한국수학사학회지 제22권 제4호(2009년 11월), 115 - 128

不可知 類의 존재성과 선택공리*

경원대학교 수학정보학과 정세화
sehwa@kyungwon.ac.kr

홍성사 선생님과 홍영희 선생님의 정년퇴임을 즈음하여 두 분의 가르치심에 감사드리는 마음으로 이 논문을 바칩니다.

본 논문에서 von Neumann의 공리계를 수정하여 새로운 DVN공리계를 소개한다. 그리고 DVN공리계에서 불가지 류의 존재성을 조사하고, 불가지류와 선택공리의 관계를 논한다.

주제어: 후자집합, 표준집합, 불가지류, 선택공리, ZF 집합론, von Neumann 집합론, Dedekind 무한집합, 가산집합, 비가산집합, 가부번집합, 유한집합, 생성함수.

서론

집합이 수학의 이론으로서 독립적인 한 대상이 된 것은 19세기 말, Georg Cantor (1845~1918)가 1873년부터 1897년 사이에 발표한 일련의 주목할 만한 논문에서 비롯되었다. Cantor는 집합을 다음과 같이 직관적으로 정의하였다. 집합이란 "우리의 지각에 의하여 전체적으로 파악할 수 있는 일정하고 구별 지어지는 대상의 모임"이라고 하였다. 즉, Cantor에 의한 "집합"이란 어떤 조건 $P(x)$를 만족하는 대상 x의 전체 $\{x : P(x)\}$를 의미한다. 그의 무한집합에 관한 연구는 그 당시에 격렬한 논쟁을 불러일으켰으며, 크로네커를 대표로 하는 사람들의 비난과 공격은 치열했었다고 알려져 있다. 그러나 Dedekind(1831~1916)가 1888년 그의 '수란 무엇이며 수란 무엇이어야 하느냐?'라는 논문에서 자연수의 개념이 집합론의 기초 원리에서 도출됨을 밝히면서 집합론은 수학계의 모든 분야에서 없어서는 안 될 중요한 도구로 인정받기 시작하였다[1]. 그러나 아이러니하게도 거의 같은 시기에 집합론 자체에 여러 가지 역설이 내재되어 있음을 발견하게 되었다. 대표적인 논리적 모순은 Forti(1861~1931)와 Russell(1872~1970)에 의해 각각 1897년과 1901년에 발견되었다. 또한 Berry (1867~1928) 역시 의미론적 역설을 발견하였다. 결국 이러한 역설들로 인해 Cantor의 집합론 체계의 타당성에 대한 회의를

* 이 연구는 2009년도 경원대학교 지원에 의한 결과임

가지게 되면서 수학 기초론의 위기가 시작되었다[5]. 그러나 20세기 초부터 지금까지 수학자들은 집합론 체계의 완벽한 기초를 제공하여 역설을 극복함은 물론 현대수학의 업적(수체계, 관계 등)을 보존하고 발전시킬 수 있는 집합론 체계의 완성을 목적으로 여러 가지 방법을 제안하고 있다. 그 중 대표적인 것이 이 논문에서 다룰 공리론적 접근 방법이다. 그러면 공리론적 집합론이 어떻게 형성되고 정립되어 왔는지 간단히 기술하기로 한다.

Zermelo(1871～1953)는 Russell이 발견한 역설을 해결하기 위한 시도로 1908년에 최초의 공리적 집합론을 발표하였다. 그러나 Zermelo가 세운 공리체계는 체계상 불충분한 부분이 있었다. 대표적인 문제는 선택공리에서 사용한 "명확한 성질"의 "명확한"의 의미가 모호하여 비논리적이라는 것이었다. 1920년경에 Skolem(1887～1963)과 Fraenkel(1891～1965)은 "명확한 성질"이라는 것을 형식언어로 표현할 수 있는 것만으로 제한하여 논리적으로 이 문제를 해결하고, Zermelo 공리에 "정칙성공리"와 "치환공리"를 추가하여 새로운 공리계를 발표하였다. 이 공리계를 Zermelo-Fraenkel 집합론 또는 ZF 공리계라 부른다. 그 후 선택공리를 추가한 Zermelo-Fraenkel 집합론(Zermelo - Fraenkel set theory, with the axiom of choice, ZFC)이 공리적 집합론의 대표적인 한 형태로서 현대 수학의 기초를 이루는 체계로 가장 널리 사용되고 있다. 또 다른 공리론적 집합론의 대표적인 형태는 von Neumann (1903～1957)에 의해 1925년에 발표되었다. Neumann은 다음 두 사실이 결합하여 논리적 역설을 낳는다는 점에 주목하였다. 첫째는 "Russell의 집합"이 너무 크다는 것이다. 둘째는 이 "큰" 집합이 어떤 집합의 원소가 될 수 있다고 하는 사실이다. 이 두 사실 중 Zermelo는 첫째 사실만을 고려하여 너무 큰 집합을 만들 수 없다고 제한함으로서 역설을 극복하였다. 그러나 Neumann은 둘째 사실도 고려하여 "큰"집합의 존재를 허용하고 그것이 집합의 원소가 될 수 없다고 하였다. 그러나 Neumann의 공리체계 역시 Gődel(1906～1978)과 Bernays(1888～1977)에 의해 수정되고 보완되었다. 이 수정된 공리체계를 Neumann-Gődel-Bernays(NGB) 집합론이라 부른다. ZFC공리계와 NGB공리계는 본질적으로 서로 같다는 사실은 잘 알려져 있다([4], [5]). 그리고 ZFC 공리계와 NGB 공리계는 모두 "후자 집합이 존재한다."를 무한공리로 채택하고 있다. 이 공리는 두 공리계에서 무한집합의 존재성을 보장할 뿐만 아니라 현대수학의 모든 대상들이 집합임을 보장한다.

