論文

액체-기체 2상 유동장의 정확하고 강건한 해석 Part 1: 충격파 안정적인 2상 유동 수치기법의 개발

임승원*, 김종암**

Accurate and Robust Computations of Gas-Liquid Two-Phase Flows Part 1: Development of Shock-Stable Two-Phase Schemes

Seung-Won Ihm* and Chongam Kim**

ABSTRACT

In this paper, we introduce two-phase versions of RoeM and AUSMPW+ schemes. Both schemes are originally developed for the gas dynamic problems, and have shown superior accuracy, efficiency and robustness. A new shock discontinuity sensing term is derived from the mixture equation of state, which is commonly used in the RoeM and AUSMPW+ schemes for the stable numerical flux calculation. The developed two-phase versions of the schemes are applied to several liquid-gas, large property discrepancy two-phase test problems, including several shock stability test problems. The results show that both schemes maintain the merits exhibited in gas dynamic problems even in two-phase flows.

초 록

최근 공학적으로 응용 범위가 넓은 액체-기체의 2상 유동장에 대한 전산 해석이 주목을 받고 있다. 본 연구에서는 밀도차가 큰 압축성 2상 유동장을 해석하기에 적합하도록 기존에 개발된 RoeM과 AUSMPW+ 공간 이산화 기법을 확장하였다. RoeM과 AUSMPW+에서 사용되는 충격파 포착항을 2상 혼합류의 상태방정식으로부터 새롭게 정의하여, 밀도와 음속이 상이한 두 유체에서도 정확성을 보장하면서 충격파 불안정성을 제거할 수 있도록 하였다. 개발된 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+를 몇 가지 예제 문제에 적용하여 검증하였으며, 해석 결과는 두 수치기법이 일반적인 2상 유동에서도 충격파 안정적이며 정확한 특성을 갖는 것을 보여주었다.

Key Words : Compressible Two-Phase Flow(압축성 2상 유동), Shock Stability(충격파 안정성), RoeM, AUSMPW+

Ⅰ. 서 론

근래에 들어 전산유체역학 분야에서는 압축성 2상 유동에 대한 해석이 주목을 받고 있다. 액체와 기체가 함께 존재하는 2상 유동장은 각종 유체기계나 수중의 고속 운동체, 수중 폭발 문제와 같이 많은 공학적인 문제에서 나타난다. 이와 같은 2상 유동장을 수치적으로 해석하기 위한 모델은 지배방정식의 분리 정도에 따라 몇 가지로 나뉘어지는데[1], 공학적인 문제에는 질량 보존식만 각 상에 따라 분리하는 균질 혼합류 모델(Homogeneous Equilibrium Model)이 많이 사용되고 있다. 본 연구에서도 균질 혼합류 모델을

† 2008년 9월 4일 접수 ~ 2008년 12월 12일 심사완료
* 정회원, 서울대학교 기계항공공학부 대학원
** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부, 항공우주신기술연구소
교신저자, E-mail : chongam@snu.ac.kr
서울시 관악구 신림동 산56-1

사용하는 액체-기체의 압축성 2상 유동장을 대상으로 삼고 있다.

이와 같은 2상 유동장을 해석하기 위한 공간 이산화 기법으로는 Roe 계열의 수치기법이 널리 사용되고 있으며[1,2], AUSM 계열의 수치기법이 2상 유동장에 확장, 적용되기도 하였다[3]. 그러나 기체 역학에서는 일찍이 Roe 계열 수치기법이 갖는 충격파 불안정 문제에 대한 논의가 활발히 진행되어 왔다. RoeM은 홀짝 분리 문제에 대한 선형 섭동 분석으로부터 충격파 불안정성의 원인을 파악하고, 수치적 불안정성을 일으키는 항을 조절하는 마하수 기반 함수를 도입하여 충격파에 안정적이면서도 정확한 수치기법으로 개발되었다[4]. 한편 AUSM 계열 수치기법 역시 충격파와 벽면 근처의 수치 진동 문제가 제기되어 왔는데, 압력 가중함수를 도입하여 제어면 좌/우의 물성치를 적절히 반영해 줌으로써, 정확도의 손실 없이 수치적인 문제를 해결한 AUSMPW+가 개발된 바 있다[5,6].

따라서 정확성, 충격파 안정성, 전 엔탈피 보존성과 같은 장점을 지니고 있는 RoeM과 AUSMPW+ 수치기법을 2상 유동으로 확장한다면, 정확하고 효율적이면서 강건한 2상 유동 해석이 이루어질 수 있을 것이다. 본 연구에서는 물-공기와 같이 물성치의 차이가 큰 액체-기체의 압축성 2상 유동장을 해석 대상으로 하였으며, 상 경계면과 같은 불연속면을 만나도 수치 불안정 현상이 발생하지 않도록 고려하고자 하였다.

II. 지배 방정식

2상 유동장을 모사하는 방법 중에 본 논문에서는 균질 혼합류 모델을 사용하였다[1]. 균질 혼합류 모델에서는 각 상에 대하여 질량 보존식만을 분리하고, 운동량 및 에너지는 혼합유체의 보존식을 사용한다. 본 연구에서는 각각의 상을 구분하는 함수로 질량 비율(mass fraction)을 채택하여, 혼합유체의 질량, 운동량 및 에너지 보존식과 기체상의 질량 보존식을 푸는 것으로 하였다. 2차원 비점성 유동에서 원시변수 기반의 압축성 2상 유동에 대한 보존식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\Gamma_e}{J}\frac{\partial Q_p}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial \xi}+\frac{\partial F}{\partial \eta}=0 \tag{1}$$

$\Gamma_e=\dfrac{\partial Q}{\partial Q_p}$는 원시변수에서 보존변수로의 변환행렬이며, 보존량 벡터 Q와 원시변수 벡터 Q_p는 다음과 같다.

$$Q=[\rho_m,\rho_m u,\rho_m v,\rho_m E_t,\rho_m Y_1]^T \tag{2}$$

$$Q_p=[p,u,v,h_m,Y_1]^T \tag{3}$$

위 식에서 ρ_m은 혼합류의 밀도, E_t는 전에너지, h_m은 혼합류의 엔탈피이고, Y_1은 기체상의 질량 비율을 의미한다. ξ방향의 비점성 플럭스 E는 다음과 같다.

$$E=[\rho_m U,\rho_m u U+n_x p,\ \rho_m v U+n_y p,\rho_m H U,\rho_m Y_1 U]^T \tag{4}$$

제어면에 수직인 반전속도는 $U=n_x u+n_y v$로 정의되며, $n_x=\xi_x/J$, $n_y=\xi_y/J$이고, 변환 자코비언 $J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$이다.

한편 혼합류의 밀도 ρ_m은 다음과 같이 제어체적 내에서 각 상이 차지하고 있는 영역에 각각의 상태방정식을 적용하여 구해진다[7].

$$\rho_m=\frac{1}{\Sigma\dfrac{Y_i}{\hat{\rho_i}(p,T)}}=\frac{1}{\Sigma\dfrac{Y_i}{\hat{\rho_i}(p,h_i)}} \tag{5}$$

$\hat{\rho_i}$은 열역학적 변수에 따라 결정되는 각 상의 밀도이므로, 식 (5)는 각 상의 상태방정식과 결합하여 혼합유체의 상태방정식으로 생각할 수 있다.

본 연구에서 사용한 액상의 상태방정식은 다음과 같은 "Stiffened fluid" 상태방정식이다[8].

$$p_l=(n-1)\rho_l e_l-np_c \tag{6}$$

여기서 $n=7.0$, $p_c=3.03975\times10^8 Pa$이다. 위 식 (6)은 대기압($p=101325.0Pa$)에서 액상의 밀도 $\rho_l=1000.0kg/m^3$을 예측한다.

기체상의 상태방정식으로는 다음과 같은 이상기체 상태방정식을 사용하였으며, $\gamma=1.4$이고 대기압에서 $\rho_g=1.225kg/m^3$이 된다.

$$p_g=(\gamma-1)\rho_g e_g \tag{7}$$

이제 각 계산 격자 내에서는 각 상의 압력과 온도가 같다는 동역학적, 열역학적 평형을 가정함으로써, 전체 2상 유동의 지배방정식 시스템이 닫히게 된다.

$$p=p_l=p_g,\ T=T_l=T_g \tag{8}$$

III. 2상 유동 공간 이산화

3.1 2상 유동 충격파 포착항

RoeM과 AUSMPW+ 수치기법은 정확성을 유

지하면서도 충격파 안정적인 특성을 갖추기 위해 제어함수를 도입하고 있다. 각 제어함수는 제어면 좌, 우의 압력비를 이용하여 다음과 같은 형태의 충격파 포착항(Shock Discontinuity Sensing Term)을 사용한다.

$$\Pi_{1/2}=\min\left(\frac{p_L}{p_R},\frac{p_R}{p_L}\right) \tag{9}$$

하첨자 1/2은 제어면을 의미하고, 하첨자 L, R은 각각 제어면 좌, 우의 물성치를 의미한다.

RoeM과 AUSMPW+는 $\Pi_{1/2}$를 통해 유동이 연속적인 영역과 충격파 불연속 영역을 구분하게 되고, 충격파 영역에서 Roe나 AUSM+ 수치기법이 갖고 있던 충격파 불안정성을 유발시키는 항을 조절함으로써, 본래 수치기법의 정확성을 유지하면서도 충격파 안정성을 확보하였다.

그런데 식 (9)로 표현되는 충격파 포착항은 기체역학 문제에서 제안된 것으로, 충격파가 존재하는 영역에서만 제어면 좌, 우의 압력비가 충분히 크다는 가정에 기초하고 있다. 만일 충격파가 존재하지 않는 아음속 영역에서도 $\Pi_{1/2}$ 값이 1에서 멀어진다면, 본래 수치기법의 정확성과 안정성을 보장할 수 없게 된다. 따라서 RoeM과 AUSMPW+를 2상 유동으로 확장하기에 앞서, 2상 유동장에서의 압력장 변화에 대한 분석이 선행되어야 한다.

3.1.1 2상 유동에서 압력장의 변화

그러면 먼저 연속적인 아음속 유동인 경우에, 기체상 유동과 액체상 유동에 따라 압력장의 변화량이 어떻게 달라지는지 살펴보자.

