대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No4, 707-722 Dec. 2009

인류학적 방법에 입각한 수열의 극한 교수에 대하여

김 부 윤* · 정 경 미**

이 논문에서는 최근 유럽, 특히 프랑스에서 많은 연구자들에 의해 고려되어지고 있는 수학 교육의 다양한 이론들을 소개한다. 그 중에서도 Chevallard (1985;1992;1998)에 의해 논의되었던 교수학의 인류학적 이론(The Antro -pological Theory of the Didactic)[1]에 대해 간단히 소개한 다음, 이것에 의해 제안된 인식론적 모델인 인간행동학(Praxeology)[2]에 대해 논의한다. 또한 교수학에 인류학을 도입해야 하는 필요성과 이 이론이 어떻게 교수학적 변환 과정을 통하여 발전되었는지 그 배경과 교수학의 인류학적 이론의 기본 요소들을 제시된다. 마지막으로 '수열의 극한' 교수에 대한 문제를 이 이론에 근거하여 분석한다.

Ⅰ. 서 론

최근 프랑스를 중심으로 활동하는 수학교육 유럽공동체(ECME ; The European Community in Mathematics Education)에서는 다수의 수학교육 연구자들이 다양한 이론들, 연구 패러다임 그리고 이론적 틀의 광범위한 다양성에 대해 끊임없이 연구해오고 있다.

이러한 변화의 틀에 발맞추어 교사는 항상 잘 가르치고 있느냐는 질문에 대해 끝없는 자기반성과 함께 새로운 이론에 대한 지식이 필요하게 되며, Brousseau(1997)가 제시했던 극단적 교수현상에 대한 극복이 시급한 과제라는 것은 부인하지 못한다. 이에 따라 학문적 지식과 가르칠 지식 사이의 교수학적 변환 과정에 대한 체계적인 연구가 필요하다.

특히 수학 지식 중 '극한'은 근사, 연속, 미적분 이론의 기초로서 해석학의 모든 분야에서 아주 중요한 개념이다. 극한 개념의 교수 · 학습에서 가장 어려운 문제는 극한의 의미가 풍부하고, 복잡할 뿐만 아니라 수학적 정의만으로는 인지적 국면을 이끌어 낼 수 없다는데 있다(Tall, 2003).

따라서 본 연구자는 먼저 수학교육의 다양한 최근 이론들과 수학교수학에 왜 인류학적 이론이 도입되어야 하는지에 대해 간단히 소개하고, 그 중에서도 Chevallard(1985)의 교수학적 변환론의 발전 형태인 교수학의 인류학적 이론(The Antropological Theory of the Didactic)[3]과 ATD 이론 안에서 인간의 수학적 활동을 설명하는 인간행동학(Praxeology)에 대하여 논의한다.

그 후에 현행 교육과정과 교과서에 나타나

* 부산대학교
** 부산대학교 대학원 (jgmbada@hanmir.com)

1) 교수학의 인류학적 이론(ATD)이 지니는 의미를 파악해 보면 "The teaching method adaptable to naturally developing of human being thinking"에 더 가깝다.
2) 이 용어의 해석은 '도입 및 연습'에 더 가깝다.
3) 이하 ATD라 한다.

있는 '수열의 극한'에 대한 문제점을 분석하여, 학생들이 '극한'에 대한 개념을 자연스럽게 받아들일 수 있는 교수 방법을 제시한다.

이를 위하여 제Ⅱ장에서는 최근 유럽, 특히 프랑스를 중심으로 연구되고 있는 수학교육의 다양한 이론들을 소개하고, 이러한 새로운 동향에 맞추어 왜 수학교수학에 인류학적 이론이 도입되어야 하는가에 대해 살펴본다. 제Ⅲ장에서는 수학교수학의 인류학적 이론이 무엇이고, 그것의 인식론적 모델인 인간행동학은 무엇인지에 대해 알아본다. 그리고 제Ⅳ장에서는 Chevallard의 연구들(1985; 1992; 1998)과 일치하는 수학교수학의 인류학적 이론의 기본 요소들을 소개한다. 마지막으로 제Ⅴ장에서는 '수열의 극한' 교수에 있어서 '참조 수학 지식'과 '가르칠 수학 지식'에 집중하여 ATD로 분석한 후, 교수 방법을 제안한다.

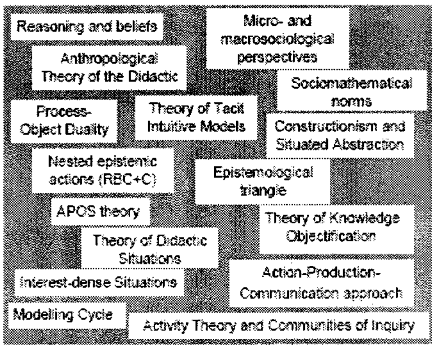
본 연구의 목적은 새로운 수학교육 이론의 접근(특히 ATD와 그것의 인식론적 모델인 인간행동학)을 통하여 수열의 극한에 대한 교수 실제에 유용한 자료를 제공하고, 각 교사의 전문성 향상을 위한 패러다임의 전환 기반을 조성하는데 있다.

Ⅱ. 수학교수학에 인류학적 접근의 필요성

1. The Proceeding of CERME 5; Working Group 11[4]

2007년 사이프러스(Cyprus)에서 열린 CERME (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education) 5의 Working Group 11에서는 수학교육 유럽공동체가 다루었던 여러 가지 다양한 이론들, 연구 패러다임 그리고 이론적 틀의 광범위한 다양성에 대하여 15개국 총 30명의 연구자들이 16개의 다양한 이론적 틀 구조에 관한 18편의 논문들이 발표되었다 (Arzarello, Bosch, Lenfant & Prediger, 2007). 16가지의 다양한 이론적 틀은 [그림Ⅱ-1]과 같다.

그림 출처(Arazarello et al., 2007)



[그림 Ⅱ-1] Working Group 11에서 나타난 다양한 이론적 틀

이론적 틀의 광범위한 다양성은 이미 기존의 이론적 틀이나 서로 다른 전통방식을 따르는 많은 연구자들에 의해 이론이라 불리는 것의 이질성으로부터 시작된다. 이 다양성은 의사소통의 문제, 경험적 결과의 통합 문제, 과학적 진보의 문제 등과 같은 여러 가지 이유들로 공동체에 대한 도전을 나타낸다.

이러한 양상은 이론적 틀 구조의 다양성이 다른 이론적 틀 구조를 가진 연구자들 사이에서 의사소통에 대한 문제와 수학 공동체에 대한 도전이라는 것을 보여준다고 할지라도, 수학 교수・학습의 복잡성을 다루기 위해 이론적 틀 구조의 다양성이 절대적으로 필요하다고 여기기 때문에, 모든 이론적 틀 구조의 점진적인 통합은 이루어지지 않는다.

4) CERME 5의 여러 Working Group 중에 Working Group 11의 지난 2년간에 걸친 연구 과정의 토론을 정리한 논문(Arzarello, Bosch, Lenfant & Prediger, 2007)을 참고하였다.