이 논문의 목적은 Pinter에 의해 수정된 Neumann공리체계의 "무한공리"를 "Dedekind 무한집합"을 이용하여 수정하고, 수정된 공리체계에서 셈 가능성의 관점에서 집합을 분류하는 것이다. 또한 집합을 분류하는 과정에서 선택공리가 필요한 이유에 대하여 논하는 것이다. 1절에서 후자집합의 개념을 소개하고 그 개념의 성질을 조사한다. 그리고 후자집합을 이용하여 집합을 가부번집합, 유한집합, 비가산집합으로 분류한다. 2절에서 새로운 공리계에서 불가지류의 존재성과 선택공리의 관계를 논한다. 마지막으로 결론에서는 1, 2절에서 논한 내용을 정리하고 향후 연구 과제를 제안한다.

이 논문에서 언급되지 않고 쓰인 정의와 정리는 참고문헌 [5]를 참고하였다.

1. q-후자집합

이절에서는 함수를 이용하여 후자집합의 개념을 정의하고, 이 개념을 이용하여 집합을 가산집합, 유한집합, 비가산집합으로 분할할 수 있는지에 대하여 논한다. 그리고 유한집합과 무한집합으로 분할하는 이분법에 대해서도 함께 논한다.

정의 1.1) X는 집합이고 q는 X의 원소라 하자. 이때 함수 $s: X \to X$에 대해, 다음 두 조건을 만족하는 X의 부분집합 P을 s에 관한 **X의 q-후자집합**(successor set)이라 부른다.

S1) $q \in P$이고,

S2) $x \in P$이면 $s(x) \in P$이다.

S1)에 의해 모든 q-후자집합은 공집합이 아니다. 집합 X의 함수 $s: X \to X$에 관한 모든 q-후자집합들의 집합을 $s_q(X)$로 나타낸다. 집합 X는 s에 관한 X의 q-후자집합이므로, $s_q(X)$는 공집합이 아니다. 그리고 집합 X의 함수 $s: X \to X$에 관한 모든 q-후자집합들의 교집합 또한 s에 관한 X의 q-후자집합이다. 집합 X의 모든 q-후자집합들의 교집합을 $c_q(X)$로 나타낸다.

정리 1.2) 임의 집합 X와 함수 $s: X \to X$에 대해 다음이 성립한다.

1) $X = \cup\{c_q(X): q \in X\}$.

2) X의 원소 q에 대해, $s(c_q(X)) = c_q(X)$ 또는 $s(c_q(X)) = c_q(X) - \{q\}$이다.

3) 만약 $s(q) = p$이고 $q \in c_p(X)$면, $c_q(X) = c_p(X)$이다.

증명) 1)은 S1)에 의해 분명하다.

2) $q \in X$이므로 $q \in s(c_q(X))$ 이거나 $q \in X - s(c_q(X))$이다. 그러면 $q \in X - s(c_q(X))$라 하자. S2)에 의해 $s(c_q(X)) \subseteq c_q(X)$이므로 이제 $c_q(X) - \{q\} \subseteq s(c_q(X))$임을 보이면 된다. $p \in c_q(X) - \{q\}$이면서 $p \in X - s(c_q(X))$인 p가 X에 존재한다고 하고, $\alpha = c_q(X) - \{p\}$라 놓자. 이제 α가 s에 관한 X의 q-후자집합임을 보이기로 한다. $p \neq q$이므로 $q \in \alpha$이다. 만약 $x \in \alpha$이면 $s(x) \in c_q(X)$이고 $p \notin s(c_q(X))$이므로 $s(x) \neq p$이다. 그러므로 $s(x) \in \alpha$이다. 따라서 α는 s에 관한 X의 q-후자집합이다. 그러나 $p \in X - \alpha$이므로 $\alpha \subset c_q(X)$이다. 이 사실은 $c_q(X)$의 정의에 모순이다. 따라서 $c_q(X) - \{q\} \subseteq s(c_q(X))$이다. 그런데 $s(c_q(X)) \subseteq c_q(X)$이므로 $s(c_q(X)) = c_q(X) - \{q\}$이다. 또한 만약 $q \in s(c_q(X))$이면 $s(c_q(X)) = c_q(X)$이다.

3)은 정의에 의해 분명하다.

정리 1.3) 만약 함수 $s: X \to X$가 단사이고 $p,\ q \in X$이면 다음이 성립한다.

1) $q \in s(c_q(X))$이고 $q \in c_p(X)$이면 $c_q(X) = c_p(X)$이다.

2) 만약 $p, q \in X - s(X)$이고 $p \neq q$이면 $c_q(X) \cap c_p(X) = \varnothing$이다.

3) $B = \cup\{c_q(X) : q \in X - s(X)\}$라 하면 $s: X - B \to X - B$는 전단사이다.