유동 해석 대상이 되는 물체 주위의 압력장 변화는 많은 경우에 $p_\infty \pm \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}O(1)$의 범위 내에서 변화한다고 가정할 수 있다. 기체상의 경우 이상 기체 상태 방정식 (7)에 따라 다음과 같은 관계식이 가능하다.

$$p_\infty=\frac{1}{\gamma}\rho_\infty c_\infty^2=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\rho_\infty u_\infty^2 \tag{10}$$

식 (10)을 이용하면, 압력장 변화 범위는 $p_\infty \pm \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}O(1)=\left\{1\pm\frac{\gamma M_\infty^2}{2}O(1)\right\}p_\infty$이 된다. 이제 p_∞에서 $p_\infty+\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}O(1)$으로 압력이 변화하는 연속적인 아음속 영역에 N개의 충분한 격자가 있다고 하자. 그러면 임의의 $k+1/2$ 제어면에서 식 (9)로 주어진 충격파 포착항은 다음과 같은 값을 도출할 것이다.

$$\Pi_{k+1/2}\approx\frac{1+\frac{\gamma M_\infty^2}{2}O(1)\times\frac{k}{N}}{1+\frac{\gamma M_\infty^2}{2}O(1)\times\frac{k+1}{N}} \tag{11}$$

충분한 격자수 $N\gg\frac{\gamma M_\infty^2}{2}O(1)$ 이므로 $\Pi_{k+1/2}$은 k에 관계없이 1에 가깝고, 따라서 식 (9)는 연속적인 영역을 올바르게 예측할 수 있다.

이제 액체상 유동의 경우를 살펴보자. 식 (6)으로 표현된 상태방정식을 변형하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$p_\infty+p_c=\frac{1}{n}\rho_\infty c_\infty^2=\frac{1}{nM_\infty^2}\rho_\infty u_\infty^2 \tag{12}$$

식 (12)에 따른 압력장 변화 범위는 $p_\infty \pm \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}O(1)=\left\{1\pm\frac{nM_\infty^2}{2}\left(1+\frac{p_c}{p_\infty}\right)O(1)\right\}p_\infty$ 이 된다. 그러면 같은 가정 아래 $k+1/2$ 제어면에서 충격파 포착항은 다음과 같다.

$$\Pi_{k+1/2}\approx\frac{1+\frac{nM_\infty^2}{2}\left(1+\frac{p_c}{p_\infty}\right)O(1)\times\frac{k}{N}}{1+\frac{nM_\infty^2}{2}\left(1+\frac{p_c}{p_\infty}\right)O(1)\times\frac{k+1}{N}} \tag{13}$$

식 (13)은 $\frac{p_c+p_\infty}{p_\infty}\gg\frac{2N}{nM_\infty^2}$에서 $\frac{k}{k+1}$이고, $\frac{p_c+p_\infty}{p_\infty}\approx\frac{2N}{nM_\infty^2}$에서 $\frac{k\times O(1)}{1+(k+1)\times O(1)}$이며, 단지 $\frac{p_c+p_\infty}{p_\infty}\ll\frac{2N}{nM_\infty^2}$인 경우에만 k에 관계없이 1에 가까운 값이 된다. 액상 물의 경우 p_c의 값은 상태방정식에 따라 $O(10^8)\sim O(10^9)$Pa의 값이 사용되므로, 일반적으로 자유류가 $O(10^5)$Pa인 문제에서 p_c/p_∞의 값은 $O(10^3)\sim O(10^4)$이다. 따라서 N이 비상식적으로 많은 경우를 제외하고는, 연속적인 아음속 영역임에도 $\Pi_{k+1/2}$의 값은 k에 따라 1에서 멀어질 수 있다. 따라서 식 (9)로 주어지는 충격파 포착항을 액상 해석에 그대로 적용하면, RoeM이나 AUSMPW+를 설계할 때의 의도와 다른 영역에서 수치점성이 조절되므로, 수치기법의 정확성과 안정성을 훼손하게 된다.

이상의 분석 결과를 살펴보면, 자유류의 압력

(p_∞)에 비하여 동압($\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}$)이 매우 크면 충격파 포착항 $\Pi_{1/2}$이 잘못 작동할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 일반적인 2상 혼합 유동장의 경우에 압력장 변화를 확인하기 위하여 다음과 같은 'ratio'값을 정의할 수 있다.

$$ratio = \frac{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}{p_\infty} \tag{14}$$

만일 아음속 영역에서 ratio값이 매우 크다면, 자유류 대비 동압의 크기가 매우 크기 때문에, 압력비율을 충격파 포착항으로 사용하는 것이 부적절하다. 자유류의 압력을 1기압으로 가정하고, 몇 가지 질량 비율에 대해 마하수에 따른 ratio값을 Fig. 1에 도시하였다.

Fig. 1로부터 기체상($Y_1 = 1.0$)에서 액상($Y_1 = 0$)에 가까워질수록 밀도와 음속이 커지기 때문에, 유동장의 압력이 $O(10^2) \sim O(10^3)$의 차수로 변화할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 액상에 가까운 유동에서 기존의 충격파 포착항 $\Pi_{1/2}$을 사용하는 것은 적절하지 않으며, 2상 유동에 맞는 충격파 포착항을 새롭게 정의할 필요가 있다.

3.1.2 2상 유동 충격파 포착항의 유도

2상 유동에서 충격파 포착항을 유도하기 위해, AUSMPW[9] 수치기법의 개발 과정을 살펴보자. AUSMPW 수치기법은 AUSM+와 AUSMD의 차이로부터 제어면 좌, 우의 물성치를 고려하기 위해 밀도 비율을 채택한 뒤, 이를 압력 비율로 변화하여 충격파 포착항의 초기 형태를 만들었다.

이는 기본적으로 충격파가 압축성 현상이므로 밀도 비율을 사용하여 포착하는 것이 타당하지

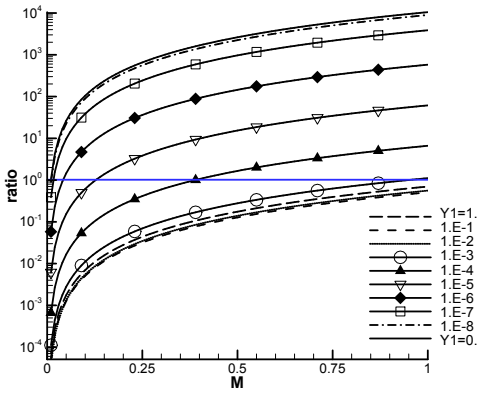


Fig. 1. Ratio (dynamic pressure/freestream pressure) for several mass fractions

만, 접촉 불연속면과 같은 곳에서 과도한 수치점성이 부여되는 것을 방지하기 위해 압력에 대한 함수로 변환한 것이다.

유사한 방식으로 2상 혼합류에 대한 충격파 포착항을 유도해 보자. 먼저 2상 혼합유동에서는 혼합류의 상태방정식 (5)로부터 밀도를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho_m = \frac{\partial\rho_m/\partial p}{\frac{\alpha_1}{p} + \frac{1-\alpha_1}{p+p_c}} \tag{15}$$

이제 제어면 좌, 우에서 $\partial\rho_m/\partial p$와 기체상의 부피비율 α_1을 공통으로 사용할 수 있다고 가정하면, 밀도 비율은 압력 함수 $\bar{p}$의 비율로 바뀐다.

$$\frac{\rho_{m,L}}{\rho_{m,R}} \approx \frac{\bar{p}_L}{\bar{p}_R} \tag{16}$$

$$\bar{p}_{L,R} = \frac{1}{\frac{\alpha_1}{p_{L,R}} + \frac{1-\alpha_1}{p_{L,R}+p_c}} \tag{17}$$

압력 함수 $\bar{p}$는 기체상에서 p가 되고 액상에서 $p+p_c$가 되며, 기하학적으로 각 상이 차지하는 부피비율에 대한 가중 조화평균의 형태이다.(Fig. 2.) 이제 새로운 2상 유동의 충격파 포착항을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Pi_{1/2}^* = \min\left(\frac{\bar{p}_L}{\bar{p}_R}, \frac{\bar{p}_R}{\bar{p}_L}\right) \tag{18}$$

식 (18)로 주어진 새로운 충격파 포착항 $\Pi_{1/2}^*$는 액상부에서 압력비 대신 $p+p_c$의 비율을 사용함으로써, 연속적인 영역에서 RoeM과 AUSMPW+의 정확성을 손상시키지 않고 충격파 영역에만 강건성을 확보하는 제어함수가 작동하도록 도와준다.

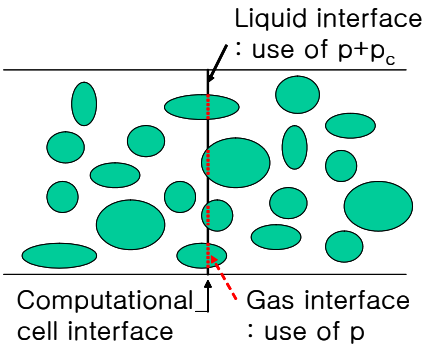


Fig. 2. Geometrical meaning of $\Pi_{1/2}^*$

Table 1. Inverse values of the SDSTs for the 1-D shock relation (subscript "L" indicates pre-shock value)

p_L=101325Pa Mass fraction	$\alpha_{1,L}$	$\rho_{m,L}$ (kg/m3)	c_L (m/s)	M_L=1.5		M_L=2.0	
				$1/\Pi_{1/2}$	$1/\Pi^*_{1/2}$	$1/\Pi_{1/2}$	$1/\Pi^*_{1/2}$
Y_1=0.0 (pure liquid)	0.0	1000.00	1458.95	5.685	3.18750	15756.3	6.25000
$Y_1=1.0\times10^{-8}$	8.163×10^{-6}	999.99	1347.99	4836.944	2.61162	12682.5	5.22595
$Y_1=1.0\times10^{-7}$	8.163×10^{-5}	999.92	885.63	8.24318	1.22860	2494.80	1.83307
$Y_1=1.0\times10^{-6}$	8.157×10^{-4}	999.19	342.81	2.42609	2.06508	4.84434	2.78550
$Y_1=1.0\times10^{-5}$	8.097×10^{-3}	991.91	112.01	2.26608	2.22898	4.06936	3.83132
$Y_1=1.0\times10^{-4}$	7.548×10^{-2}	924.61	38.10	2.25124	2.24752	4.00529	3.98094
$Y_1=1.0\times10^{-3}$	0.4497	550.87	20.23	2.24981	2.24943	3.99909	3.99665
$Y_1=1.0\times10^{-2}$	0.8918	109.25	32.26	2.25005	2.25001	3.99940	3.99915
$Y_1=1.0\times10^{-1}$	0.9891	12.12	92.31	2.25426	2.25426	4.00948	4.00946
Y_1=1.0 (pure gas)	1.0	1.225	340.29	2.45833	2.45833	4.50000	4.50000

이제 새롭게 제안된 $\Pi^*_{1/2}$가 일반적인 2상 혼합류에서 충격파를 올바르게 포착하는지 확인하기 위하여, 질량 비율을 변화시켜 가면서 $1/\Pi_{1/2}$와 $1/\Pi^*_{1/2}$의 값을 비교하였다. M=1.5와 2.0인 수직 충격파에 대해 자유류 압력은 대기압으로 가정하였고, 그 결과를 Table 1에 정리하였다. 본래의 충격파 포착항이 액상에 가까운 영역에서 지나치게 민감한 반면에, 식 (18)로 제안한 새로운 2상 유동 충격파 포착항은 대체적으로 일관된 값을 도출하는 것을 알 수 있다. 따라서 새로운 충격파 포착항을 사용하면 RoeM과 AUSMPW+가 임의의 2상 유동장에서도 해의 정확성과 강건성을 보장할 수 있을 것이다.