2. 프랑스의 수학교육 연구: 세 가지 이론을 중심으로

'수학교수학'은 프랑스 연구 공동체가 1970년대 중반 이후부터 수학의 연구를 위해 이론에 대한 것을 지속적으로 다루고 있는 분야로, 여기서 다루는 프랑스 '수학교수학'에서 생겨난 세 가지 이론은 Laborde(2007)가 분류한 Vergnaud의 '개념장 이론(Theory of Conceptual Fields)'과 Brousseau의 '교수학적 상황론(Theory of Didactic Situation)', 그리고 Chevallard의 '교수학의 인류학적 이론(ATD)'이다.

Vergnaud(1994)는 학생들의 수학적 개념에 대한 앎을 모델링하는 것은 수학 문제들이 그 개념들과 관련되어 있다고 여길 때만 의미를 가진다고 하였고, 학생들의 지식을 모델링하는 것은 문제와 학생 사이의 상호작용을 모델링하는 것이라고 하였다. 또한 그는 학생들의 지식과 그들의 학습 과정의 상태를 모델링하는 것은 학습하기 위한 수학적 내용이 수학 문제의 하위 집합에 관련되어 있을 때만 할 수 있다고 하였다.

Vergnaud는 너무 작은 단위로 학습 과정을 분석하는 것은 학생들의 수학 지식이 어떻게 되어 있는가에 대해 설명하는 것을 방해할 것이고, 결국은 지식의 구성에 대해 국소적인 모델을 만들어낸다고 하였다. 또한 수학 문제에 대해 너무 큰 하위 문제를 고려하는 것은 대상들의 수학적 특수성을 놓치면서 전체적인 분석을 하는 것과 같다고 주장하였다.

Brousseau(1997)의 교수학적 상황론의 기본 가정은 어떤 상황 아래에서 구성되고 활용되는 지식은 이러한 상황이라는 제약에 의해 정의된다는 것이며, 그래서 어떠한 인위적 제약을 만들어냄으로써 교사는 학생들이 이러한 유형의 지식을 구성하도록 자극해야 한다고 하였다.

학생들이 직면하는 문제들과의 관계에서 볼 때, Brousseau의 교수학적 상황론의 초점은 학생들의 개념화에 있는 것이 아니라, 특별한 지식의 조작을 학습하도록 하는 상황에 있다. 그러나 지식이란 그것이 거부하는 상황과 이전 선택에서 나오는 합리성으로부터 의미를 가지기 때문에, 문제와 관련된 수학에서 개념이 가져오는 합리성은 상황 개념이 이런 측면에서 제한될 수밖에 없다고 하더라도 Brosseau가 발전시킨 상황 개념 뒤에 숨어 있는 첫 번째 추진력이다.

개념장 이론에서는 그 초점이 학생들의 개념화의 탐색 방법으로서 학생과 문제 사이의 상호작용이었던 반면, 교수학적 상황론에서는 수학 지식의 기능과 상황 사이의 관계에 초점을 맞추고 있다. Vergnaud의 연구에서 나타난 문제의 개념은 교수학적 상황론에서 상황의 개념에 대응하며, 그것은 깊이 이론화되어 있다.

Chevallard(1992; 1998)에 의해 프랑스에서 발전된 또 다른 이론인 'ATD'는 오히려 수학 그 자체에서 교수 체계의 기능을 분석하기 위한 것이다.

이 ATD는 교수학적 변환론의 발전에 대한 자연스러운 결과로 나타났다. 수학적 활동이 단지 개념 체계의 구성, 언어의 사용, 인식의 과정으로서 간주되는 대신에, 수학적 활동은 다양한 어떤 것들 사이에서 일어나는 인간 활동으로 해석되어져야 한다고 말한다. ATD는 연구 대상으로서, 제도적으로 생각되어지는 수학 활동을 받아들이고 있다. 따라서 수학 지식과 수학적 활동을 설명하기 위해 수학 지식의 생산과 보급뿐만 아니라, 어떤 종류의 인식론적 모델이 사용되어지고 있는가를 명백하게 상술해야 한다.

Laborde(2007)에 따르면, 위의 접근 방식들을 기초로 한 모든 모델들의 공통 특징은 수학 내

용의 사용을 모델화하고 있다는 점이다. 문제를 해결하는 동안 학습자에 의한 사용(개념장 이론), 상황의 특징과 주어진 수학 내용 사이의 합리적 관계(교수학적 상황론), 제도와 이 제도 내에서 과제를 해결하는 계산 기술의 종합화(technology) 사이의 관계(인간행동학적 접근)가 그것이다.

이러한 접근법들은 수학 개념의 의미를 두 부분(한편으로는 다소 형식화된 이론으로 다루고, 다른 한편으로는 실제와 관련된 다양한 상황에서 개념들을 사용하는 방식)으로 구성함에 따라 '거대한 인식론적 가정'에 기초하고 있다는 것이다.

3. 수학교수학의 새로운 접근

독일의 'Mathematikdidaktik'와 유사한 프랑스식 명명 'didactique des mathématiques(수학교수학)'은 그것이 영어에서 가지는 의미를 가지지 않고, 수학 교수와 학습 과정에 대한 특별한 과학적 접근법을 내포하고 있다. 수학교수학에서 인류학적으로 접근한다는 것, 혹은 인류학적 이론이라는 것은 이미 존재하는 이론이나 다른 가능한 접근들에서는 인류학적이라는 형용사가 어울리지 않거나 사용되지 않았기 때문에 다소 생소할 수 있다.

인류학(anthropology)은 이론을 매우 중시하는 학문이며, 또한 이론과 실천이 밀접하게 관련된 분야이기도 하다(Barnard, 2003).

인류학은 인간의 모든 측면에 대해서 이해하고자 한다는 점에서 '인간의 과학'이라고 불리기도 하고, 인간이 만들어낸 문화를 주된 연구 대상으로 삼는다는 점에서 '문화학'이라 불리기도 한다(이용숙, 2005). 즉 인류학은 인간을 연구하는 학문이라 할 수 있다.

또한 이전의 수학교수학의 개념과는 다른 새로운 수학교수학의 개념이 연구와 연구에 대한 조력에 관련되는 모든 곳에서 나타나는데, 결국 수학교수학은 연구와 수학 연구에 대한 조력의 과학이라는 개념이다. 이러한 변화에 맞추어 인간 행동의 모든 활동을 대상으로 하는 인류학을 수학의 모든 활동으로 폭넓게 받아들이려는 Chevallard(1992; 1998)의 의도가 수학교수학의 인류학적 이론으로 발전된 것이다.