증명) 1) $q \in c_p(X)$이므로 $c_q(X)$의 정의에 의해 $c_q(X) \subseteq c_p(X)$이다. 이제 $p \in c_q(X)$임을 보이면 된다. $\gamma = X - c_q(X)$라 하고 $p \in \gamma$하자. 이제 γ가 S2)를 만족함을 보이자. $x \in \gamma$라 하자. 이 때 $s(x) \in X$이다. 이제 $s(x) \in c_q(X)$라 하면 $s(c_q(X)) = c_q(X)$ 이므로 $s(x) = s(y)$인 y가 $c_q(X)$에 존재한다. s는 단사이므로 $x = y$이다. 그러므로 $x \in c_q(X)$이다. 이 사실은 $x \notin c_q(X)$라는 사실과 모순이다. 따라서 $s(x) \in \gamma$이다. $p \in \gamma$이므로 $c_p(X) \subseteq \gamma$이다. 또한 이 사실은 $c_q(X) \subseteq c_p(X)$라는 사실과 모순이다. 따라서 $p \in c_q(X)$이므로 $c_p(X) \subseteq c_q(X)$이고, 결국 $c_q(X) = c_p(X)$이다.

2) $\beta = X - c_p(X)$라 놓자. $q \in \beta$이다. 왜냐하면 $q \in c_p(X)$라 하면, $p \neq q$이므로 위 정리의 2)에 의하여 $s(x) = q$인 $x \in c_p(X)$가 존재한다. 이 사실은 $q \in X - s(X)$라는 사실과 모순이다. 그러므로 $q \in \beta$이다. 이제 $y \in \beta$라 하면 $s(y) \in X$이다. $s(y) \in c_p(X)$이라 하면 $p \in X - s(X)$이므로 $s(y) \neq p$이고 다시 위 정리의 2)에 의해 $s(y) = s(z)$인 $z \in c_p(X)$가 존재한다. s는 단사이므로 $y = z$이고, $y \in c_p(X)$이다. 이 사실은 $y \in \beta$라는 사실과 모순이다. 따라서 $s(y) \in \beta$이다. 결국 $c_q(X) \cap c_p(X) = \varnothing$이다.

3) $C = X - B$라 놓고 $a \in C$라 하자. 만약 $s(a) \in B$이면 $q \in X - s(X)$와 $x \in c_q(X)$가 존재해서 $s(a) = s(x)$이다. 함수 $s: X \to X$는 단사이므로 $a = x$이고 $a \in c_q(X)$이다. 이 사실은 $a \in C$라는 사실과 모순이다. 따라서 $s(a) \in C$이다. 그러므로 $s: C \to C$는 단사함수이다. 이제 전사임을 보이자. $c \in C$라 하면 $c \in s(X)$이므로 $s(y) = c$인 $y \in X$가 존재한다. 이제 $y \in B$라 하면 $y \in c_p(X)$인 $p \in X - s(X)$가 존재한다. S2)에 의해 $s(y) = c \in c_p(X)$이다. 이 사실은 $c \in C$라는 사실과 모순이다. 따라서 $y \in C$이고, $s: C \to C$는 전단사함수이다.

위 정리 2)와 3)에 의해 함수 $s: X \to X$가 단사이면 집합 X를 B와 C로 분할할 수 있다. 단, $B = \cup\{c_q(X) : q \in X - s(X)\}$이고 $C = X - B$이다. 또한 함수 s는 단사이면서 전사가 아닌 함수 $h: B \to B$와 전단사함수 $g: C \to C$로 분해할 수 있다. 단, $h,\ g \subseteq s$이다.

1888년에 Dedekind는 다음과 같이 무한집합과 유한집합을 정의하였다.

정의 1.4) 어떤 집합이 자기 자신의 진부분집합과 대등하면 그 집합을 Dedekind 무한집합이라 하고, Dedekind 무한집합이 아닌 집합은 Dedekind 유한집합이라 한다.

다음 정리는 [5]에서 찾아 볼 수 있다. 이제 우리는 후자집합을 이용하여 다음 정리가 성립함을 보인다.

정리 1.5) 어떤 집합이 Dedekind 무한집합일 필요충분조건은 그 집합과 그 집합에서 한 원소를 뺀 나머지 집합이 대등한 것이다.

증명) X를 Dedekind 무한집합이라 하면 $X-s(X)\neq\varnothing$인 단사함수 $s: X\to X$가 존재한다. 그리고 $q\in X-s(X)$라 하면 $s(c_q(X))=c_q(X)-\{q\}$이다. 즉, $c_q(X)$는 X의 부분집합이다. 이제 다음과 같이 함수 $g: X\to X$를 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} s(x), & x\in c_q(X) \\ x\ \ , & x\in X-c_q(X) \end{cases}.$$

그러면 분명히 함수 g는 단사이고 $g(X)=X-\{q\}$이다. 그러므로 X와 $X-\{q\}$는 대등하다. 역은 Dedekind 무한집합의 정의에 의해 분명하다.

이제 이상의 사실을 기반으로 생성함수를 정의한다.

정의 1.6) X는 집합이고 q는 X의 원소라 하자. 이 때 $X=c_q(X)$을 만족하는 단사함수 $s: X\to X$를 **X의 q-생성함수(generating function)**라 부른다.

생성함수를 이용하여 다음과 같이 집합을 분류할 수 있다.

정의 1.7) 1) 집합 X의 q-생성함수가 존재하면 그 집합을 **가산집합(countable set)**이라 한다.
2) 집합 X의 q-생성함수가 존재하지 않는다면 그 집합을 **비가산집합(uncountable set)**이라 한다.