3.2 2상 유동 RoeM 개발

2상 유동에서 FDS 형태의 수치기법을 사용할 때, 시스템 자코비언 행렬 $\partial E/\partial Q$를 식 (2)로 주어지는 보존변수를 기초로 구하고자 하면 그 형태가 매우 복잡해진다. 또한 많은 액체-기체의 2상 유동 문제에서 액상의 높은 음속으로 인하여 예조건화를 필요로 하는 경우가 많기 때문에, 원시 변수 기반의 FDS 형태 수치기법을 사용하는 것이 유리하다. 따라서 본 연구에서는 원시변수 기반의 2상 유동 Roe 수치기법에서부터 2상 유동 RoeM 수치기법을 유도하였다.

3.2.1 원시변수 Roe 수치기법

원시변수 Roe 수치기법은 압축성 2상 유동 문제에 널리 사용되고 있으며[1,2], 그 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_{1/2} &= \frac{1}{2}(E_L+E_R-\Gamma_{e,1/2}|\Gamma_e^{-1}A_p|_{1/2}\Delta Q_p) \\ &= \frac{1}{2}(E_L+E_R-\Gamma_{e,1/2}|\tilde{A}(Q_L,Q_R)|_{1/2}\Delta Q_p) \\ &= \frac{1}{2}(E_L+E_R-\Gamma_{e,1/2}X|\Lambda|X^{-1}\Delta Q_p) \end{aligned} \quad (19)$$

위 식에서 원시변수에서 보존변수로의 변환행렬 $\Gamma_e=\frac{\partial Q}{\partial Q_p}$이고, 원시변수에 대한 비점성 플럭스의 자코비언 $A_p=\frac{\partial E}{\partial Q_p}$이다. 원시변수의 선택은 연구자마다 조금씩 달라지는데, 본 연구에서는 다음과 같은 원시변수를 사용하였다.

$$Q_p=[p,u,v,h_m,Y_1]^T \quad (20)$$

3.2.2 2상 유동 RoeM 수치기법

기체역학에서 RoeM 수치기법을 유도하는 과정[4]과 같이, 식 (19)로 표현된 2상 유동 Roe 수치기법으로부터 RoeM 수치기법을 유도해 보자. 먼저 식 (19)는 초음속 영역에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_{1/2}=\frac{1}{2}(E_L+E_R-\tilde{M}A_p\Delta Q_p) \quad (21)$$

여기서 $\tilde{M}=sign(\hat{M})\times\min(1,|\hat{M}|)$, $\hat{M}=\hat{U}/\hat{c}$.

그러면 수치점성을 아음속부와 초음속부로 나누어 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{1/2}=\frac{1}{2}(&E_L+E_R-\hat{M}A_p\Delta Q_p \\ &+(\hat{M}A_p-\Gamma_{e,1/2}|\Gamma_e^{-1}A_p|_{1/2})\Delta Q_p) \end{aligned} \quad (22)$$

이 때 아음속부 수치점성에서 나타나는 행렬 연산식을 간단히 Θ라 하면,

$$(\hat{M}A_p - \Gamma_{e,1/2}|\Gamma_e^{-1}A_p|_{1/2})\Gamma_{e,1/2}^{-1}\Delta Q = \Theta\Delta Q \quad (23)$$

행렬 Θ는 다음 두 종류의 고유값을 갖는다.

$$\lambda_{1,2} = \hat{c}(\hat{M}^2-1), \quad (24)$$
$$\lambda_{3,4,5} = \hat{c}(\hat{M}^2-1)+\hat{c}(1-|\hat{M}|)$$

따라서 Roe 수치기법을 HLLE 수치기법과 유사한 형태로 정리할 수 있다.

$$E_{1/2} = \frac{1}{2}[E_L+E_R-\tilde{M}A_p\Delta Q_p + \quad (25)$$
$$\hat{c}(\tilde{M}^2-1)\Gamma_e\Delta Q_p+\hat{c}(1-|\tilde{M}|)B\Delta Q]$$

$$B\Delta Q = (\Delta\rho_m - \frac{\Delta p}{\hat{c}^2})\begin{pmatrix}1\\ \hat{u}\\ \hat{v}\\ \hat{H}\\ \hat{Y}_1\end{pmatrix} + \hat{\rho}_m\begin{pmatrix}0\\ \Delta u - n_x\Delta U\\ \Delta v - n_y\Delta U\\ \Delta H - \hat{U}\Delta U - \frac{\Delta p}{\hat{\rho}_m}\\ \Delta Y_1\end{pmatrix}$$

Roe 수치기법은 HLLE 수치기법에 없는 $B\Delta Q$항을 갖고 있으며, 접촉 불연속면을 정확히 포착하는 대신 충격파 불안정 문제를 갖고 있다. S. Kim 등[4]은 홀짝 분리 문제에서 선형 섭동 분석을 통해 충격파 불안정 현상의 원인을 분석하고, 마하수 기반의 제어함수를 도입하였다. 같은 방법으로 압력장과 밀도장의 감쇄율과 공급율을 조절해주는 제어함수 f와 g를 도입하고, 전엔탈피 보존을 만족시키는 형태로 변환하면 다음과 같이 2상 유동의 RoeM 수치기법이 정리된다.

$$E_{1/2} = \frac{1}{2}[E_L+E_R-\tilde{M}A_p\Delta Q_p + \quad (26)$$
$$\hat{c}(\tilde{M}^2-1)\Delta Q^* + g\hat{c}(1-|\tilde{M}|)B\Delta Q^*]$$

여기서 $Q^* = [\rho_m, \rho_m u, \rho_m v, \rho_m H, \rho_m Y_1]^T$

$$B\Delta Q^* = (\Delta\rho_m - f\frac{\Delta p}{\hat{c}^2})\begin{pmatrix}1\\ \hat{u}\\ \hat{v}\\ \hat{H}\\ \hat{Y}_1\end{pmatrix} + \hat{\rho}_m\begin{pmatrix}0\\ \Delta u - n_x\Delta U\\ \Delta v - n_y\Delta U\\ \Delta H\\ \Delta Y_1\end{pmatrix}$$

이 때 제어함수 f와 g에는 다음과 같이 새롭게 고안된 2상 유동 충격파 포착항이 사용된다.

$$f = \begin{cases}1 & ,\hat{u}^2+\hat{v}^2 = 0\\ |\hat{M}|^h & ,\hat{u}^2+\hat{v}^2 \neq 0\end{cases} \quad (27)$$

여기서 $h = 1-\min(\Pi^*_{1/2}, \Pi^*_{L,1/2}, \Pi^*_{L,-1/2}, \Pi^*_{R,1/2}, \Pi^*_{R,-1/2})$,

$$g = \begin{cases}1 & ,\hat{M} = 0\\ |\hat{M}|^{1-\Pi^*_{1/2}} & ,\hat{M} \neq 0\end{cases} \quad (28)$$

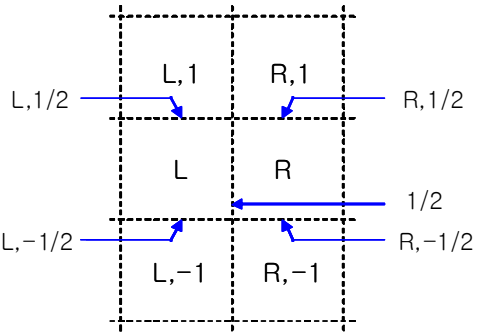


Fig. 3. Two-Dimensional Cell Interface

최종적으로 접촉 불연속면을 정확히 포착하면서도 팽창영역의 불안정성을 제거하기 위해 signal velocity b_1과 b_2를 도입한 2상 유동 RoeM 수치기법은 다음과 같이 정리된다.

$$E_{1/2} = \frac{1}{b_1-b_2}[b_1\times E_L - b_2\times E_R + \quad (29)$$
$$b_1\times b_2\times(\Delta Q^* - \frac{g}{1+|\tilde{M}|}B\Delta Q^*)]$$

여기서 $b_1 = \max(\hat{U}+\hat{c}, U_R+\hat{c}, 0)$

$b_2 = \min(\hat{U}-\hat{c}, U_L-\hat{c}, 0)$

식 (29)로 표현된 2상 유동 RoeM 수치기법은 기체역학에서 개발된 RoeM과 마찬가지로 충격파 안정성, 전엔탈피 보존성, 팽창 영역의 안정성이라는 장점을 지니게 된다.

3.3 2상 유동 AUSMPW+ 수치기법

FDS 형태의 수치기법과는 달리 AUSM 계열의 수치기법들은 지배방정식이 달라져도 똑같은 기본 형태를 사용할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 밀도차가 큰 2상 유동 문제에서는 각 상에 따라 달라지는 압력장이나 음속 특성 외에도, '물성치의 차이가 큰 상경계면'이라는 새로운 불연속면이 나타나게 되고, 여기에서 수치적인 불안정 현상이 나타날 가능성이 있다. 여기서는 상 경계면을 포함하는 임의의 2상 유동장에 대해서도 강건하고 정확한 수치해를 제공할 수 있도록 2상 유동 AUSMPW+ 수치기법을 개발하였다.