III. 수학교수학의 인류학적 이론과 인간행동학

1. 수학교수학의 인류학적 이론

Sierpinska & Lerman(1996)은 인식론의 연구 대상이 과학적 지식의 산물이라는 전통적인 관점에서 볼 때Chevallard의 '교수학의 인류학적 이론'은 생산의 메카니즘뿐만 아니라 과학적 지식의 이용, 응용과 관련한 실제, 과학적 지식의 교수, 그리고 그것의 변환에 전념하도록 가정되어 있기 때문에 인식론의 확장이라고 하였다.

말하자면, 다양한 유형의 제도들(institutions)(수학공동체, 학교, 학습공동체 등)에서 매우 잘 작용하기 위한 특별한 측면을 만드는 지식을 다루는 것이라고 할 수 있다. 인식론에 대한 Chevallard의 확장된 이해를 받아들인다면, 수학 교수·학습 현상에 대한 연구는 수학 지식의 인류학적 부분이 되거나 또는 이렇게 확장된 의미에서 인식론의 부분이 된다.

인식론적 프로그램 안에서 학교에서 수행되는 수학적 활동은 교육제도 안에서 수학의 재구성과 관련된 현상들을 설명해야만 적절히 해석될 수 있다. 따라서 우리는 이러한 현상이 시작되는 곳, 즉 수학 지식을 만들어내는 제도들을 연구할 필요가 있는데, 이것이 바로 교수

학적 변환론의 첫 번째 기여물이며, 따라서 ATD는 Chevallard의 교수학적 변환론의 발전에 대한 자연스러운 결과이다.

Chevallard가 시작한 교수학적 변환의 개념(1985; 1992)은 인식론적 구성주의와 첨예하게 구별되는 수학적 지식에 대하여 다소 암묵적인 가정들을 만들었다.

이러한 인류학적 접근법의 가정을 크게 두 가지로 나누어 보면, 첫 번째, '연구 방법' 즉, 모든 과제의 완성 혹은 모든 문제의 해결이 계산 기술의 존재를(비록 이 계산 기술이 다른 사람에게, 그리고 심지어 자기 자신에게 조차도 설명하거나 보여주기가 어려울 수 있다고 할지라도) 필요로 한다는 가정이다. 두 번째, 인간의 실제가 광범위한 환경 없이 좀처럼 존재하지 않는다는 것이고, 인류학적 가정의 목적은 행해진 일을 묘사하고 설명하고 정당화하는 것이다.

Chevallard는 수학적 활동들이 단지 개념들의 체계의 구성, 언어의 사용, 인지의 과정으로 간주되는 대신에, 사람들 사이에서 나타나는 모든 인간 활동으로서 해석되어져야(즉, 모델화되어져야) 한다고 말했다.

ATD는 인간행동학 또는 수학적 지식의 조직화(Mathematical Organisation[5] : 이하 MO)라는 말로 수학적 활동을 설명하고, 교사를 학생들이 수행하는 교수학적 과정의 지도자로 생각한다. 이때 교수학적 과정은 여섯 가지 차원 혹은 교수학적 국면들을 따라 구조화된 하나의 과정이다.

또한 ATD는 연구의 중요한 대상으로서 제도적으로 생각되어지는 수학적 활동을 받아들인다. 그래서 수학적 지식의 생산과 전파를 포함하면서 수학적 지식과 수학적 활동을 설명하기 위해 어떤 종류의 일반적 모델이 사용되어지고 있는가를 명백하게 상술해야 한다.

Chevallard는 "모든 지식은 제도의 지식이다." 라고 가정하였다. 수학에서 전문적 연구는 하나의 제도이고, 학교, 가족, 기업 또한 다른 제도들이다. 수학은 이러한 각 제도들 속에서 살아갈 수 있지만, 그것은 응용을 통해 다른 수학이 된다. '지식'보다는 사회적 실제들과 제도들에 초점을 맞춤으로서 그는 그의 이론을 인류학적 차원으로 확장하였다.

2. ATD의 인식론적 모델인 인간행동학

인류학적 이론은 수학 지식체(mathe -matical bodies of knowledge)가 수학적 실제와 분리될 수 없기 때문에, 수학 지식뿐만 아니라 수학적 실제 그 자체를 모델링하기 위해 시간이 지남에 따라 진화해왔다. 그것은 크게 보면 모든 인간의 행동을 모델링하는 인간행동학이라는 개념을 생성했다.

인간행동학은 크게 두 가지로 나누어 생각해 볼 수 있는데, 첫 번째는 ATD에 의해 제공된 일반적인 인식론적 모델은 수학적 인간행동학(혹은 수학적 지식의 조직화)이라는 용어로 수학적 지식을 설명한다. 두 번째는 수학적 실제를 모델화하기 하기 위한 인간행동학의 사용은 모든 종류의 인간 활동으로 확장될 수 있는데, 특히 문제를 연구하는 과정과 새로운 수학적 인간행동학 혹은(활동의 주체를 위해) 다른 사람들이 수학적 실제를 모델화할 수 있도록 도와주는 과정으로 확장할 수 있는데, 이것을 교수학적 인간행동학(혹은 교수학적 조직화)이라고 한다. 결국 수학적 인간행동학은 'what'에 대한, 교수학적 인간행동학은 'how'에 대한 이야기이다.

또한 모든 인간행동학은 문제들의 유형(types

5) 이는 mathematics organizing에 더 가까우며, 결국 수학화와 같은 맥락으로 볼 수 있다.

of problems)과 계산 기술(technics)로 구성된 연습 및 심화과정(practical block 혹은 know-how)과 계산 기술의 종합화와 이론화의(techno-logical- theoretical) 환경에 의해 형성된 이론화 과정(theoretical block 혹은 knowledge)을 가진다(Bolea, Bosch & Gascón, 1999; Chevallard, 1992, 1998; Bergsten & Grevholm, 2005; Bosch, Chevallard & Gascón, 2005; Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005; García & Haugueras, 2006).

Ⅳ. 교수학의 인류학적 이론의 기본 요소

1. 수학 지식의 조직화

가. 수학 활동의 분리할 수 없는 두 가지 측면

수학 활동의 인류학적 모델의 기본 요소들은 문제들의 유형과 계산 기술로 이루어진 연습 및 심화과정과 계산 기술의 종합화와 이론화로 이루어진 이론화 과정으로 이루어져 있다. 이를 '수열의 극한'에 대하여 분석하여 보면, 문제의 유형들로는 수열의 극한값 계산하기, 극한의 존재를 증명하기, 수열의 극한의 개념을 정의하기, 증명의 타당성을 점검하기 등이 있으며, 이러한 문제들을 풀기 위해 사용되는 계산 기술로는 수열의 극한값을 구하기 위한 계산 기술, 증명하기 위한 기술, 정의를 말하는 기술 등이 있으며, 몇몇 계산 기술들은 알고리즘적인 특징을 가지는 반면, 다수는 그렇지 않다.

사용된 계산 기술에 직접적으로 관련되어 있는 계산 기술의 종합화에는 $\epsilon - N$ 정의, 극한의 대수적 성질 등이 있으며, 이러한 계산 기술의 종합화의 요소들은 이론에 의해 의미를 갖고 정당화될 수 있다.