그리고 다시 가산집합은 다음과 같이 분류할 수 있다.

정의 1.8) 1) $s(c_q(X))=c_q(X)-\{q\}$를 만족하는 q-생성함수가 존재하면 X를 **가부번집합(denumerable set)**이라 한다.
2) $s(c_q(X))=c_q(X)$을 만족하는 q-생성함수가 존재하면 X를 **유한집합(finite set)**이라 한다.

다음 정리의 증명은 [2, 5]에서 찾아볼 수 있다. 그러나 여기서 제시한 증명방법은

직전자의 개념을 이용한 것으로 [2, 5]와는 다르다.

Recursion 정리) a가 집합 A의 고정된 원소이며, $f: A \to A$를 함수라 하고, q는 가부번집합 X의 원소이며, 함수 $s: X \to X$를 X의 q-생성함수라 하면 다음과 같이 정의된 집합 X로부터 A로의 함수 γ가 유일하게 존재한다.

R1) $\gamma(q) = a$

R2) $\gamma(s(x)) = f(\gamma(x)),\ \forall x \in X.$

증명) $Y = X \times A$라 놓고 $\alpha: Y \to Y$을 다음과 같이 정의된 함수라 하자. 임의의 $(x, y) \in Y$에 대해 $\alpha(x, y) = (s(x), f(y))$이다. $\gamma = c_{(q,\,a)}(Y)$라 놓자. 이 때 정리 1.2의 2)에 의해 $\gamma = \alpha(\gamma) - \{(q, a)\}$이고 $\gamma \subseteq X \times A$이다. 또한 γ는 R1)과 R2)를 만족한다. 이제 γ가 집합 X로부터 A로의 함수임을 보이자. 분명히 $q \in dom(\gamma)$이다. 만약 $x \in dom(\gamma)$라 하면 $(x, y) \in \gamma$인 $y \in A$가 존재한다. γ의 정의에 의해

$$\alpha(x, y) = (s(x), f(y)) \in \gamma$$

이다. 그러므로 $s(x) \in dom(\gamma)$이다. 따라서 γ의 정의에 의해 $dom(\gamma) = X$이다. 이제

$$I = \{x \in X : (x, a) \in \gamma\text{이고 } (x, b) \in \gamma\text{이면 } a = b\text{이다}\}$$

라 놓자. $\gamma = \alpha(\gamma) - \{(q, a)\}$이므로, $q \in I$이다. 이제 $x \in I$라 하고 $(x, y) \in \gamma$라 하자. $(s(x), z) \in \gamma$라 하면 $\gamma = \alpha(\gamma) - \{(q, a)\}$이고 s가 단사이므로$(s(x), f(b)) = (s(x), z)$인 $(x, b) \in \gamma$가 존재한다. $x \in I$이므로 $y = b$이다. 따라서 $f(y) = z$이다. 그러므로 $s(x) \in I$이고 X의 정의에 의해서 $X = I$이다. 따라서 γ는 함수이다. 마지막으로 γ의 유일성을 보인다. β를 R1)과 R2)를 만족하는 또 다른 함수라 하고,

$$C = \{x \in X \mid \gamma(x) = \beta(x)\}$$

라 놓자. 이 때 분명히 $q \in C$이다. $x \in C$라 하면

$$\gamma(s(x)) = f(\gamma(x)) = f(s(x)) = \beta(s(x))$$

이다. 그러므로 $s(x) \in C$이다. 그러므로 X의 정의에 의해 $C = X$이다.

따름정리 1.9) 위 정리에서 γ가 전단사함수일 필요충분조건은 A가 가부번집합이다.

증명) 함수 $\gamma: X \to A$를 전단사라 하고 $f(u) = f(v)$라 하면 $u, v \in A$ 각각에 대해 $\gamma(x) = u$이고 $\gamma(y) = v$인 $x,\ y \in X$가 존재한다. 그러므로

$$\gamma(s(x)) = f(u) = f(v) = \gamma(s(y))$$

이다. 그런데 γ와 s는 단사함수이므로 $x = y$이고 $u = v$이다. $u \in A - f(A)$라 하자.

γ는 전사이므로 $\gamma(x) = u$인 $x \in X$가 존재한다. 만약 $u \neq a$이면 $x \neq q$이다. 그러므로 $s(y) = x$인 $y \in X$가 존재한다. 따라서 $f(\gamma(y)) = \gamma(s(y)) = u$ 이고 $\gamma(y) \in A$ 이므로 $u \in f(A)$이다. 이 사실은 $u \in A - f(A)$라는 사실과 모순이다. 그러므로 $u = a$이다. 역으로, A가 가부번집합이라 하자. $\gamma(q) = a$이므로 $a \in \gamma(X)$이다. $u \in \gamma(X)$라 하자. 그러면 $\gamma(x) = u$인 $x \in X$가 존재한다. 그러므로 $\gamma(s(x)) = f(\gamma(x)) = f(u)$이고 $s(x) \in X$이므로 $f(u) \in \gamma(X)$이다. A가 가부번집합이므로 $A = \gamma(X)$이다. 끝으로 γ가 단사임을 보이기로 한다. 정리

1.2의 2)에 의해 $\gamma=\alpha(\gamma)-\{(q,a)\}$이므로 $\gamma(q)=\gamma(x)=a$이면 $q=x$이다. 이제 x를 $\gamma(x)=\gamma(y)$이면 $x=y$인 X의 원소라 하자. $\gamma(s(x))=\gamma(z)$라 하자. $z=q$이면 $\gamma(s(x))=\gamma(q)=a$이므로 $s(x)=q$이다. 이 사실은 $q\in X-s(X)$라는 사실과 모순이다. 그러므로 $z\neq q$이다. 정리 1.2의 2)에 의해 $s(u)=z$인 $u\in X$가 존재한다. $\gamma(s(x))=\gamma(z)$이므로 $f(\gamma(x))=\gamma(s(x))=\gamma(s(u))=f(\gamma(u))$이다. 그런데 f는 단사이므로 $\gamma(x)=\gamma(u)$이고 가정에 의해 $x=u$이다. 따라서 $s(x)=z$이다. 결국 X는 가부번집합이므로 γ는 단사함수이다.