3.3.1 새로운 충격파 포착항 도입

AUSMPW+는 다음과 같은 형태를 갖는다[5,6].

$$E_{1/2} = \overline{M}_L^+ c_{1/2} Q_L^* + \overline{M}_R^- c_{1/2} Q_R^* + (P_L^+ p_L + P_R^- p_R) \quad (30)$$

1) $M_{1/2} \geqq 0$

$$\overline{M}_L^+ = M_L^+ + M_R^-[(1-\omega)(1+f_R)-f_L]$$
$$\overline{M}_R^- = M_R^-\omega(1+f_R)$$

2) $M_{1/2} < 0$

$$\overline{M}_L^+ = M_L^+ \omega(1+f_L)$$
$$\overline{M}_R^- = M_R^- + M_L^+[(1-\omega)(1+f_L) - f_R]$$

위 식에서 볼 수 있듯이, AUSMPW+는 압력 가중함수 ω와 $f_{L,R}$을 도입하여 좌, 우의 물성치를 적절히 고려해 줌으로써 충격파나 벽면 근처의 수치 진동 현상을 제거한다. 압력가중함수는 마하수 분할 함수에 직접적으로 사용되고 있어 해의 정확성과 강건성에 매우 큰 영향을 준다. 2상 유동 AUSMPW+에서는 기존의 압력가중함수에 3.1.2절에서 유도한 2상 유동 충격파 포착항을 사용하였다.

$$\omega = \max(\omega_1, \omega_2) \tag{31}$$

여기서 $\omega_1 = 1 - II_{1/2}^{*3}$

$$\omega_2 = 1 - \left(\frac{\min(\bar{p}_{L,1}, \bar{p}_{R,1}, \bar{p}_{L,2}, \bar{p}_{R,2})}{\max(\bar{p}_{L,1}, \bar{p}_{R,1}, \bar{p}_{L,2}, \bar{p}_{R,2})} \right)^2$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{\bar{p}_{L,R}}{\bar{p}_{1/2}} - 1\right) \times (1-\omega_2) \tag{32}$$

이와 같은 압력 가중함수의 변경만으로도 대부분의 2상 혼합유동을 푸는 데에 수치적인 어려움이 발생하지 않는다. 그러나 물성치의 구배가 큰 상 경계면이 존재하는 경우에는 다음과 같은 추가적인 고려가 필요하다.

3.3.2 제어면 음속 정의 변경

AUSM계열 수치기법을 상 경계면이 존재하는 2상 유동 문제에 적용하려면, 먼저 '제어면에서 음속을 어떻게 정의할 것인가' 하는 문제가 발생한다. 기체역학에서 AUSMPW+는 Prandtl 관계식을 이용하여 정상 수직 충격파를 하나의 중간 격자만을 사용하는 정확도로 포착할 수 있었다. 그러나 일반적인 2상 유동에서는 이와 같은 관계식이 존재하지 않으며, 특히 제어면과 상 경계면이 겹치는 경우에는 제어면 음속 정의가 더욱 어려워진다. 본 연구에서는 균질 혼합류 모델에 대한 지배방정식의 일관성 측면에서 임의의 2상 유동장에 대해 제어면 음속을 정의하고자 하였다.

Figure 4(a)와 같이 액체와 기체의 상 경계면이 존재하는 경우를 생각해 보자. 계산격자 1이 Fig. 4(b)와 같이 주어지면, 균질 혼합류 모델에서는 상 경계면을 포함하는 계산 격자는 혼합류의 음속에 해당하는 매우 낮은 음속을 예측한다. 이제 계산격자 2가 Fig. 4(c)와 같이 주어졌다고 하자. 상 경계면에서 물리적으로는 음속이 정의

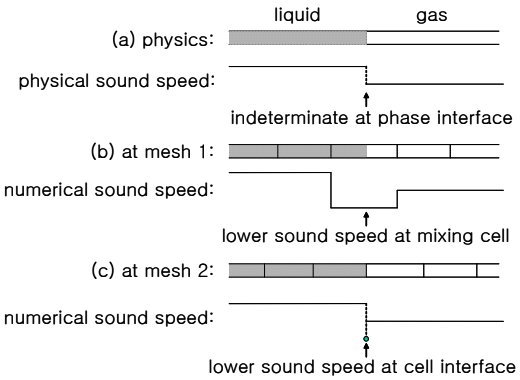


Fig. 4. Physical and numerical sound speed

되지 않는다. 그러나 Fig. 4(b)와의 일관성을 고려하면 좌, 우보다 낮은 음속이 예측되어야 한다. 이것은 단순히 좌, 우 격자에서 계산된 음속을 평균하거나 최대, 또는 최소값을 이용하여 제어면의 음속으로 사용할 수 없음을 의미한다.

Figure 4(c)와 같은 경 우에 좌, 우 격자의 음속보다 낮은 음속을 예측하기 위해서는, 좌, 우 격자의 질량 비율의 사이에 있는 값으로 제어면의 질량 비율을 정의하고, 이 값을 이용해 음속을 정의하면 된다. 실제로 Roe 수치기법에서도 제어면의 질량 비율이 Roe 평균값으로부터 계산되기 때문에, Fig. 4(c)와 같은 경우에 좌, 우 계산격자보다 낮은 제어면 음속을 예측한다. 본 연구에서는 AUSMPW+에서도 제어면의 음속 계산을 위해 Roe 평균된 질량 비율과 엔탈피를 사용하였다.

$$c_{1/2} = c_{1/2}(p_{1/2}, \hat{h}_m, \hat{Y}_1) \tag{33}$$

3.3.3 압력가중함수 $f_{L,R}$의 재정의

압력가중함수 중 $f_{L,R}$은 압력에 대한 차분항을 포함하여 벽면 근처의 수치 진동을 방지한다. 하지만 압력 차분항이 지나치게 커지면 수치 불안정성의 원인이 되기 때문에, 기존의 $f_{L,R}$이 밀도차가 큰 상경계면이 존재하는 2상 유동에도 적합한지 분석할 필요가 있다. 풍상 차분 수치기법은 일반적으로 다음과 같이 중심 차분과 수치점성의 합으로 표현할 수 있다.

$$E_{1/2} = \frac{1}{2}(E_L + E_R) - D \tag{34}$$

$0 \leqq M_{1/2} \leqq 1$인 경우에 AUSMPW+의 수치 점성은 다음과 같이 정리된다.

$$D_{AUSMPW+} \tag{35}$$

$$= \left\{ U_R + \frac{c_{1/2}}{2}(M_R-1)^2\omega(1+f_R) \right\} \Delta Q^* + \frac{U_R+U_L}{2c_{1/2}} Q_L^* \Delta U + \frac{c_{1/2}}{2}(M_R-1)^2 Q_L^* \Delta f - (P_L^+ p_L + P_R^- p_R)$$

여기서 $\Delta() = ()_R - ()_L$

여기서 Δf는 다음과 같이 Δp를 포함한다.

$$\Delta f = \frac{p_L p_R + \alpha_1 p_c (p_R + p_L) + \alpha_1 p_c^2}{p_L p_R + \alpha_1 p_c (p_R + p_L) + \alpha_1^2 p_c^2} \times \frac{\Delta p}{p_{1/2}} \times (1-\omega) \quad (36)$$

그런데 식 (35)에서 Δf앞에 곱해져 있는 $Q_L^* = \rho_{m,L}[1, u, v, H, Y_1]^T$는 제어면 좌측의 밀도가 곱해진 형태이다. 그러면 물-공기 계면과 같이 밀도차가 1000배에 이르는 두 유체의 상 경계면에서는 압력 차이에 의한 수치 점성이 과도하게 커져 수치적인 불안정 요소가 된다. 따라서 본 연구에서는 $f_{L,R}$에 제어면 좌, 우의 밀도를 고려하여 다음과 같이 새롭게 정의하였다.

$$f_{L,R}^* = \left(\frac{\bar{p}_{L,R}}{\bar{p}_s} - 1\right) \times (1-\omega) \times \frac{\min(\rho_{m,L}, \rho_{m,R})}{\rho_{m,L/R}} \quad (37)$$

이제 $0 \leqq M_{1/2} \leqq 1$에서 AUSMPW+의 밀도 플럭스 수치점성은 다음과 같이 정리된다.

$$D_{AUSMPW+}^{(\rho_m)} = \left\{ U_R + \frac{c_{1/2}}{2}(M_R-1)^2\omega(1+f_R) \right\} \Delta\rho_m + \frac{U_R+U_L}{2c_{1/2}} \rho_{m,L} \Delta U + \frac{c_{1/2}}{2}(M_R-1)^2 \min(\rho_{m,L}, \rho_{m,R}) \Delta f \quad (38)$$

RoeM 수치기법의 경우 같은 조건에서 밀도 플럭스의 수치점성은 다음과 같다.

$$D_{RoeM}^{(\rho_m)} = \hat{U}\Delta\rho_m + \frac{\hat{U}}{\hat{c}}\hat{\rho}_m \Delta U + f\left(\frac{1}{\hat{c}} - \frac{\hat{U}}{\hat{c}^2}\right)\Delta p \quad (39)$$

식 (38)과 (39)를 비교해보면, RoeM 수치기법 역시 압력차에 의한 수치점성을 갖고 있으나, 계수에 밀도가 포함되지 않으므로, 밀도차가 큰 상 경계면 문제에서도 수치 문제를 발생시키지 않는다.

이상의 과정을 통해 얻어진 2상 유동 AUSMPW+를 본래 형태와 비교하면, 새로운 음속의 정의로 하나의 중간 격자만을 사용하는 충격파 포착 능력이 완화되지만, slip line 포착 능력과 전엔탈피 보존성, 수치진동의 제거와 같은 특성은 유지한다.