마지막으로 실제의 정당화에 대한 더 깊은 수준을 구성하는 이론은 문제들, 계산 기술, 계산 기술의 종합화를 발견하고 입증하고 생성하기 위해 개념들, 특성들, 관계들의 틀을 제공하기 위한 것이다.

결국 어떠한 '수학적 지식의 조각'이라도 특정 유형의 수학 문제들과 계산 기술들이 포함되어야 하고, 특정한 유형의 설명과 정당화가 문제들을 푸는 방법에 주어지기보다는 진술을 통해서 설명되어야 한다. 예를 들어 우리가 살펴볼 가르칠 지식으로서 '수열의 극한'은 고등학교와 같은 구체적인 제도에서 봤을 때, 연습 및 심화과정은 수열의 극한값의 계산 같은 문제들과, 이 문제들을 풀기 위해 필요한 다양한 계산 기술들을 포함한다. 이러한 실제들을 동반하는 이론화 과정은 수열의 극한, 극한에 관한 기본성질과 정의, 그리고 일반적 진술을 포함한다.

나. 수학 지식의 조직화의 종류

기본적인 인간행동학(수학 지식의 조직화)이 주어진 제도 속에서 문제의 유일한 유형으로 생각되어진다면, 기본적(punctual)이라 한다. 예를 들어, 고등학교 수준에서 '$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 수열의 극한을 계산하여라.', '수열의 극한의 존재를 입증하여라.' 등은 기본적 MO의 기원이 될 수 있다.

기본적 MO들 모두가 같은 계산 기술의 종합화의 담화를 사용해서 설명되고, 기본적 MO들의 특정한 집합의 통합에 의해 얻어질 때, 그것의 계산 기술의 종합화에 의해 특징 지워진 국소적 MO(a local MO)를 가졌다고 말할 수 있다.

위에서 언급된 기본적 MO는 '극한값의 계산법(algebra of limits)'의 계산 기술의 종합화로 수열의 극한의 계산을 둘러싼 국소적 MO로 통합될 수 있지만, 그것은 그 계산 기술들을 설명하고 정당화하는데 사용된 계산 기술의 종합화에도 의존하며, 또한 서로 다른 기본적 MO

들이 또 다른 하나의 국소적 MO에 통합될 수도 있다.

같은 이론적 담화를 받아들이는 수많은 국소적 MO들의 통합은 광범위한(a regional) MO를 만들어낸다. 기본적 MO가 다른 국소적 MO들에 통합될 수 있었던 방식과 같이 국소적 MO 역시 다양한 광범위한 MO들에 통합될 수 있다.

2. 교수학적 조직화와 교수학적 과정의 국면들(Didactic Organisation[6] and the moments of the didactic process)

ATD에서 수학 지식의 조직화(수학적 인간행동학)의 창조, 재창조의 과정은 연구 과정(교수학적 과정)의 개념에 의해 모델화된다. 또 수학 지식의 조직화의 창조, 재창조의 과정은 여섯 가지 다른 국면들(각 국면은 연구된 수학적 조직에 의하여 특징 지워진다)로 조직된 비(非)동형 구조를 나타낸다.

이때 여섯 가지 국면은 조직화 O와 처음 만나는 첫 대면의 국면(the moment of the first encounter), 과제들의 유형 T_i의 탐구와 이 과제들의 유형과 관련된 계산 기술 τ_i의 탐구에 관한 탐구 국면(the exploratory moment), τ_i에 관련된 계산 기술의 종합화-이론화에 대한 환경 구성으로 이루어진 계산 기술 국면(the technical moment), 계산 기술의 작업(계산 기술의 작업은 이 작업을 더 신뢰할 수 있도록 계산 기술을 향상시키기 위한 것이고, 계산 기술의 사용을 숙달시키는 것이다)과 관련되어 있는 계산 기술의 종합화-이론화 국면(the technological-theoretical moment), 정교한 수학적 지식의 조직화가 정확하게 무엇인지 확인하는 제도화 국면(the institutionalisation moment), 끝으로 평가 국면(evaluation moment)으로 이루어져 있다. 이러한 각 국면은 교수학적 과정이 성공적으로 완성되기 위해 필요한 특별한 기능을 가진다.

교수학적 인간행동학은 한 사람 혹은 집단이 적절한 MO를 가지기를 원하거나(수학자 혹은 학생의 교수학적 인간행동학), 적절한 MO를 가지고 다른 사람들을 도울 수 있기를 원할 때(교사의 교수학적 인간행동학) 사용된다.

Ⅴ. '수열의 극한' 교수 문제

1. 교사의 인간행동학의 문제

중등학교에서 '수열의 극한' 교수 문제는 교사의 인간행동학적 문제(praxe -ological problem)에 대한 특별한 사례이다.

ATD에 따르면, 교사의 인간행동학적 문제는 본질적으로 교수학적 과정을 통하여 교육제도 안에서 특수한 수학 지식의 조직화를 만들어내면서 존재한다.

교사의 인간행동학적 문제를 해결하기 위해 교사는 교육과정의 문서자료, 교과서, 평가 과제, 국가고시 등과 같은 여러 가지 '주어진 자료들'을 가지고 있고, 그 자료들에는 몇 가지 교육적 요소들과 연구를 발견할 수 있도록 안내하는 방법뿐 아니라, 수학 지식의 조직화의 몇 가지 요소가 있다. 이것은 교육적 제도가 교사에게 어떤 수학을 가르칠 것인지(수학 내용), 그렇게 하기 위해 어떻게 해야 하는지 알려주는 방법이다(교수방법).

결국 교사가 가지는 문제의 중요한 부분은 학생들과 협동하면서 일관성 있는 수학 학습 과정을 전개할 만큼 충분한 수학적 조직을 정교화하기 위해 교육과정, 문서 자료에 의해 제공된 정보를 해독하는데 있다.

6) 이는 didactic organizing에 가깝다.

이경화(1996)에 따르면, "수학교사가 수업을 준비하기 위하여 가르칠 내용을 확인함에 있어 수학적 개념의 배경에 있는 원시 수학적 개념과 매개 수학적 개념에 대한 이해가 이루어져야 하고, 이 과정에서 수학자의 광범위한 아이디어가 살아나고 수학의 고민과 방황이 되살아난다."고 하였다.

따라서 교사는 학문적 지식의 발생, 발전 과정을 이해하고자 노력해야만 가르치고자 의도하는 지식의 변형에 있어서 풍성한 수학 지식을 제공할 수 있을 것이다.

2. 교수학적 변환과정

Chevallard(1985)에 의해 처음으로 알려진 교수학적 변환과정은 학교에서 학습되어질 수 있게 하기 위한 하나의 지식체(a body of knowledge)와 그것의 사용이 받아들여야 할 필연적인 변화들에 영향을 준다. 따라서 수학교육의 연구문제로서 '수열의 극한'을 고려할 때, 교사의 선택과 그것들에 작용하는 제도적 제한들을 이해할 필요가 있다.