이제 가부번집합은 정렬집합임을 보인다.

정리 1.10) X를 가부번집합이라 하고 $s: X\rightarrow X$를 X의 q-생성함수라 하자. 다음과 같이 정의된 X의 관계 $\leq$는 정렬 순서이다.

$$x\leq y \Leftrightarrow x=y \text{ 또는 } y\in c_x(X)$$

증명) 임의의 $x\in X$에 대해 $x=x$이므로 $x\leq x$이다. 만약 $x\leq y$이고 $y\leq x$라 하자. $x\neq y$이면 $y\in c_x(X)$이고 $x\in c_y(X)$이므로 $c_x(X)=c_y(X)$이다. 따라서 $x\neq y$이므로 $x=s(z)$인 $z\in c_y(X)$가 존재한다. $c_x(X)=c_y(X)$이므로 $x\in s(c_x(X))$이다. 한편 $c_q(X)=X$이므로 $x\in c_q(X)$이다. 정리 1.3의 1)에 의해 $c_x(X)=c_q(X)$이므로

$$X-\{q\}=s(c_q(X))=s(c_x(X))=c_x(X)=c_q(X)=X$$

와 같이 모순이 유도된다. 그러므로 $x=y$이다. $x\leq y$이고 $y\leq z$라 하자. 만약 $x\neq y$이고 $y\neq z$이면 $c_x(X)\subset c_y(Y)\subset c_z(Z)$이므로 $x\in c_z(X)$이다. 따라서 $x\leq z$이다. 만약 $x=y$이고 $y\in c_z(X)$이면 $x\in c_z(X)$이다. 따라서 $x\leq z$이다. 만약 $y=z$이고 $x\in c_y(X)$이면 $x\in c_z(X)$이다. 따라서 $x\leq z$이다. 만약 $x=y$이고 $y=z$이면 $x=z$이다. 따라서 $x\leq z$이다. 그러므로 관계 $\leq$는 순서이다. 이제 $\leq$는 정렬순서임을 보이자. $X=c_q(X)$이므로 모든 $x\in X$에 대해 $q\leq x$이다. 그러므로 q는 X의 최소원이다. 집합 A를 최소원이 없는 X의 부분집합이라 하자.

$$L=\{x\in X: x\leq y, \forall y\in A\}$$

라 놓자. $x\in L$이라 하자. $x\in A$이면 x는 A의 최소원이다. 이 사실은 A는 최소원이 없다는 사실에 모순이다. 그러므로 모든 A의 원소 y에 대해 $x<y$이다. 그러므로 $s(x)\leq y$이다. 따라서 $L=X$이다. 그러므로 $A=\varnothing$이다.

Recursion 정리와 위 정리에 의해 다음 따름정리가 성립한다.

따름정리 1.11) Recursion 정리에서 A가 유한집합이고 $f: A\rightarrow A$를 A의 a-생성함수라 하면 A는 X의 단편(section)과 대등하다.

증명) $f(b)=a$라 하고, y_b을 $\gamma^{-1}(b)$의 최소원이라 하자. 이 때 A는

$$T=\{x\in X: x\leq y_b\}$$

와 대등하다. 왜냐하면 $\gamma(X) \subseteq A$이고 $T \subseteq X$이므로 $\gamma(T) \subseteq A$이다. 이제 $A \subseteq \gamma(T)$임을 보이자. $q \in T$이고 $\gamma(q) = a$이므로 $a \in \gamma(T)$이다. 만약 $c \in \gamma(T) - \{b\}$라 하면 $\gamma(z) = c$인 $z \in T$가 존재한다. 이 때 $z \neq y_b$이므로 $z < y_b$이고 $s(z) \leq y_b$이다. 따라서 $s(z) \in T$이다. 한편 $\gamma(s(z)) = f(\gamma(z)) = f(c)$이므로 $f(c) \in \gamma(T)$이다. 그리고

$\gamma(y_b) = b$이다. $A = c_a(A)$이므로 $A = \gamma(T)$이다. 이제 $\gamma\colon T \to A$가 단사임을 보이자. 만약 $\gamma(q) = \gamma(x)$인 $x \in T - \{q\}$에 존재한다고 하자. 그 때 $s(y) = x$인 $y \in T$가 존재한다. 이 때 $f(\gamma(y)) = \gamma(s(y)) = \gamma(x) = \gamma(q) = a = f(b)$이다. f는 단사이므로 $\gamma(y) = b$이다. 그러므로 $y_b \leq y < x$이다. 이 사실은 $x \in T - \{q\}$라는 사실과 모순이다. 그러므로 $q = x$이다. x가 "$\gamma(x) = \gamma(y)$인 모든 y에 대해 $x = y$이다."를 만족한다고 하자. 이 때 $\gamma(s(x)) = \gamma(z)$라 하면 $z \neq q$이므로 $s(u) = z$인 $u \in T$가 존재한다. 그리고 $f(\gamma(x)) = \gamma(z) = \gamma(s(u)) = f(\gamma(u))$이고 f가 단사이므로 $\gamma(x) = \gamma(u)$이다. 따라서 $x = u$이고 $s(x) = z$이다. 그러므로 $\gamma\colon T \to A$는 전단사함수이다.