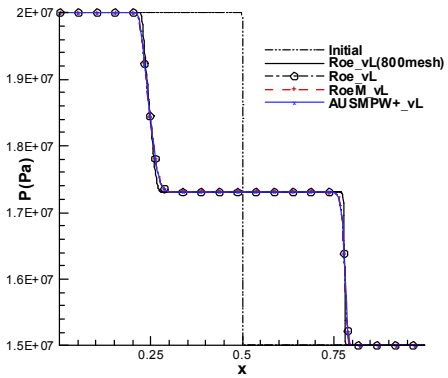
Ⅳ. 수치해석 결과

4.1 2상 혼합류 충격파관

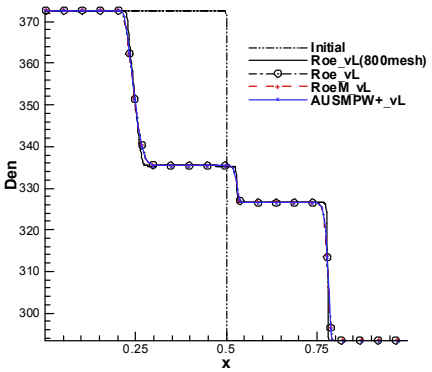
개발된 수치 기법을 검증하기 위하여 2상 혼합류의 충격파관 문제를 해석하였다. 충격파관 길이는 1이고, 200개의 계산 격자가 사용되었다. 문제 조건은 다음과 같다.

$$(p, u, Y_1, T)_L = (2\times10^7, 0, 0.5, 300), \quad x \leqq 0.5$$

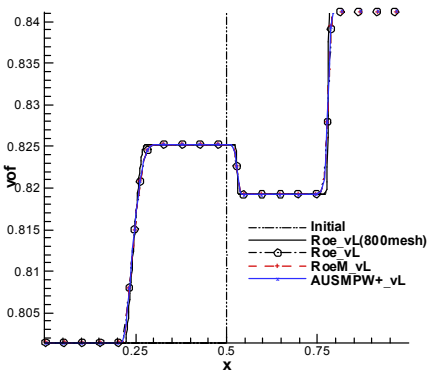
$$(p, u, Y_1, T)_R = (1.5\times10^7, 0, 0.5, 300), \quad x > 0.5$$



(a) Pressure profile



(b) Density profile



(c) Gas volume fraction profile

Fig. 5. Shock tube problem at $t = 1\times10^{-4}$

질량 비율이 같더라도 압력이 다르기 때문에, 부피 비율은 좌, 우가 각각 $\alpha_L = 0.801$, $\alpha_R = 0.841$로 서로 다르다. 2상 유동 Roe, RoeM, AUSMPW+의 결과를 4배 조밀한 격자계의 2상 유동 Roe 결과와 비교하였다.(Fig. 5)

위 계산에서 시간에 대해서는 1차 외재적 차분을 사용하였으며, 공간 정확도는 MUSCL을 van Leer 제한자와 함께 사용하였다.

$t = 0$에서 혼합류의 충격파와 접촉 불연속면은 우측으로, 팽창파는 좌측으로 이동하기 시작한다. 균질 혼합류 모델에서는 같은 계산격자의 액상과 기체상이 급격히 같은 온도가 된다고 가정하고, 온도 변화에 따른 엔탈피 변화가 액상에서 더 크므로, Fig. 5에서 보는 것과 같이 팽창 영역에서 기체상의 부피 비율이 증가한 것을 알 수 있다. 개발된 2상 유동 RoeM과 AUSMPW+의 결과는 기존에 널리 사용되고 있는 2상 유동 Roe의 결과와 유사한 정확도를 보였다.

4.2 혼합류 Quirk의 test

RoeM과 AUSMPW+의 가장 큰 특징은 충격파 안정성에 있다. 따라서 개발된 수치기법이 2상 혼합유동에 대해서도 이와 같은 특징을 유지하는지에 대한 검증이 필요하다. 널리 알려진 충격파 안정성 test 중 Quirk의 test를 수행하기 위해, 가운데 격자가 다음과 같이 섭동되어 있는 간격 1의 800×20 격자계에서 $M_s = 6.0$인 이동 충격파를 계산하였다. 충격파 안정성 test는 1차의 외재적 시간 적분과 1차 저확도의 공간 차분으로 수행하였다.

$$y_{i,j-mid} = \begin{cases} y_{j-mid} + 10^{-4}, & \text{for } i \; even \\ y_{j-mid} - 10^{-4}, & \text{for } i \; odd \end{cases}$$

질량 비율을 변화시켜가며 test를 수행했으며, 그 결과를 Table2에 기재하였다, 또한 $Y_1 = 0.1$인 혼합유동에 대한 결과를 Fig. 6에 나타내었다. Roe 수치기법은 액상에 가까운 영역을 제외하고는 충격파에 불안정한 모습을 보이는 반면, RoeM과 AUSMPW+는 2상 혼합유동에서도 충격파 안정적인 특징을 갖는 것을 알 수 있다.

Table 2. Summary of Quirk's test

Mass fraction	Roe	RoeM	AUSMPW+
$Y_1 = 1.0$ (pure gas)	Unstable	Stable	Stable
$Y_1 = 1 \times 10^{-1}$	Unstable	Stable	Stable
$Y_1 = 1 \times 10^{-1}$	Unstable	Stable	Stable
$Y_1 = 1 \times 10^{-1}$	Unstable	Stable	Stable
$Y_1 = 1 \times 10^{-1}$	Stable	Stable	Stable
$Y_1 = 1 \times 10^{-1}$	Stable	Stable	Stable
$Y_1 = 0$ (pure liquid)	Stable	Stable	Stable

4.3 혼합류 Sanders의 test

충격파 불안정 현상은 이동충격파의 속도가 느리거나 정지한 충격파인 경우 더 잘 드러나며, 이동 충격파 문제를 통과한 수치기법이라도 때때로 정지 충격파의 안정성 test를 통과하지 못하는 것으로 알려져 있다. 따라서 Sanders 등에 의해 제안된 문제에 따라[10], 다음과 같이 i=10번째에서 섭동되어 있는 간격 1의 100×40 격자계에서 M=3인 정지 충격파를 해석하였다.

$$x_{10,j} = 10 + 0.1\cos(j\pi/10)$$

질량 비율을 변화시켜가며 test를 수행했으며, 결과를 Table 3에 정리하였다. 수치적인 충격파 구조가 유지되는지 여부에 따라 'stable'과 'unstable'로 구분하였고, 상황에 따라 mode를

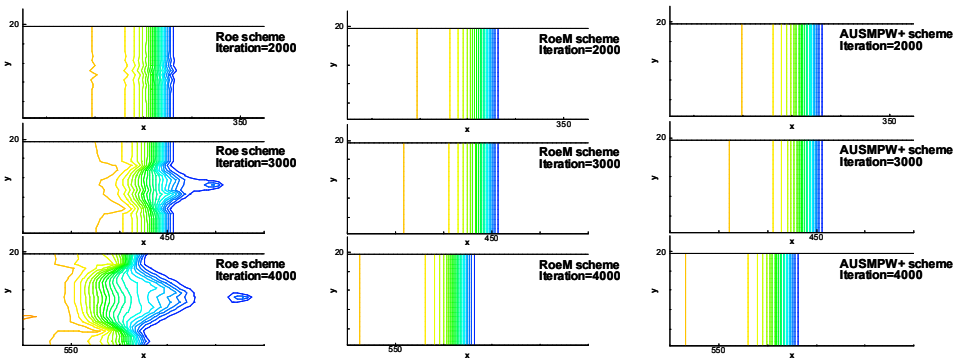


Fig. 6. Quirk's test on $Y_1 = 0.1$ mixture flow (density contour)

나누어 설명하였다. RoeM과 AUSMPW+는 모든 경우에 'stable'하였다.(Mode1: undeniably stable, Mode2: with wiggles in Mach contour, Mode4:with diffusive shock thickness) 한편 Roe의 경우 Quirk의 test에서 보여진 것과 같이, 액상에 가까운 영역에서 'stable'하였으나, 불안정 현상이 수치적인 충격파 구조 내부에 머무르거나(Mode3), 마하수 등고선도에서는 보이지 않지만 밀도 및 온도 등고선도에서 불안정성이 나타났다.(Mode5) 기체상에서의 Roe 수치기법은 잘 알려진 충격파 불안정 현상을 보였으며(Mode1), 질량 비율이 기체상에 가까운 영역에서 CFL에 상관없이 blow-up하기도 하였다.(Mode2)

대표적인 결과로 $Y_1 = 1.0$인 기체상인 경우를 Fig. 7-9에, $Y_1 = 1 \times 10^{-7}$인 혼합류인 경우를 Fig. 10-12에 나타내었다.

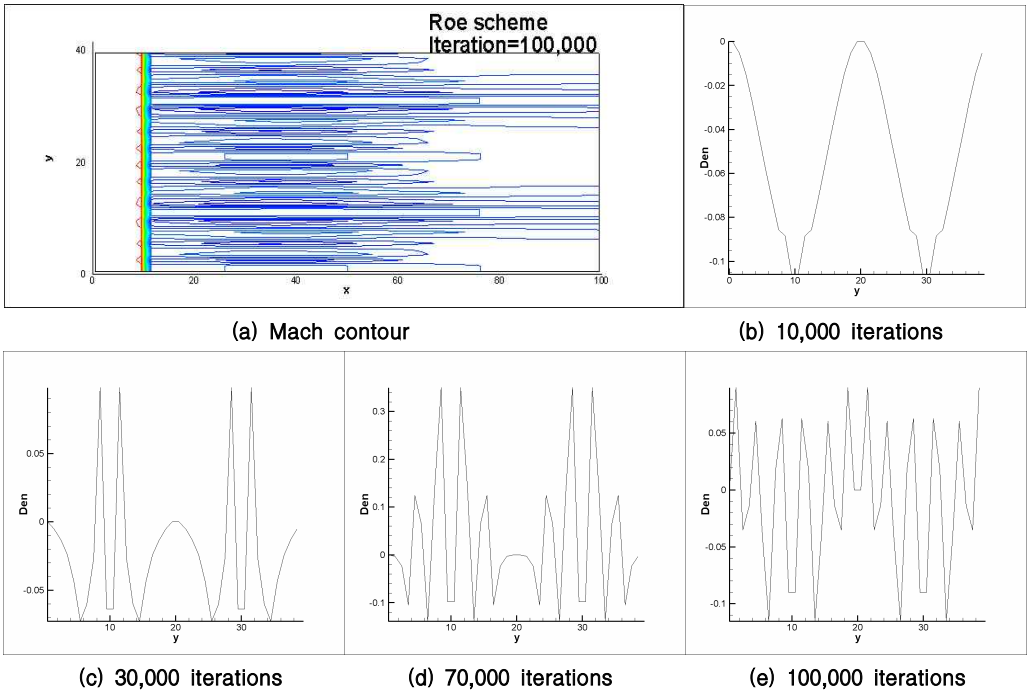
Table 3. Summary of Sanders' test

Mass fraction	Roe	RoeM	AUSMPW+
$Y_1 = 1.0$ (pure gas)	Unstable-Mode1	Stable-Mode1	Stable-Mode1
$Y_1 = 1 \times 10^{-1}$	Unstable-Mode2	Stable-Mode2	Stable-Mode1
$Y_1 = 5 \times 10^{-3}$	Unstable-Mode2	Stable-Mode1	Stable-Mode1
$Y_1 = 1 \times 10^{-7}$	Stable-Mode3	Stable-Mode1	Stable-Mode4
$Y_1 = 1 \times 10^{-8}$	Stable-Mode3	Stable-Mode1	Stable-Mode4
$Y_1 = 0$ (pure liquid)	Stable-Mode5	Stable-Mode1	Stable-Mode1

4.4 혼합류 초음속 실린더

$M = 8$이고 $Y_1 = 0.01$인 혼합 유동 실린더 문제를 해석하였다. 자유류의 마하수가 상대적으로 크지만, 혼합류의 낮은 음속 때문에 자유류의 속도는 약 258.12m/s이다. 상온, 상압의 자유류 조건을 가정하고 51×51 격자계에서 수치 실험을 진행하였으며, 이 때 시간에 대해 1차 외재적 차분을 하였으며, 공간 차분 정확도는 1차이다.

