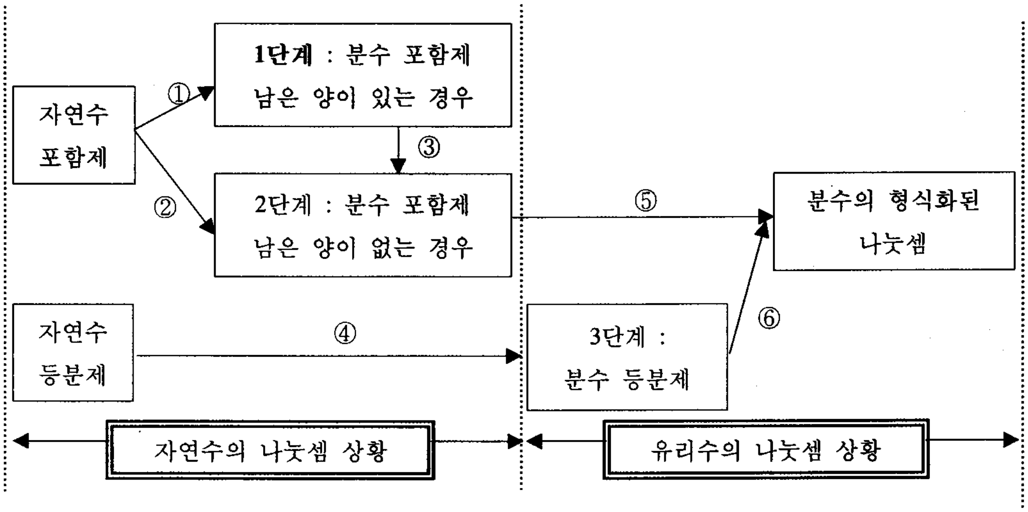
1단계에서 그 식의 형태는 분수의 나눗셈이지만, 실질적인 연산 상황은 단위가 분수인 자연수의 연산인 단계로서 남은 양의 처리에 있어서 자연수와 그 방법이 같다. 단지 남은 양의



[그림 Ⅳ-5] 수량을 구하는 분수 나눗셈의 모형

<표 Ⅳ-1> 분수 나눗셈의 맥락의 성질

<table>
<tr><th rowspan="3">구분</th><th rowspan="3">자연수의 나눗셈</th><th colspan="3">분수의 나눗셈의 맥락</th><th rowspan="3">분수의 형식화된 나눗셈</th></tr>
<tr><th colspan="2">포함제</th><th rowspan="2">등분제</th></tr>
<tr><th>남은 양이 있는 경우</th><th>남은 양이 없는 경우</th></tr>
<tr><td>나눗셈식의 상황</td><td>자연수의 나눗셈</td><td colspan="2">단위가 분수인 자연수의 나눗셈</td><td colspan="2">유리수의 나눗셈</td></tr>
<tr><td>몫의 표현</td><td colspan="2">자연수</td><td colspan="3">분수</td></tr>
</table>



[그림 Ⅳ-6] 분수 나눗셈 알고리즘의 형식화 단계

표현이 그 단위인 분수임을 감안하여 분수로 나타나는 표현이다. 과정③은 남은 양을 없게 하는 2단계로 변화되는 과정이다.

2단계에서는 분모를 같게 한 후, 그 단위가 같아지면 분자로 계산하여 자연수의 나눗셈 상황인 점은 1단계와 같으나, 몫이 연속량을 나타내는 경우이므로 몫을 처리하는 과정에서 분수의 형태로 몫을 취하게 하는 단계이다. 과정④는 자연수의 등분제에서 3단계인 분수의 등분제로 변화되는 과정이다.

3단계에서는 몇 등분이라는 자연수의 상황에서 '양의 의미의 분수로'라는 분수의 상황으로의 변화를 유도하는 단계이다. 과정⑤는 남은 양이 없는 포함제 맥락의 계산 알고리즘이 조금 복잡하지만 분수 나눗셈의 형식화로 변하는 과정이고, 과정⑥은 등분제의 식의 전개가 분수 나눗셈의 형식화된 알고리즘으로 바로 변하는 과정이다. 이와 같이 분수 나눗셈의 각각의 맥락은 자연수의 나눗셈 알고리즘에서 분수의 나눗셈 알고리즘으로 형식화되는 단계를 나타낸다.

Ⅴ. 결론 및 제언

분수의 개념 및 연산 알고리즘의 유의미한 이해는 수학의 활용과 학습에 있어서 매우 유용하며 중요한 부분이다. 자연수에서의 연산 상황과 알고리즘의 전개가 분수로 확장됨에 따라 그 복잡성이 더해지면서 교사와 학생들 모두에게 힘든 과제가 되고 있다. 이에 본 연구에서는 자연수와 분수의 곱셈과 나눗셈의 연산 상황의 차이는 무엇인지를 살펴보고, 그 차이에 따라 연산 학습을 위한 단계적인 맥락을 제시하고자 하였다. 또한 분수의 곱셈과 나눗셈에서도 그 차이에 따라 상황을 분류하고 각각의 상황에 적합한 알고리즘을 형식화를 위해 단계적으로 제시하고 하였다.