교수와 학습이 분리된 것이 아니고 교수학적 변환의 복잡한 과정에서 일어난다는 것을 가정하면, 다음의 차이들을 받아들일 필요가 있다. 교수학적 변환과정은 수학자 혹은 다른 생산자에 의해 생산된 것과 같은 "원형의" 혹은 "학문적인" 수학 지식, 교육과정에 의해 공식으로 규정된 "가르칠 지식", 교실에서 교사에 의해 실제적으로 "가르쳐진 지식", 학생들에 의해 실제적으로 "학습된 지식", 연구자를 위한 기본적인 이론적 모델을 구성하고, 세 가지 대응하는 제도 - 수학공동체, 교육체계, 교실 -의 경험적 데이터로부터 정교화 되어지는 '참조 수학 지식'을 포함한다(Bosch, Chevallard & Gascón, 2005).[7]

교수학적 변환과정을 설명한다는 것은 모든 교수학적 문제의 연구가 복잡한 수학적 실제에 대하여 특별한 관점(고려하는 '내용'은 무엇인가?, 무엇을 위한 것인가?, 그것은 '학문적 수학'안에서 현존하는 것인가? 등)을 받아들일 필요가 있다는 것을 의미한다.

교수학적 변환과정은 지식의 제도적 관련성을 강조하고, 제도 속에 있는 주체들의 개별적인 특성을 넘어서 제도적 단계에 교수학적 문제들을 놓이게 한다. 교수학적 변환과정의 가장 중요한 것은 모든 교수학적 문제의 분석에 있어 변할 수 없는 최소한의 것(the minimal unity of analysis)은 학생들이 수학을 어떻게 배우는가, 그리고 교사가 어떻게 가르쳐야하는가에만 한정될 수는 없다는 것이다. 그것은 경험에 기초하여 복잡한 제도들 하나하나로부터 오는 자료들을 포함하면서, 모든 단계의 교수학적 변환과정을 포함해야 한다. 이런 의미에서 교수학적 변환의 현상들이 모든 교수학적 문제의 가장 핵심이라고 말할 수 있다.

이에 본 논문에서는 '수열의 극한'이라는 주제를 가지고, 교수학적 변환 과정 중에서 '참조 수학 지식', '가르칠 수학 지식'에 집중하여 분석한다.

3. '수열의 극한'에서 참조 수학 지식 (Reference mathematical knowledge)

이제 <표 V-1>에 나타나 있는 참조 수학 지식이라고 부를 MO의 구성요소들인 문제의 유형, 계산 기술, 개념, 원리 등을 해석할 필요가 있는데, 이 MO는 가르칠 지식을 정당화하는

7) 이러한 과정을 Kang(1990), Brabé, Bosch, Espinoza & Gascón(2005)는 학문적 수학 지식→가르칠 수학 지식→실제로 가르친 지식까지만 제시하고, 마지막 단계인 학습된 수학 지식은 제외하고 있다.

'학문적 지식'에 대한 우리의 인식론적 모델을 구성한다.

또한 참조 MO는 학교에서 가르칠 내용과 관련해서는 광범위하다.

수열의 극한에 대해 참조 MO는 광범위한 MO 안에서 서로 다른 역할을 할 두 개의 국소적 MO인 MO1과 MO2를 포함하고 통합하며, 그것들은 다음과 같은 관계를 가진다. 첫 번째, MO1과 MO2는 구분되기보다는 도리어 밀접하게 관련되어 나타난다.

<표 V-1> 참조 수학 지식

<table>
<tr><th>MO1: 극한 계산의 기술(algebra of limits)</th><th>MO2: 극한에 대한 이론(topology of limits)</th></tr>
<tr><td>*수열의 극한의 존재에 대한 가정에서 출발한다.
*주어진 수열에서 수열의 극한값을 어떻게 계산하는지에 대한 문제를 재기한다.</td><td>*MO1에 대한 지식(계산 기술의 종합화와 이론)과 know-how(문제와 계산 기술)은 고등학교에서 가르치도록 예정된 수학 내용을 총망라하지는 않으므로, 참조 모델의 두 번째 구성요소인 MO2를 고려할 필요가 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">여기서 MO1은 극한값의 존재를 가정하고 어떻게 계산 할 것인지에 목적을 두고, MO2는 극한값의 존재에 대한 문제를 검토하는데 목적을 둔다.</td></tr>
<tr><td>(1) MO1의 문제 혹은 과제유형 T_i
T_1: 수열의 극한값을 계산하여라.
T_2: 무한급수의 합을 계산하여라.
T_3: 무한급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하여라.</td><td>(1) MO2의 문제 혹은 과제 유형 T_i
T_1:수열의 극한값 존재(비존재)를 보여라.
T_2:무한수열의 극한값이 계산되는 방식을 정당화하기 위해 (MO1의 계산 기술의 종합화에서 사용된) 성질 (1)~(5)를 증 명하여라.
T_3:무한급수의 수렴, 발산을 조사하여라.
T_4:무한급수가 계산되는 방식을 정당화하 기 위해 사용된 성질 (1)~(2)를 증명하 여라.</td></tr>
<tr><td>(2) 계산 기술
① T_1에서 수열은 그것의 대수식에 의해 주어진다고 가정되고 극한값을 계산하는데 사용된 계산 기술들은 이러한 식의 특정한 대수적 조작에 기초한다.
(예) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{2n^2+n+3}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=2$
(예) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-n)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1-n^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}=1$</td><td>(2) 계산 기술
보통 이러한 규칙들을 입증하면서 이용하였던 계산 기술들은 '$\epsilon-N$' 논법 혹은 계산 기술의 종합화 혹은 수열판정법에 기초한다.
(예) 다음 무한급수가 발산함을 보여라.
$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$
(증) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\neq 0$
그러므로 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$은 발산한다.</td></tr>
</table>

② T_2, T_3는 문제 상황에 적합한 계산 기술의 종합화의 사용에 기초한다.

(예) 다음 무한등비급수의 합을 구하여라.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

$r=\frac{1}{2}$이므로 위의 급수는 수렴한다.

그러므로 $S=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$이다.

(3) 계산 기술의 종합화

MO1에서 수열의 극한값을 계산하는데 사용되는 수열의 극한의 성질을 생성하고 설명하고 정당화하는데 필요한 최소한의 계산 기술의 종합화는 무엇인가? 그리고 이 담화의 이론적 토대는 무엇인가?

☞이 계산 기술의 종합화에 대한 요소는 다음 표현들을 사용하여 간단히 설명할 수 있다.

① $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$

② $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$(단, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

⑤ 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

㉠ $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β: 실수)

$a_n \le b_n (n=1, 2, 3, \ldots)$이면, $\alpha \le \beta$이다.

㉡ 수열 $\{c_n\}$에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$ (단, $n=1, 2, 3, \ldots$)이고 $\alpha=\beta$이면, $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$

☞또한 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면

① $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$($c$: 상수)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(예) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$이 발산함을 증명하여라.