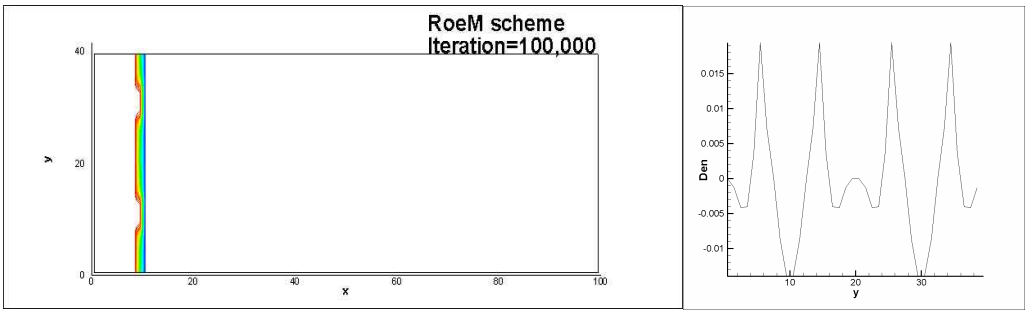
2상 유동 Roe 수치기법은 이 문제에서 수치해를 도출하지 못한 반면, 본 논문에서 제안한 RoeM과 AUSMPW+는 어려움 없이 해석이 가능했다. 해석 결과를 Fig. 13에 도시하였다. 이론과 비교하여 정체점의 압력은 RoeM의 경우 +0.095%의 오차를, AUSMPW+의 경우 -0.664%



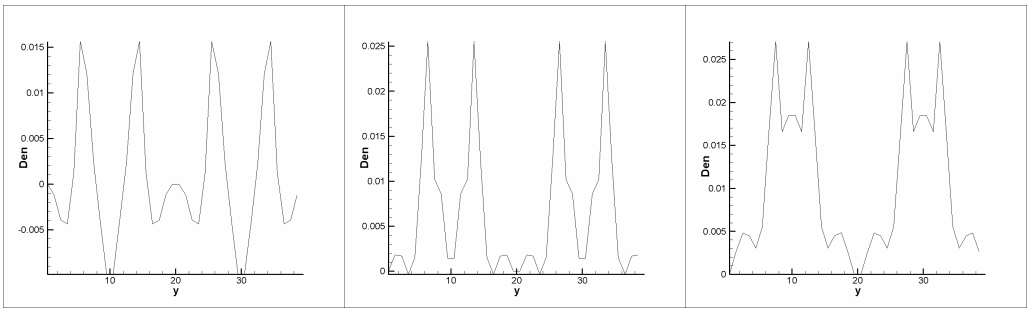
(a) Mach contour (b) 10,000 iterations

(c) 30,000 iterations (d) 70,000 iterations (e) 100,000 iterations

Fig. 7. Sanders' test with $Y_1 = 1.0$ gas flow, Roe
((b)-(e): normalized density($(\rho_m(11,y,t) - \rho_m(11,y,0))/\rho_m(11,y,0)$) at x = 11)

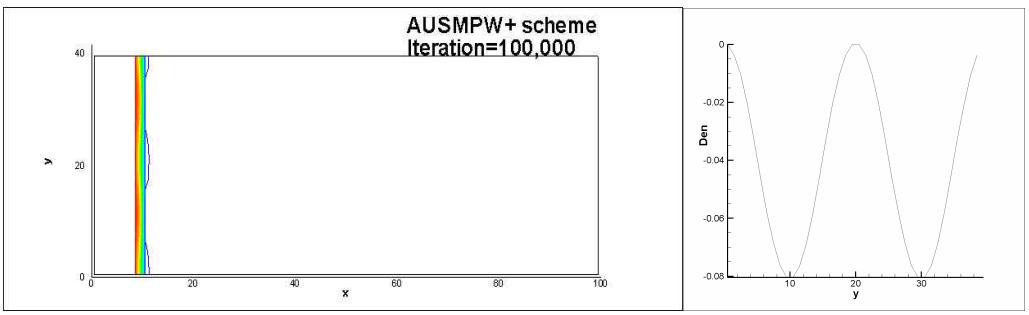


(a) Mach contour (b) 10,000 iterations

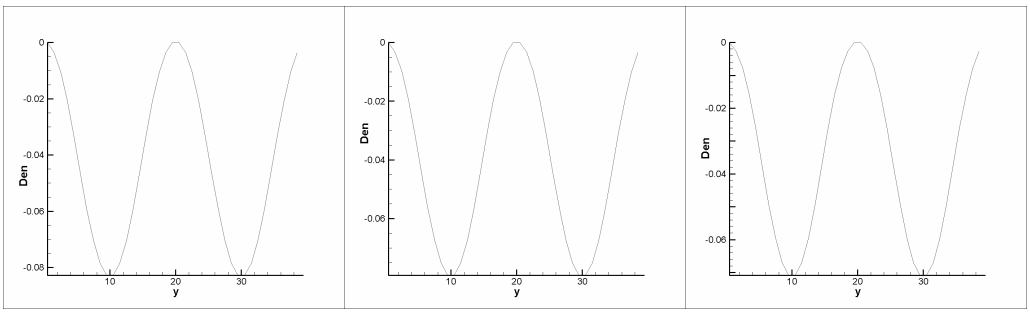


(c) 30,000 iterations (d) 70,000 iterations (e) 100,000 iterations

Fig. 8. Sanders' test with $Y_1 = 1.0$ gas flow, RoeM
((b)-(e): normalized density($(\rho_m(11,y,t) - \rho_m(11,y,0))/\rho_m(11,y,0)$) at x = 11)

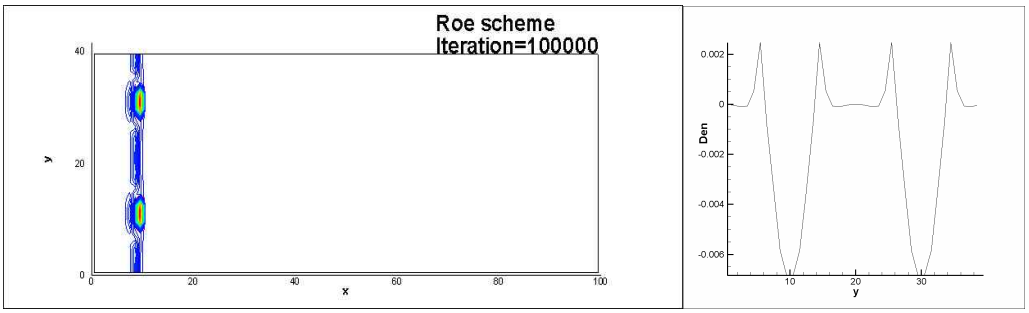


(a) Mach contour (b) 10,000 iterations

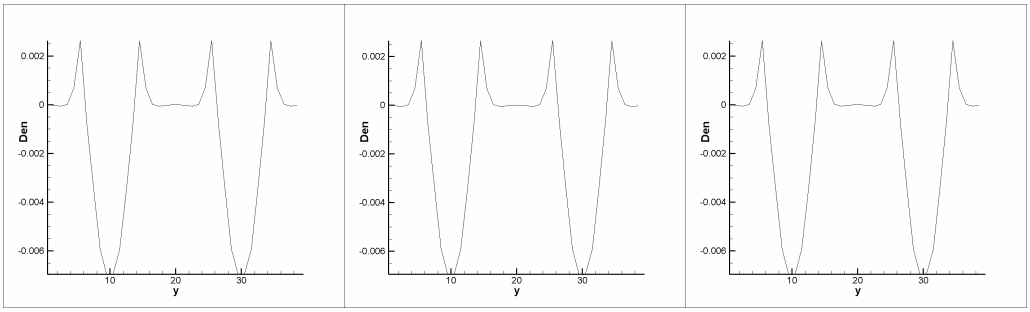


(c) 30,000 iterations (d) 70,000 iterations (e) 100,000 iterations

Fig. 9. Sanders' test with $Y_1 = 1.0$ gas flow, AUSMPW+
((b)-(e): normalized density($(\rho_m(11,y,t) - \rho_m(11,y,0))/\rho_m(11,y,0)$) at x = 11)