자연수에서 분수로의 수의 영역이 확장됨에 따라 곱셈과 나눗셈의 현실적 맥락의 변화에서 분수의 곱셈에서는 피승수와 승수의 역할의 차이에 따른 분석조작과 종합조작의 조작적 경험의 제공과 연산자에 의한 피승수의 단위의

변화에 대한 인식이 필요하다. 즉, 승수의 역할이 연산자로서의 역할을 한다는 것을 강조하여야 한다는 것이다. 승수인 분수가 곱해지는 순간 그 분모의 역할로 피승수인 분수의 단위에 변화가 온다는 사실과 분자들의 곱은 새로운 단위의 개수를 의미한다는 분수 곱셈 알고리즘의 유의미적인 해석을 가능해진다.

분수의 나눗셈에서는 나눗셈의 몫이 어떤 양인가에 대한 구별이 없이 '포함제', '등분제', '단위 비율 결정', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'으로 분수의 나눗셈을 분류해온 것들에 대하여 자연수에서의 분류를 확장시켜 포함제와 등분제로 구분한 뒤 포함제는 그 몫을 뜻하는 수의 성질에 따라 몫이 이산량이면 남은 양이 있어야 하는 나눗셈으로, 몫이 연속량이면 남은 양이 없어야 하는 나눗셈으로 구분될 필요가 있다. 등분제의 알고리즘은 포함제의 알고리즘의 전개와는 다르게, 알고리즘의 진행에서 분수로 나누는 바로 다음 단계에서 역수의 곱셈으로 전환되는 것을 보였다. 또한 포함제의 맥락밖에 제시 못 했던 것을 등분제의 맥락도 같이 제시하였고, 포함제에서의 나머지의 처리 방법에 대한 오류의 지적과 아울러 그 개선책을 제시하였다.

분수의 곱셈 · 나눗셈의 맥락화에서 형식화로의 효과적인 이행을 위하여 첫째, 분수 곱셈의 맥락화에서 형식화로의 연결은 단위의 변화에 대한 강조이다. 이는 승수가 연산자의 기능을 하는 분수임에 대한 인식의 재고로서 자연수의 곱셈의 교환법칙이 형식화되어 있는 학생들에게 피승수와 승수의 역할을 재인식시킴으로써 분수의 곱셈의 상황을 분모의 곱과 분자의 곱이 각각 바뀌게 되는 단위와 그런 단위의 개수라고 분석적으로 설명을 하였다. 이는 형식화된 곱셈으로 분수의 곱셈을 처리하는 학생들이 분수의 덧셈과 뺄셈과의 연산알고리즘의 차이를 맥락으로 단위의 변화가 일어난다는 것을 밝혀주는 것이다.

둘째, 분수 나눗셈의 맥락화에서 형식화로의 연결은 자연수의 나눗셈 알고리즘에서 분수 나눗셈의 형식화되는 알고리즘으로의 연결이 3단계로 일어나고 있음을 알 수 있었다. 1단계인 남은 양이 있는 포함제의 경우는 몫이 이산량인 경우로, 단위가 분수인 자연수의 나눗셈과 그 연산 상황이 같고 남은 양의 처리도 자연수에서의 나머지의 처리와 흡사했다. 단지, 정수론적 입장에서의 나머지의 정의에 반하여, 분수를 나머지라는 용어로 사용하기엔 수학적으로 문제가 있어서 '남은 양'이라는 용어를 사용하여 나타내었다. 2단계인 남은 양이 없는 포함제의 경우는 몫이 연속량인 경우로 1단계와 나눗셈을 하는 과정은 같으나 나누어떨어지지 않는 경우의 처리가 1단계와는 달리 남은 양을 남기지 않고 분수의 꼴로 몫을 나타내었다. 이 단계가 지금까지 분수의 나눗셈을 계산하는 알고리즘으로 널리 알려진 단계로서 형식화하는 과정이 조금 복잡하여 분수의 나눗셈을 어렵게 만드는 원인이 된 단계이다. 3단계인 등분제의 단계는 분수의 나눗셈을 역수의 곱셈으로 바로 형식화할 수 있는 단계로 알고리즘의 전개는 나눗셈식의 알고리즘의 형식화와 일치함을 알 수 있었다.

이는 그동안의 분수의 나눗셈이 복잡하게 분류되어 다루어지던 것을 자연수의 나눗셈에서 바로 연결 지어 형식화에 이르는 과정을 3단계로 설명한 것이다. 또한 분수의 나눗셈의 실제적 상황에서 나머지를 수학적으로 미숙하게 처리하던 것을 수식이 맥락의 제시와 차이가 없이 제시될 수 있다는 것을 보였다.