(해) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots$

$>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산한다.

(3) 계산 기술의 종합화

수열의 극한, 무한급수의 성질과 극한의 $\epsilon-N$ 정의에 집중시킨다.

* 계산 기술의 종합화는 극한의 존재 문제를 풀기 위해 필요한 계산 기술의 자원을 제공한다.
* 이 계산 기술의 종합화는 실수의 다양한 성질들 즉, 밀도, 완비, R의 모든 유계인 공집합이 아닌 부분집합의 상한의 존재, Cauchy 수열 등을 가진 거리 공간으로 구성된 실수의 이론에 기초한다.

왜냐하면 MO1의 계산 기술을 지원하는 규칙들의 증명(그것은 MO1의 계산 기술의 종합화이다)은 MO2에서 수학적 계산 기술로 여겨진다. 다시 말해서, 그것은 MO2의 연습 및 심화과정의 한 부분이다. 사실 MO1이 MO2에 부분적으로 포함된다고 말할 수 있다. 두 번째, MO1과 MO2는 실수의 같은 이론을 공유한다. 그래서 MO1과 MO2, 그리고 다른 MO들을 포함하는 같은 광범위한 참조 MO(Reference regional MO)로 통합될 수 있다. 예를 들어, 이 광범위한 MO는 특정한 종류의 함수 극한의 문제를 다루는 조직화가 될 수 있다.

4. '수열의 극한'에서 가르칠 수학 지식

참조 MO에 대한 설명은 고등학교의 교육과정에서 나타난 것처럼 수열의 극한에 대한 가르칠 수학 지식을 설명하기 위해 사용된다.

교육과정 자료와 교과서에서 가장 빈번하게 나타나는 문제의 유형을 살펴보면, 다음과 같다.

T1: 무한수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

T2: 무한수열의 극한값을 구하여라.

T3: 무한급수의 수렴, 발산을 조사하여 수렴하면 그 합을 구하여라.

T4: "~"이 성립함을 보여라(증명하여라).

T5: 무한등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하여라.

극한값을 계산하고 수렴, 발산을 조사하기 위해 소개된 대부분의 계산 기술은 몇몇 대수적 조작과 계산 기술의 종합화 등에 기초한다.

이러한 교육과정의 문제들과 계산 기술은 가르칠 지식의 연습 및 심화과정을 구성하며, 주로 MO1의 연습 및 심화 과정에 대응한다.

이러한 가르칠 지식의 지도를 그려보면 [그림Ⅴ-1][8]와 같고, 이 그림을 분석해 보면, 첫 번째, MO1′$=[T/\tau/\ /\ ]$는 교과서에서 MO1에 의해 남겨진 자취를 나타내는데 사용된다. 문자 'T'와 'τ'는 MO1의 문제들의 유형과 계산 기술을 나타낸다.

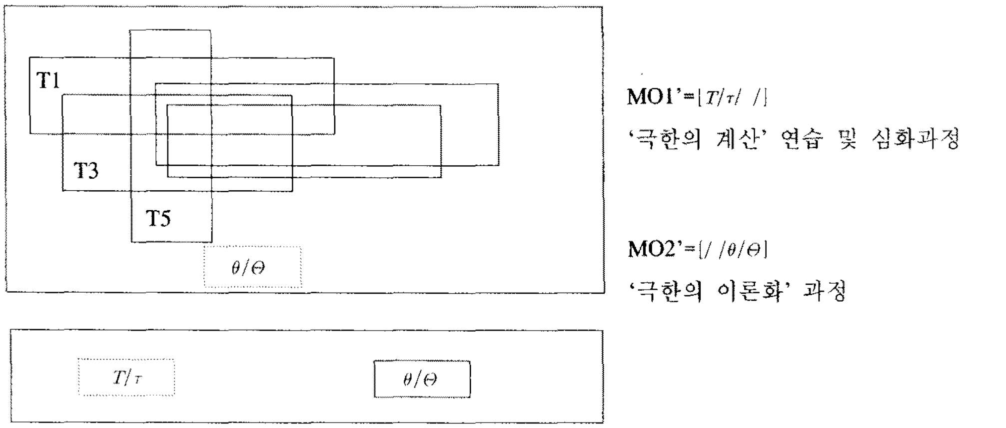
공백들(blanks)은 이 실제에 대응하는 계산 기술의 종합화와 이론화들이 실제로 교육과정에서는 부재라는 말이며, 그 의미는 만약 그것들이 나타난다면 학생들에 의해 사용되는 것이 아니라 단지 교사에 의해 나타난다고 생각한다. 결국 MO1의 재구성은 교육과정에서 오직 일부분만 완성될 수 있다.

두 번째, MO2′$=[\ /\ /\theta/\Theta]$는 교과서에서 MO2에 의해 남겨진 자취를 나타내는데 사용된다. 교과서에서 MO2에 의해 남겨진 자취는 MO1에 의해 남겨진 것보다 약하다. 문자 'θ'와 'Θ'는 계산 기술의 종합화와 이론화를 나타낸다. 공백들은 MO2의 연습 및 심화 과정에 대한 부재이다

위의 실제를 표현하고 설명하고 정당화하기 위해 교수요목과 교과서에 의해 제안된 계산 기술의 종합화-이론화는 명백하게 MO2에서 나타나고, 수열의 극한의 존재 문제에 초점을 맞춘다.

MO2는 표준 수학적 담화, 즉 학문적 지식을 사용하지만 학생들의 실제에서는 나타나지 않는다.

결과적으로 현행 교육과정과 교과서에서 나타난 가르칠 수학 지식에 대한 요약하여 정리해 보면 다음과 같다. 첫 번째, 가르쳐지기 위해 고려된 수학적 지식은 MO1과 MO2에 의해 남겨진 자취의 공통원소를 갖지 않는 합집합으로 조직된다. 두 번째, MO1과 MO2가 교육과정에서 완벽하게 따로 떨어져서 나타난다는 것은 주로 MO1의 계산 기술의 종합화-이론화의 과정과 MO2의 연습 및 심화 과정 양쪽 모두의 부재 때문이다. 세 번째, 교육과정은 MO1의



[그림 Ⅴ-1] 가르칠 지식의 지도

8) 이 그림과 분석은 Barbé et al.(2005)에서 분석된 내용을 바탕으로 본인이 '수열의 극한'의 상황에 맞게 구성한 것이며, 여기에서 사용된 표기 T, τ, θ, Θ는 Chevallard(1992)에 의해 제안된 표기법이다.