이상의 결과를 종합하면, 따름정리 1.9에 의해 자연수 전체의 집합은 가부번집합이고, 정리 1.10에 의해 정렬집합임을 알 수 있다. 또한 따름정리 1.11에 의해 유한집합은 자연수집합의 한 단편과 대등함을 알 수 있다. 그리고 X가 가산집합일 때, 임의의 집합 Y가 가산집합일 필요충분조건은 X로부터 Y로의 전사함수가 존재하는 것이다. 그러므로 집합 Y가 비가산집합일 필요충분조건은 X로부터 Y로의 전사함수가 존재하지 않는 것이다. 다시 비가산집합은 다음과 같이 두 경우로 나누어 생각할 수 있다. (1) 가산집합으로부터 비가산집합으로의 함수 중 단사이면서 전사가 아닌 함수가 존재하는 경우와 (2) 모든 함수가 전사도 아니고 단사도 아닌 경우로 나누어 생각할 수 있다. 현재 집합론에서 경우 (1)의 비가산집합과 가부번 집합을 합하여 Dedekind 무한집합이라 한다. 그러므로 유한집합이 아닌 집합은 모두 Dedekind 무한집합이라고 할 수 있는가에 대한 의문이 생긴다. 그리고 우리는 지금까지 논하는 중에 선택공리를 이용하지 않았다는 것을 주목해야 한다. 그러므로 집합을 유한집합과 무한집합으로 구분하는 데 선택공리가 필요한 것으로 보기보다는 오히려 비가산집합의 특성을 밝히기 위해 필요한 것으로 보인다. 따라서 경우 (2)의 비가산집합과 선택공리는 밀접한 관계가 있을 것으로 추측한다. 다음 절에서 이 관계에 대하여 논하기로 한다.

2. Dedekind-Neumann 공리계

이 절에서는 집합의 존재성과 새로운 집합의 구성 방법을 논하기 위하여 von Neumann (VN)공리계의 무한공리를 수정하여 새로운 Dedekind-Neumann공리계를 제시하고, 1절의 결과들을 바탕으로 해서 새로운 Dedekind-Neumann공리계에서 나타나는 불가지 류와 선택공리의 관계에 대해서 논한다. 먼저 이 논의를 위해 Pinter에 의해 수정된 VN공리계를 소개하기로 한다.

Pinter는 [5]에서 다음과 같이 von Neumann공리계를 수정하여 소개하고 있다. 여기서 "류"와 "…에 속한다."는 무정의 용어로 삼는다.

외연공리) A는 유이다. $x=y$ 이고 $x \in A$이면 $y \in A$이다.

유구성공리) $P(x)$를 $\in$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$, 괄호 및 변수 $x, y, z, A, B, \cdots$에 의해 완전히 표현할 수 있는 x에 관한 명제라 하자. 이 때 $P(x)$를 만족하는 모든 원소 x로 이루어지는 류가 존재한다.

부분집합공리) 집합의 부분 류는 집합이다.

짝 공리) A와 B가 집합이면 $\{A, B\}$도 집합이다.

합집합공리) $\wp$가 집합의 집합이면 $\cup\{P : P \in \wp\}$는 집합이다.

멱집합공리) A가 집합이면 A의 멱집합도 집합이다.

치환공리) A가 집합이며 $f : A \to B$가 전사함수이면 B도 집합이다.

무한공리) 다음 성질을 가지는 귀납집합(inductive set)이 존재한다.

1) $\varnothing \in A$
2) $X \in A$ 이면 $X^+ \in A$이다.

선택공리) 임의 집합에 대해 선택함수가 존재한다.

Dedekind 무한집합을 이용하여 VN 공리계의 무한공리를 다음과 같이 수정한다.

***D*-무한공리)** 어떤 공이 아닌 류가 자기 자신의 진부분류와 대등하다면 그 류를 **Dedekind 집합**이라고 한다. 그리고 Dedekind 집합은 존재한다.

VN공리계의 무한공리를 D-무한공리로 대치한 공리계를 **Dedekind-Neumann 공리계** 또는 간단히 **DVN공리계**라 부른다.

Dedekind 집합 D의 모든 부분 유는 부분집합 공리에 의하여 집합이다. 그리고 E를 D의 대등한 진부분 집합이라 하고, d를 $D-E$의 한 원소라 할 때, d가 속하는 D의 모든 부분집합의 모임은 멱집합 공리와 부분집합 공리 그리고 유구성 공리에 의하여 집합이다. 그러므로 다시 부분집합공리에 의하여 d가 속하는 D의 모든 Dedekind 부분집합들의 모임은 집합이다. 그리고 유구성 공리에 의하여 d가 속하는 D의 모든 Dedekind 부분집합들의 공통부분도 D의 Dedekind 부분집합이다.