본 연구의 전체 내용은 분수의 곱셈은 초등학교의 '5-가'에서, 분수의 나눗셈은 '5-나'와 '6-나'에서 다루어진다. 2개 학년에 걸쳐서 교

수-학습이 이루어지는 내용을 적용 분석하기엔 어려움이 있었다. 이에 본 연구를 바탕으로 분수의 곱셈과 나눗셈에서도 실제 적용한 결과에 대한 분석과 보완이 필요할 것으로 생각한다.

참고문헌

교육인적자원부(2002). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

김민경(2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. **학교수학** 5(2), 223-240. 대한수학교육학회

민인영(2003). **분수의 나눗셈에서 나타나는 오류 분석**. 부산교육대학교 대학원 석사학위논문.

박교식 · 송상헌 · 임재훈(2004). 우리나라 예비초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구. **학교수학** 6(3), 235-248. 대한수학교육학회

박성택(2006). **수학 학습 심리와 교수-학습 전략**. 서울: 경문사

백선수(2002). 초등수학교실에서 알고리즘 지도 방안 탐색: **청람수학교육**, 10, 153-171. 한국수학교육학회

백선수(2004). **비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

백선수 · 김원경(2005). 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화 사례 연구. **학교수학**. 7(2). 대한수학교육학회

서관석 · 전경순(2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 관한 연구: 교사교육적 관점. **수학교육학연구** 10(1), 103-113. 대한수학교육학회

서성보(2000). **수학 및 수학교육 용어 사전**. 서울: 교문사.

오승아(2000). **알고리즘 지도 방향에 관한 연구. 서울대학교 석사학위 논문.**

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호(2001). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

이종욱(2005). **분수에 대한 교사 지식의 변화에 관한 연구**. 한국교원대학교 박사학위 논문.

장경윤(1996). 컴퓨터와 수학, **수학교육**. 대한수학교육학회 논문집 6(1). 대한수학교육학회

Reys, R. E.; Suydam, M. N.; Limdquist, M. M.; Smith, N. L. (1999). **초등수학학습지도의 이해**(강완 외, 역). 양서원. (원저 1998 출판)

Alexander, N. (1997). Extending Meaning of Multiplication and Division of Rational Numbers. The Annual Meeting of the Louisiana Education Research Association.

Brownell, W (2004) "The place of meaning in the teaching of arithmetic". In Thomas P. Carpenter, John A. Dossey, and Julie L. Koehler(Ed). *Classic in Mathematics Education Research*. NCTM.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Golding, T. (1994). The effects of the unit concept on prospective elementary teachers' understanding of rational number concepts. (Doctoral dissertation, Louisiana State University.) *Dissertation Abstracts International. Vol. 55,* no.11, 3439A, Order#DA9508570.

Gravemeijer, K., & Galen, F. van. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter

(Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 114-122).* Reston, VA: NCTM.

Kamii, C. (1999). Teaching Fractions: Fostering Children''s Own Reasoning. In L. V. Stiff (Ed.), *developing mathematical reasoning in grades K-12:1999* NCTM Yearbook (pp.82-92). NCTM: Reston.

Kieren, T. A. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Canpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational number: An integration of research.*(pp49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey(Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp. 89-120). Albany NY: SUNY Press.

Mack, N. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal know-ledge. In T. P. Canpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational number: An integration of research.*(pp. 85-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Maurer, S. B. (1998). What is an algorithm? What is an answer? In L. J. Morrow & M. J. Kenney(Eds.), *The teaching and learning of algorithm in school mathematics*, (pp. 21-31). Reston, VA: National Council of Teachers Mathematics. Inc.

Sinicrope, R., Mick, H. W. & Kolb, J. R. (2002). Fraction division interpretations. *Making sense of fractions, ratios, and proportions. 2002 yearbook,* 153-161.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 yearbook* (pp. 7-20). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

van Hiele, P. M. (1985). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.

Teaching Multiplication & Division of Fractions through Contextualization

Kim, MyungWoon (Bumin Elementary School)
Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

This dissertation is aimed to investigate the reason why a contextualization is needed to help the meaningful teaching-learning concerning multiplications and divisions of fractions, the way to make the contextualization possible, and the methods which enable us to use it effectively. For this reason, this study intends to examine the differences of situations multiplying or dividing of fractions comparing to that of natural numbers, to recognize the changes in units by contextualization of multiplication of fractions, the context is set which helps to understand the role of operator that is a multiplier.

As for the contextualization of division of fractions, the measurement division would have the left quantity if the quotient is discrete quantity, while the quotient of the measurement division should be presented as fractions if it is continuous quantity. The context of partitive division is connected with partitive division of natural number and 3 effective learning steps of formalization from division of natural number to division of fraction are presented. This research is expected to help teachers and students to acquire meaningful algorithm in the process of teaching and learning.

* key words : multiplication of fractions(분수의 곱셈), division of fractions(분수의 나눗셈), contextualization(맥락화), algorithm(알고리즘), teaching operations(연산 지도)

논문접수 : 2009. 10. 27
논문수정 : 2009. 12. 2
심사완료 : 2009. 12. 14