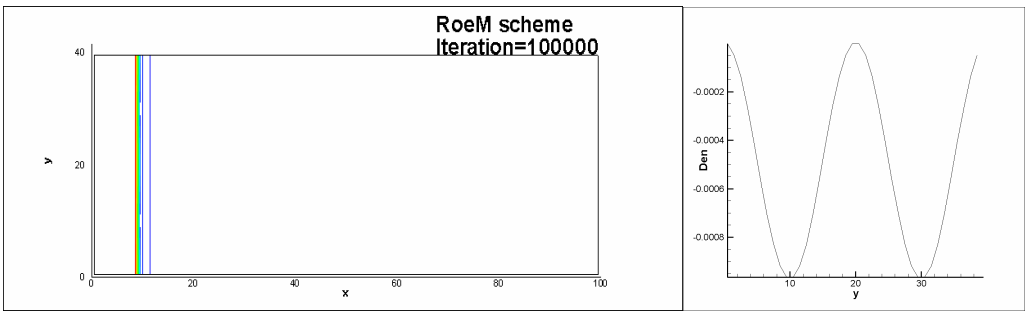


(a) Mach contour (b) 10,000 iterations

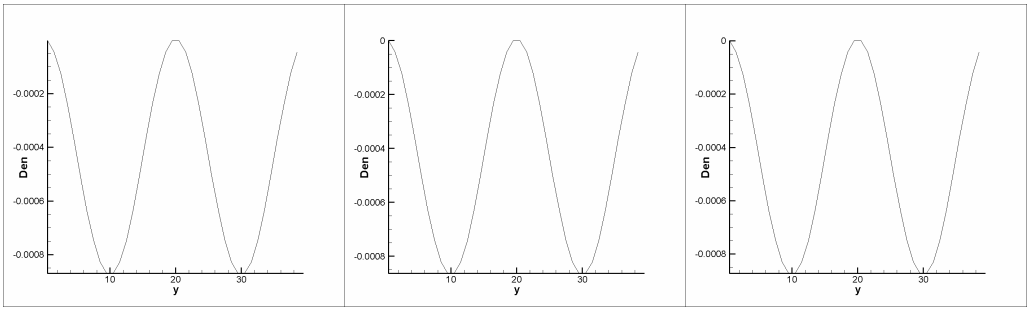


(c) 30,000 iterations (d) 70,000 iterations (e) 100,000 iterations

Fig. 10. Sanders' test with $Y_1 = 1 \times 10^{-7}$ mixture flow, Roe.
((b)-(e): normalized density($(\rho_m(11,y,t) - \rho_m(11,y,0))/\rho_m(11,y,0)$) at x = 11)

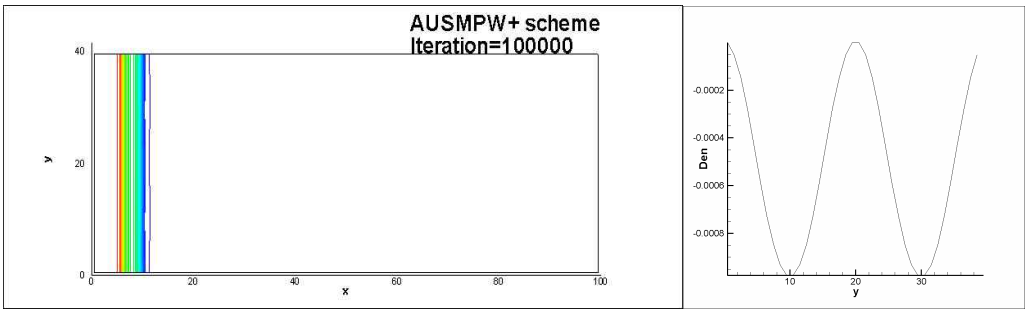


(a) Mach contour (b) 10,000 iterations



(c) 30,000 iterations (d) 70,000 iterations (e) 100,000 iterations

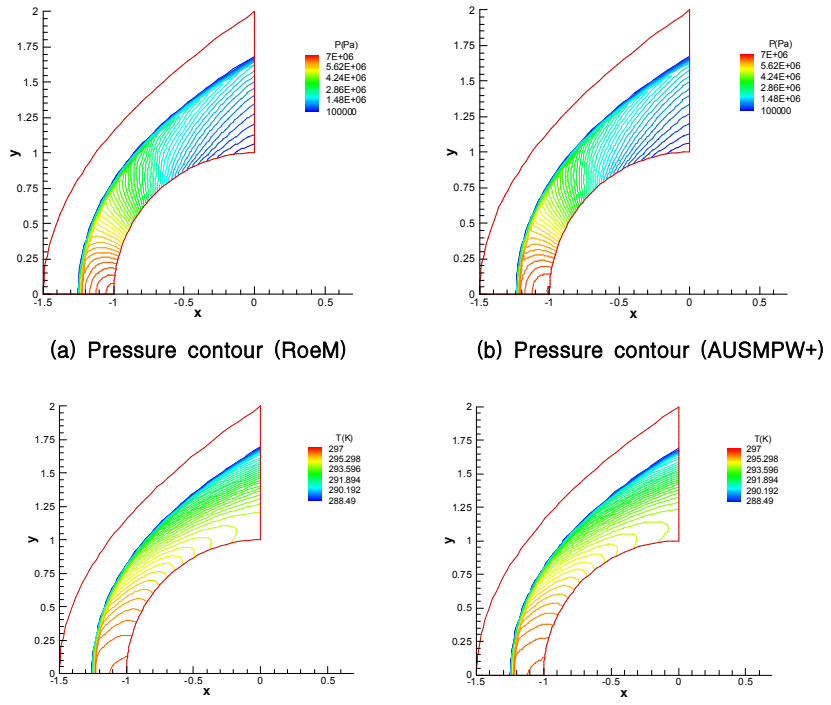
Fig. 11. Sanders' test with $Y_1 = 1 \times 10^{-7}$ mixture flow, RoeM
((b)-(e): normalized density($(\rho_m(11,y,t) - \rho_m(11,y,0))/\rho_m(11,y,0)$) at x = 11)



(a) Mach contour (b) 10,000 iterations

(c) 30,000 iterations (d) 70,000 iterations (e) 100,000 iterations

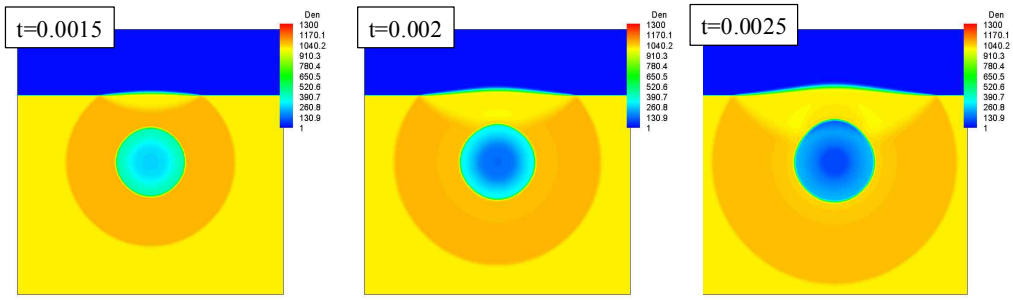
Fig. 12. Sanders' test with $Y_1 = 1 \times 10^{-7}$ mixture flow, AUSMPW+.
((b)-(e): normalized density($(\rho_m(11,y,t) - \rho_m(11,y,0))/\rho_m(11,y,0)$) at x = 11)



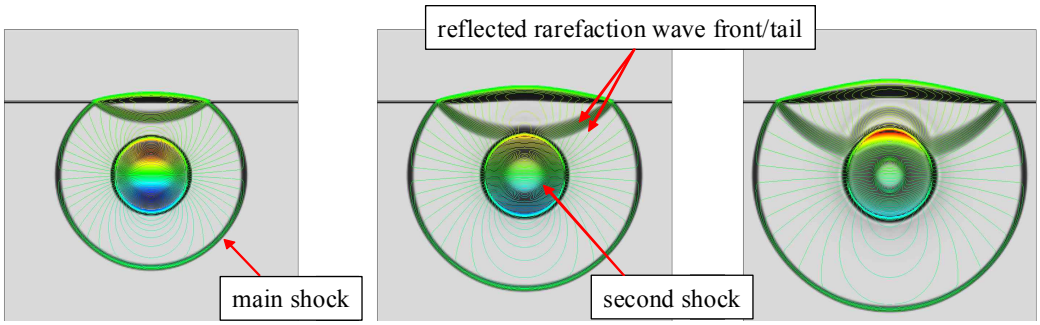
(a) Pressure contour (RoeM) (b) Pressure contour (AUSMPW+)

(c) Temperature contour (RoeM) (b) Temperature contour (AUSMPW+)

Fig. 13. Mixture blunt body flow problem ($M = 8$, $Y_1 = 0.01$)

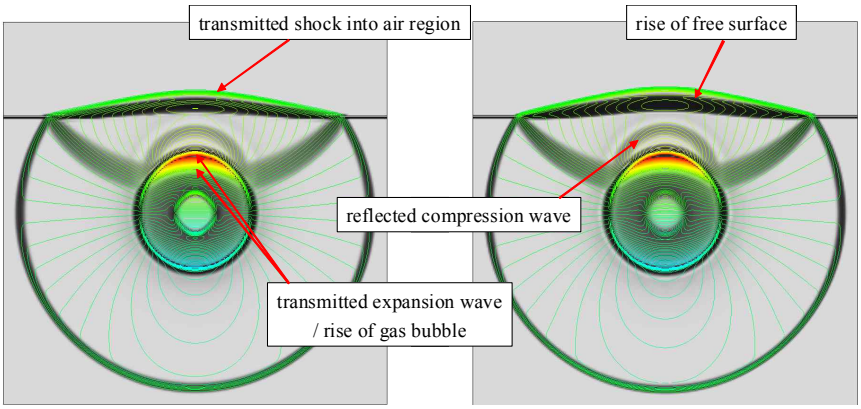


(a) Density contour at t = 0.0015, 0.002, 0.0025



(b) Numerical Schlieren and v-velocity contour at t = 0.0015, 0.002, 0.0025

Fig. 14. Underwater explosion (RoeM)



(a) AUSMPW+ (b) RoeM

Fig. 15. Comparison of the result at t=0.0025

의 오차를 보였다. 강한 충격파를 지나면서도 온도 변화는 크지 않았는데, 이는 액상부의 큰 열용량 때문이다.