정의 2.1) d가 속하는 D의 모든 Dedekind 부분집합들의 공통부분을 **D의 d-표준집합(standard set)** 또는 간단히 **표준집합**이라 한다.

d-표준집합은 앞 절에서 정의한 가부번집합과 대등하다. 그러므로 d-표준집합은 정렬집합이다.

이제부터 이 논문의 주제인 불가지 류의 존재성과 선택공리의 관계를 살펴보기로 한다. d-표준 집합으로부터 임의 류로의 함수를 이용하여 류들을 분류할 수 있다. 즉, 임의 류 Y는 다음 네 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

C1) d-표준 집합으로부터 Y로의 전단사 함수가 존재한다.

C2) d-표준 집합으로부터 Y로의 전사이면서 단사가 아닌 함수가 존재한다.

C3) d-표준 집합으로부터 Y로의 단사이면서 전사가 아닌 함수가 존재한다.

C4) d-표준 집합으로부터 Y로의 모든 함수가 전사도 단사도 아니다.

먼저 치환공리에 의하여 C1) 또는 C2)인 경우의 류 Y는 집합이다. 또한 C3)인 경우의 류 Y는 정리 1.5와 D-무한공리에 의해 집합이다. 따라서 C1), C2), 또는 C3)의 경우의 류는 모두 집합이다.

다음 보조정리의 증명은 [3, 5, 6]에서 찾아 볼 수 있다.

보조정리 2.2) 정렬순서 류 A의 부분류는 A와 대등하거나 A의 단편과 대등하다.

경우 C2)의 류 Y는 d-표준 집합의 단편과 대등하다. 왜냐하면, d-표준집합은 정렬집합이므로 류 Y와는 대등하고 d-표준집합과는 대등하지 않은 d-표준집합의 부분집합이 존재한다. 그러므로 위 보조정리에 의해 그 부분집합은 d-표준집합의 단편과 대등하다.

경우 C4)의 류를 **불가지류[不可知 類; unknowable class]**라 한다. 다음 보조정리는 불가지류와 선택공리의 관계를 설명하기 위하여 필요하다.

다음 보조정리의 증명은 [3, 5]에서 찾아 볼 수 있다.

보조정리 2.3) 두 집합 사이에 단사함수가 존재할 필요충분조건은 선택공리가 성립하는 것이다.

이제 불가지류에 대한 다음과 같은 의문에 대하여 생각하기로 한다.

의문 1) 불가지류는 존재하는가?

의문 2) 불가지류가 존재한다면 그 류는 집합인가?

먼저 의문 1)에 대하여 생각하여 보자. 만약 불가지류가 존재하지 않는다면 모든 류는

집합이다. 즉, 모든 집합들의 류도 집합이다. 그러나 이 사실은 모든 집합들의 류는 집합이 아니라는 사실과 모순이다. 그러므로 불가지류는 존재한다. 이제 의문 2)에 대하여 생각하여 보자. 만약 불가지류가 집합이라면 보조정리 2.3에 의해 "선택공리"는 성립하지 않는다. 따라서 선택공리가 성립한다면 불가지류는 순수류(집합이 아닌 류)이다. 역으로 불가지류가 순수류이면 공이 아닌 모든 집합들은 경우 C1), C2), 또는 C3)의 류이다. 그러므로 공이 아닌 모든 집합들에는 d-표준 집합의 d와 대응하는 원소가 유일하게 존재한다. 따라서 공이 아닌 각 집합에서 d와 대응하는 원소를 선택할 수 있다. 그러므로 선택공리는 성립한다. 결국 선택공리가 성립할 필요충분조건은 불가지류가 순수류인 것이다.

이상의 이해로부터 DVN공리계에서 어떤 류가 집합일 필요충분조건은 그 류와 표준집합 사이에 단사함수가 존재하는 것임을 알 수 있다. 또한 DVN공리계에서는 다른 공리계에서와 마찬가지로 모든 집합은 다음 같이 가산집합, 유한집합, 비가산집합의 세 종류로 구분할 수 있다.

정의 2.4) ω는 표준집합이고 X는 임의 집합일 때, 함수 $s:\omega\to X$가:

1) 1-1 대응이면 X을 가부번집합이라 부른다.
2) 전사이면서 단사가 아닌 함수이면 X을 유한집합이라 부른다.
3) 단사이면서 전사가 아닌 함수이면 X을 비가산집합이라 부른다.

따라서 어떤 집합이 유한집합이 아닐 필요충분조건은 Dedekind 무한집합인 것이다. 그리고 보조정리 2.2) 의해 모든 공이 아닌 집합이 유한집합일 필요충분조건은 그 집합이 표준집합의 한 단편과 대등하다는 것이다. 그리고 집합이 가산 집합일 필요충분조건은 그 집합이 유한집합 또는 가부번집합인 것이다.

VN공리계에서도 DVN공리계에서와 같이 d-표준집합은 존재한다. 그러나 VN공리계에서는 경우 C3)의 류 Y가 집합인지를 결정할 수 없다는 것이 DVN공리계와 다른 점이다.

이제 "글로벌 선택공리"에 대하여 생각하기로 한다.

글로벌 선택공리) 임의 류에 대해 선택함수가 존재한다.

불가지류가 존재하지 않을 필요충분조건은 글로벌 선택공리가 성립하는 것이다. 즉 불가지류가 존재할 필요충분조건은 글로벌 선택공리는 성립할 수 없다는 것이다.