연습 및 심화 과정에 대한 계산 기술의 종합화의 창조 즉, 학생들에 의해 효과적으로 발달된 극한값의 계산에 적합한 계산 기술의 종합화의 창조를 제안하지 않는다. 네 번째, 교육과정은 MO1에 대한 계산 기술의 종합화 대신에 제안된 또 다른 수학적 지식의 조직화 즉, MO2의 계산 기술의 종합화-이론화의 과정인 수열의 극한에 대한 표준 수학적 이론에 관련될 수 있는 실제를 허용하지 않는다. 즉, MO2의 연습 및 심화 과정을 허용하지 않는다. 다섯 번째, 수열의 극한에 대한 교육과정의 '두 가지 측면 (수학적 기원, 교수학적 기원)'에 대한 현상의 기원을 고려하지 않고 있으며, 그것은 교수학적 변환의 첫 번째 단계를 구성하는 복잡한 과정에서 발견되어야 한다.

마지막으로 수열의 극한 교수에서 교수학적 중요성에 대해 이야기하면, 첫 번째(MO1)는 이미 확인되었고, 교사가 가르치려는 구체적인 수학적 구성요소를 선택할 때 직면해야 할 주요 어려움과 관련되어 있다. 다시 말해 어떤 유형의 문제들이 제시되어야 하고, 어떤 유형의 계산 기술들이 문제를 풀기 위해 사용되어질 수 있고, 어떤 종류의 설명과 정당화가 필요한지에 대한 것이다. 아마도 가장 그럴듯한 이야기는 MO1(극한값의 존재가 그 자체로서는 문제가 아닌)을 가르칠 지식으로 생각하는 것인데, 그 이유는 그것이 교육과정에 의해 제시된 과제, 계산 기술, 계산 기술의 종합화, 이론화의 집합에 더 가까운 국소적 MO이기 때문이다. 그러나 이 선택은 MO1의 적절한 계산 기술의 종합화의 부재와 MO1에 대한 '외부'의 계산 기술의 종합화에 대한 요소들의 존재 때문에 어려움, 심지어 모순을 남겨 둘 것이다.

두 번째, 중등학교에서 수열의 극한에 대한 '의미'를 생각해 볼 때, 정확하게 그것이 MO2의 존재 이유 혹은 근본적 이유를 구성하는 MO1의 사라진 계산 기술의 종합화-이론화 과정(수열의 극한의 존재와 그것을 결정짓는데 사용된 대수적 특징들을 설명하고 정당화하는 방법)이라는 것을 알 수 있다.

이러한 환경에서 교사는 수열의 극한이 교육과정에 의해 제시되었던 것처럼, 수열의 극한에 대한 정의를 동기화시키는 어려움에 직면할 것이다. 왜냐하면 이런 동기는 밀접하게 연결된 구성요소들로 인해 MO1과 MO2를 포함하는 좀 더 폭넓은 MO 안에서 발견되기 때문이다. 같은 종류의 어려움은 후에 대학 수준에서 나타날 것이다. 보통 가르칠 지식은 주로 MO2에 기초하지만, 이 지식을 (MO1의 계산 기술의 종합화) 동기화하는 실제는 이전에 이미 충분히 발달되지 않았기 때문이다.

이제 위에서 분석한 결과를 가지고 Chevallard(1992; 1998)가 주장했던 ATD에 맞추어, '수열의 극한' 교수 방법을 제안한다.

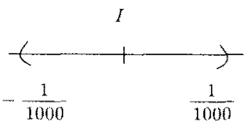
일반적으로 수학을 해나가는 방법은 값의 존재성을 먼저 밝히고, 이러한 값의 계산을 쉽게 하기 위해 이론이 필요하며, 그 이론의 과정이 추상화이다. 이와 같은 맥락에서 가장 먼저 다루어져야 하는 것은 수렴성이 필요한 이유이며, 이를 위해 몇 단계의 질문을 제기하고, 이를 해결해 나가는 과정을 통하여 학생들에게 '수렴성의 필요성'을 보여준다.

질문 1. 수직선 위의 모든 점이 유리수로 표현되는가?
질문 2. 유리수는 셀 수 있는가?
질문 3. 실수는 셀 수 있는가?
질문 4. 셀 수 없는(작도할 수 없는) 실수를 셀 수 있는(작도할 수 있는) 유리수로 극복할 수 있는가?
질문 5. 유한성으로 무한성을 극복할 수 있는가?

결국, 교사는 위의 질문 4와 질문 5에서 수

렴성이 왜 필요한지에 대해 설명할 수 있다. 즉 셀 수 있는 유리수로 셀 수 없는 실수를 극복하기 위해서, 또 유한성을 무한성으로 확대하여 유한성을 가지고 무한성을 극복하기 위해 수렴성이 필요하다는 것을 학생들에게 보여줄 수 있다. 이제 문제는 이것을 어떻게 구체화시킬 것인가에 대한 논의가 이루어져야 한다. 그 논의 중 일부만 소개하면 다음과 같다.

첫 번째, 임의의 수열이 어떤 값에 수렴하느냐에 대한 문제를 구체화시키기 위해 우선 학생들에게 수렴 값 0을 미리 정해주고, 0으로 수렴하는 수열을 찾게 하는 작업을 한다. 이 과정에서 학생들은 많은 예들을 만들어낼 것이다. 역으로 임의의 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$의 수렴 값을 찾게 한다. 이 과정에서 학생들은 그래프를 이용하여 그 수렴 값을 찾고자 노력한다. 두 번째, a 근방에 유한개를 제외하고 많은 수가 들어간다는 것을 자연스럽게 유도한다. 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이 주어져 있을 때, 여러 가지 현상을 검토해서 추측할 수 있는(즉, 수학자들의 노고를 느낄 수 있는) 과정을 재현한다. 예를 들어, 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$에 대해 구간 I 가 다음과 같이 주어져 있다.



수열 $\frac{1}{10000}, \frac{2}{1000}, \frac{2}{10000}, -\frac{2}{1000}, \cdots$에서 홀수 번째 항은 구간 I 안에 들어가고, 짝수 번째 항은 구간 I 를 벗어난다. 그렇다면 어떤 현상이 일어나는가?

즉, 수열이 2개로 나누어진다는 의미이며, 이것이 부분수열(subsequence)의 개념이다. 또한 $a_{1001}, a_{1002}, a_{1003}, \cdots$은 구간 I 안에 들어가지 않으므로 수렴하지 않는다. 결국 $n \to \infty$ 일 때, $a_n \to 0$ 이라는 현상을 가지게 된다.

두 번째 예를 들면 수열과 같이

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1, & a_2, & & a_4, & a_5, & & a_7, & a_8, & a_9, & \cdots \\ & & a_3 & & & a_6 & & & & a_{10} \end{array}$$

빠져 나오는 것이 있을 때, 수렴성은 어떻게 될 것인지에 대해 학생들에게 질문한다. 그래서 모든 것이 다 들어가야 한다는 내용이 나오게 만든다. 위의 예들처럼 구체적이고 자연스럽게 설명할 수 있는 모델을 많이 구성하는 것이 중요하다.

결국, $\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \epsilon - N$ 논법을 만드는 과정을 보여주기 위해 수학자들이 했던 작업을 살펴보는 것이 중요하며, 앞의 예제들을 이용하여 그 과정을 보여주어야 한다.