4.5 수중 폭발 문제

공학적인 응용 문제로 개발된 수치기법을 수중 폭발 문제에 적용하였다. 초기에 r=1인 기포가 수심 3에 위치해 있으며, 폭발 직후 $p=9.12\times10^{8}Pa$, $\rho=1270kg/m^{3}$에 이르는 고압, 고밀도 상태라고 가정한다.[11] 대기압 조건은 $p=1.1\times10^{5}Pa$이다. 241×241의 계산 격자에서 비점성 해석을 수행하였고, 다차원 문제의 안정성을 위해 MLP-van Leer 제한자[12,13]를 사용하였다. 시간 적분은 3차 TVD-RK를 사용하였다.

t=0에서 고압의 수중 기포로부터 폭발파가 발생하며, 이 충격파가 수면에 닿으면 대기중으로

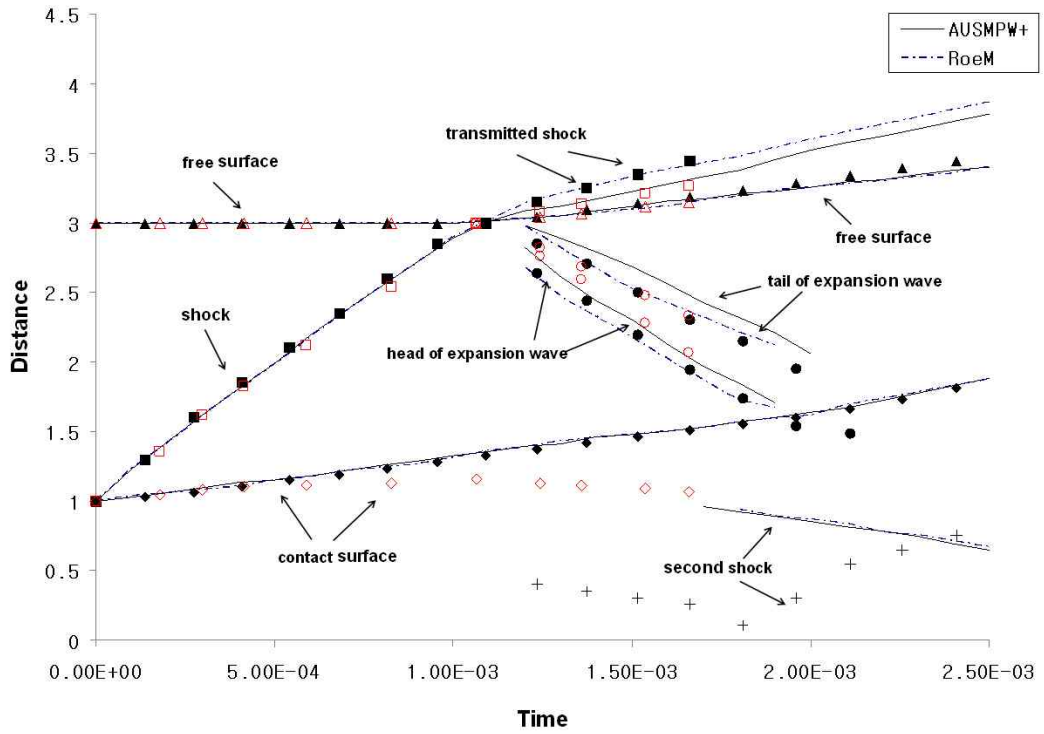


Fig. 16. Discontinuity comparison: the present computation (solid line: AUSMPW+, dashed dot: RoeM), Liu *et al.* (computation, ▲■●◆╋), Ballhaus and Holt (theory, △□○◇) (y-directional distance from the center of initial gas bubble)

투과되는 파는 그대로 충격파이고 수면 아래로 반사되는 파는 위상이 바뀌어 팽창파가 된다.(Fig. 14, t=0.0015) 이후 반사된 팽창파가 다시 수중의 기포와 만나면, 팽창파 이후의 낮은 압력으로 인해 기포 상부가 위쪽으로 가속하게 된다.(Fig. 14, t=0.0025) Figure 15에 t=0.0025의 확대 그림을 나타내었다. RoeM과 AUSMPW+ 모두 2상 유동의 파 전달 특성을 잘 모사하고 있다. 수면 위 공기 영역으로 전달된 충격파는 수심에 있는 충격파에 비해 압력 증가량이 매우 작으므로, v 속도 등고선도를 함께 그려 나타내었다.

계산 결과 얻어진 충격파, 상 경계면, 팽창파와 같은 불연속면들을 Ballhaus와 Holt의 이론치[14] 및 Liu 등의 계산 결과[11]와 비교하여 Fig. 16에 나타내었다. Ballhaus와 Holt는 축대칭 가정을 한 폭발파의 불연속면들을 Taylor전개하여 예측하였기 때문에 폭발 초기 이후에는 오차가 큰 값이 된다. Liu 등은 본 논문에서와 같이 2차원 계산을 수행하였고, Level Set 방법으로 두 상을 구분하였다. RoeM과 AUSMPW+는 모두 신뢰할 만한 결과를 도출하였다. 폭발파가 수면과 충돌한 이후 생성되는 수면 위쪽을 투과 충격파와 수면 아래로의 팽창파 위치에 다소의 차이가 있으나, 속도 및 경로 모두 다른 연구자의 예측 범위 내에 존재하였다. 폭발 이후 수중 기포에 발생하는 2차 충격파는 Ballhaus와 Holt는 고려하지 않았고, Liu 등의 결과와 본 연구 결과가 차이를 보이고 있다. 그러나 Liu 등은 액상에서 Tait의 상태방정식을 사용하여 온도 변화를 고려하지 않았기 때문에 수중 기포와 물 사이의 열전달을 모사하지 못했을 것으로 추정된다. 본 계산 결과에 따르면 수중 기포의 표면 부근 온도는 t=0에서 약 2500K였다가 t=0.001에서 1710K, t=0.0025에서는 1265K까지 낮아진다. 따라서 Liu등의 결과와 비교하여 기포 내부의 2차 충격파 속도가 느려진 것으로 예상된다.

V. 결 론

압축성 기체-액체의 2상 유동장을 정확하고 효율적으로 계산하기 위한 수치기법이 개발되었다. 기체 역학에서 개발된 RoeM과 AUSMPW+ 수치기법의 정확성, 효율성, 강건성을 그대로 유지하

면서 균질 혼합류 2상 유동으로 확장하였다. RoeM 및 AUSMPW+에서 중요한 역할을 담당하는 충격파 포착항을 일반적인 2상 유동에서의 압력장 변화를 고려하여 혼합류 상태 방정식에서 새롭게 유도하고, 평가, 적용하였다.

2상 유동 RoeM 수치기법은 2상 유동 Roe 수치기법으로부터 유도하였으며, 새로운 충격파 포착항을 마하수 기반함수 f와 g에 적용하였다. 기체상의 RoeM과 마찬가지로 충격파 안정성, 전엔탈피 보존성, 그리고 팽창 영역의 안정성을 그대로 가질 수 있도록 설계하였다. 2상 유동 AUSMPW+ 수치기법은 세 가지 측면에서 변화가 이루어졌다. 먼저 압력 가중함수 $f_{L,R}$과 w에 새로운 충격파 포착항을 적용하였다. 다음으로 상 경계면에서의 음속을 균질 혼합류 모델의 특징을 반영하여 새롭게 정의하였다. 마지막으로 제어함수 $f_{L,R}$에서 밀도차가 큰 상 경계면을 만나도 수치적으로 안정하도록 제어면 좌, 우의 밀도차를 반영하였다.

수치 실험을 통해 개발된 수치기법이 기체, 액체, 그리고 임의의 혼합 유동에서도 일관적으로 충격파 안정적인 특징을 갖는 것을 확인하였다. 또한 밀도차가 큰 상 경계면을 포함하는 문제에서도 2상 유동의 파 전달 특성을 올바르게 모사하는 것으로 나타났다.

후 기

본 연구는 서울대학교 기계항공공학부 BK21 사업과 항공우주 신기술 연구소, 국방과학연구소의 지원으로 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

참고문헌

1) Kunz, R. F., Lindau, J. W., Billet, M. L., and Stinebring, D. R., "Multiphase CFD Modeling of Developed and Supercavitating Flows", *VKI Special Course on Supercavitating Flows*, Feb. 2001.

2) Owis, F. M., and Nayfeh, A. H., "Computations of the Compressible Multiphase Flow Over the Cavitating High-Speed Torpedo", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 125, May 2003, pp. 459-468.

3) Edwards, J. R., Franklin, R. K., and Liou, M. -S., "Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Real Fluid Flows with Phase Transitions", *AIAA Journal*, Vol. 38(9), Sep. 2000, pp. 1624-1633.

4) Kim, S., Kim, C., Rho, O. -H., and Hong, S. K., "Cures for the shock instability: Development of a shock-stable Roe scheme", *Journal of Computational Physics*, Vol. 185, 2003, pp. 342-374.

5) Kim, K. H., Kim, C., and Rho, O. -H., "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows I. AUSMPW+ Scheme", *Journal of Computational Physics*, Vol. 174, 2001, pp. 38-80.

6) 김규홍, 이경태, 노오현, 김종암, "AUSMPW+ 수치기법 개발 및 분석", 한국항공우주학회지, Vol. 29(8), 2001, pp. 45-56.

7) Hankin, R. K. S., "The Euler Equations for Multiphase Compressible Flow in Conservation Form", *Journal of Computational Physics*, Vol. 172, 2001, pp. 808-826.

8) Luo, H., Baum, J. D., and Löhner, R., "On the computation of multi-material flows using ALE formulation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, 2004, pp. 304-328.

9) Kim, K. H., Lee, J. H., and Rho, O. -H., "An Improvement of AUSM Schemes by Introducing the Pressure-Based Weight Functions", *Computers & Fluids*, Vol. 27(3), 1998, pp. 311-346.

10) Sanders, R., Morano, E., and Druguet, M. -C., "Multidimensional Dissipation for Upwind Schemes: Stability and Applications to Gas Dynamics," *Journal of Computational Physics*, Vol. 145, 1998, pp. 511-537.

11) Liu, T. G., Khoo, B. C., Yeo, K. S., "The simulation of compressible multi-medium flow II. Application to 2D underwater shock refraction", *Computers & Fluids*, Vol. 30, 2001, pp. 315-337.

12) Kim, K. H., Kim, C., "Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows Part II: Multi-dimensional limiting process", *Journal of Computational Physics*, Vol. 208, 2005, pp. 570-615.

13) 윤성환, 김종암, 김규홍, "다차원 압축성 유동 해석을 위한 MLP 기법의 개발", 한국항공우주학회지, Vol. 34(7), 2006, pp.1-11.

14) Ballhaus, W. F. Jr., Holt, M., "Interaction between the ocean surface and underwater spherical blast waves", *Physics of Fluids*, Vol. 17, No. 6, 1974, pp. 1068-1079.