여기에서 가장 강조할 것은 학생들에게 정의를 알려주기 위해서는 동기(動機 ; motivation)가 중요하며, 교사는 자신이 가지고 있는 것을 솔직히 이야기 하고 학생들과 소통해야 하고, 옛 수학자들의 입장에서 역사적 · 수학적 고찰을 하여야 한다는 것이다.

Ⅵ. 결 론

본 논문에서는 최근 유럽을 중심으로 연구되는 수학교육에 대한 다양한 이론적 틀을 간단히 언급하고(특히 프랑스의 '수학교수학'에서 생겨난 세 가지 이론), 이러한 이론들 중에서 ATD에 대한 소개와 ATD에 의해 제안된 인식론적 모델인 인간행동학에 대해 알아보았다. 또한 ATD에 기반을 두고 '수열의 극한' 교수에 대한 교수학적 변환 과정 중에서 참조 수학 지식과 가르칠 수학 지식에 집중하여 분석한 후 교수 방향을 제시하였다.

우리가 다루었던 인류학적 접근은 인간의 사고를 가장 자연스럽게 해나가는 방법으로 수학

에 대한 자연스러운 사고를 하는 과정에 가장 부합되는 교수・학습 방법이라 할 수 있다.

또한 이 접근법은 우리를 교실 밖으로 그리고 교육체계 밖으로 불러내어 경험적 체계를 고려할 것을 요구하고(따라서 모델링 하는), 우리가 사회제도 안에서 존재하는 다양한 수학적 실제들을 통해 수학 지식을 질문하도록 한다.

교육 문제에 관한 연구들은 연구라는 명목하에 실재 모델들을 사용한다. 어떤 경우는 이 모델들이 교육 제도의 관점과 아주 근접하게 되는데, 이때 교육 제도는 학습과 교수가 무엇인지, 수학은 무엇인지, 기본 대수는 무엇인지 등을 암묵적으로 정의한다. 이 경우에 제도적 모델은 교육문제를 보는 자연스러운 방법으로 나타난다. 하지만 그것들은 수학교육에서 특별한 이론적 접근이 필요하지 않다는 인상을 주기 때문에 거의 명백화 되어 있지는 않다.

이러한 암묵적 가정이 넓게 공유될 때 문제에 대한 상식적인 비전만이 나타나게 되어, 대조하고 토론하는 것 자체가 불가능하게 된다.

ATD에서 나타나는 특별한 이론과 모델은 교육 제도가(우리가 알기를 원하고 바꾸기를 원하는) 경험적 실재의 부분으로 고려되기 때문에, 교육문제에 대한 상식적 정의에 대항하도록 연자들을 이끈다.

이 논문에 소개된 수학교육의 여러 이론들은 생소하고 접근하기에는 어렵다. 그것은 주요한 수학교육 이론이 유럽을 중심으로 발달되어 WG 11에서 지적된 것처럼 그들의 서로 다른 배경이나 언어, 암묵적 가설 때문에 서로를 철저히 이해하기가 어렵기 때문이다.

그러나 다수의 연구자들이 다루어야 할 수학 지식에 맞추어 이러한 다양한 이론들을 연구하고, 도입하여 교사 실제에 적용할 수 있는 모델을 구성한다면, 교수・학습 현장에서 수학을 하는 자연스러운 방법을 제시하는데 도움이 될 것이라 생각한다.

수학자와 교사의 최종 목표는 학생들의 학습 내용에 대한 동기유발을 강화시키고, 그 내용을 응용하는데 좋은 길잡이를 제시하는 것이다.

참고문헌

김남희 외 5인(2006). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사

이경화(1996). 교수학적 변환론의 이해. **대한수학교육학회 논문집**, 6(1), 203 -213.

이영숙(2005). **교육인류학 연구방법과 사례**. 서울: 아카넷.

Arzarello, F; Bosch, M; Lenfant, A. & Prediger, S. (2007). Different Theoretical Perspectives in Research Introduction to the Papers of Working Group 11. The Proceeding of CERME 5, Cyprus.

Barbé, J; Bosch, M; Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restric -tions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235 -268.

Barnard, A. (2003). **인류학의 역사와 이론**. (김우영 역). 파주: 한길사. (영어 원작은 2000년 출판)

Bergsten, C. & Grevholm, B. (2005). The didactic divide and educa -tional change. Paper Proposal for ICME Study 15.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (1999). The role of the algebrai -sation in the study of a mathe -matical organisation. *European Research in Mathematics Education II*: Group 6.

Bosch, M; Chevallard, Y. & Gascón, J.

(2005). Science or Magic? The Use of Models and Theories in Didactics of Mathematics, In Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, San Feliu de Guixols, 1-10.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathèmatiques, 1970-1990,* In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. (eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage Educations.

Chevallard, Y. (1992). *Foundamentals concepts of didactics: perspectives given by an anthropological approach,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. http// yves,Chevallard. free.fr/spip/spip/ index.php

Courant, R. & Robbins, H. (2002). 수학이란 무엇인가. (박평우 · 김운규 · 정광택 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1996)

Tall, D. (2003). 고등 수학적 사고. (류희찬 · 조완영 · 김인수 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991)

García, F. J. & Ruiz Higueras, L. (2006). Mathematical Praxeologies of Increasing Complexity: Variation systems modelling in Secondary Education. *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics*, 38(3), 226 -246.

Kang, W. (1990). Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbook, Doctorial Dissertation, Athens: University of Georgia.

Laborde, C. (2007). Toward theoretical foundations of mathematics education. Mathematics Education, 39, 137 -144.

Miguel, Maria Inez R. (2006). Teaching and Learning of the Poisson's Model: A Model Building Experience. Proceeding of the 7th International Conference on Teaching of Statistics (ICOTS-7), 1-4

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques* en France. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

Toward Teaching of the Limit of Sequences Based on the Anthropological Method

Kim, Boo Yoon (Pusan National University)
Chung, Gyeong Mee (Graduate School, Pusan National University)

Various theories of mathematics education which have been considered by many European researchers particularly, in France, recently are introduced.

The Anthropological Theory of the didactic discussed by Chevallard will be briefly introduced. Then the praxeology as Anthropological model according to Che vallard's theory will be discussed.

The necessity of Anthropological Theory, its background of development through the transition process of didactic, and its basic elements will be discussed further. Additionally, teaching limit of sequences in high school mathematics will be suggested according to the theory.

* key words : The Antropological Theory of the Didactic(ATD: 교수학의 인류학적 이론), Praxeology(인간행동학), Mathematical Organisation(수학적 지식의 조직화), Didactic Organisation(교수학적 지식의 조직화), Didactic Process(교수학적 과정). Practical block(연습 및 심화 과정), Theoretical block(이론화 과정), Technic(계산 기술), Technology(계산 기술의 종합화), Theory(이론화).

논문접수 : 2009. 11. 16
논문수정 : 2009. 12. 4
심사완료 : 2009. 12. 14