이제 끝으로 "선택공리"에 대하여 좀 더 생각하기로 한다. 선택공리에 대한 이해를 돕기 위하여 신발 집합과 양말 집합을 들어 설명하는 것을 종종 본다. 이 예를 다음과 같은 경우로 나누어 생각해보기로 한다.

먼저 신발들의 집합을 생각하자.

1) 신발 한 켤레로 이루어진 집합을 켤레 집합 P라 하자. 그리고 켤레 집합들의 집합을 S라 하자. 이 때 S의 각 원소 P로부터 계승적 또는 동시적으로 하나씩 선택하는 것이 가능한가? 이 경우는 다음과 같은 이유로 가능하다.

1. 각 집합 P의 두 원소는 분명히 구별이 가능하다(오른쪽과 왼쪽으로 구별 가능),
2. 더욱이 이 구별 가능성은 모든 켤레 집합에 공통으로 있다.

이제 양말들의 집합을 생각하여 보자.

2) 양발 한 켤레로 이루어진 집합을 켤레 집합 P라 하자. 그리고 켤레 집합들의 집합을 S라 하자. 이 때 S의 각 원소 P로부터 순차적 또는 동시적으로 하나씩 선택하는 것이 가능한가? 이 경우 역시 다음과 같은 이유로 가능하다.

1. 각 집합 P의 두 원소는 구별이 불가능하며(오른쪽과 왼쪽이 동일).
2. 더욱이 이 동일성은 모든 켤레 집합에 공통으로 있다.

이 경우에는 어느 쪽을 선택하든 결과는 같기 때문에 애초부터 선택의 의미가 없다. 애초부터 어떤 "의미"가 없는 대상에서 그 "의미"가 있는 것으로 전제하여 논하는 자체가 논리적으로 문제가 있다고 생각한다. 이런 경우의 선택은 각 P를 하나의 원소만으로 이루어진 집합으로 다루어져야만 한다고 생각한다.

위 두 예는 이미 작위적으로 구성된 집합을 생각하였다. 이제 마지막으로 무작위로 구성된 집합에 대하여 생각하여 보자. 여기서 무작위의 의미는 있는 그대로의 원소를 구별할 수 없는 상태를 의미한다.

3) 학교 운동장에 어떤 물건을 한 가득 무작위로 풀어 놓았다고 하자. 이 경우 선택에 참여한 한 학생이 물건 하나를 집어 들고 교실에 있는 친구에게 어느 물건을 선택했는지 설명할 방법이 있겠는가? 객관적으로 "동의"를 얻을 수 있는 선택 방법이 있다면 가능하다고 생각한다. 그런 방법 중의 하나가 운동장에 있는 물건들을 어떤 방법으로든 일렬로 나열하는 것이다. 일단 순서대로 나열이 되면 물건들은 순서에 의해 구별이 가능하기 때문에 선택이 가능하다. 또 다른 방법으로는 원소의 성질에 의한 분류를 통하여 선택이 가능하다고 생각한다. 즉 위의 2)에서와 비슷한 생각으로 동일한 성질의 물건은 동일하게 다루면 되기 때문이다. 여기서 "동의"의 의미는 두 가지로 사용하였다. 첫째는 나열의 방법과 분류 방법에 동의가 있어야 한다는 것이고, 둘째로는 운동장에 있는 어느 물건이든 첫 번째가 될 수 있다는 것에 대한 동의와 동일한 성질의 것은 동일하게 처리한다는 동의가 있어야 한다는 것이다.

위 사실을 통하여 집합의 원소들을 낱낱이 구별하는 것이 이미 가능하다면 선택은 언제나 가능하다(모든 원소가 동일한 경우 포함). 그러므로 선택함수의 존재성은 무작위로 구성되

어져 원소들을 구별할 수 없는 집합에 초점을 맞추어 각 선택에 적합한 객관적인 방법이 있는지에 대해 논할 필요가 있다고 생각한다. 이런 관점에서 정렬집합과 비교하여 DVN공리계에서 선택함수의 존재성을 다시 확인한다.

"각 정렬집합에는 최소원이 유일하게 존재한다."는 사실에 의해 "선택공리"는 보장된다. 그러나 각각의 위치에 어떤 원소가 있는지 파악할 수 있도록 하는 정렬 순서는 구성할 수가 없다. 단지 다른 원소와 순서에 의하여 구별 되는 최소원이 존재한다는 사실에 의해 선택함수의 존재가 보장된다. DVN공리계에서 불가지 류가 순수 류일 때, 공이 아닌 각 집합에는 d-표준 집합의 d와 대응하는 원소가 유일하게 존재한다. 그리고 그 원소는 그 대응에 의해 다른 원소와 구별이 가능하다는 것이다. 그러므로 모든 공이 아닌 집합에는 다른 원소와 구별 되는 특정한 원소가 유일하게 존재한다. 따라서 정렬집합에서 선택함수가 존재한다면, 마찬가지로 DVN공리계의 모든 집합에서도 선택함수는 존재한다.

결론

DVN공리계에서 불가지류의 존재를 부정한다면 "모든 집합의 류"는 집합이다. 이것은 공리적으로 반드시 극복해야할 역설이었다. 그러므로 불가지류의 존재는 인정되어야만 한다. 그리고 불가지류가 집합이라면 선택공리에 의하여 모순이 유도된다. 따라서 DVN공리계가 무모순이기 위해서는 불가지류가 순수류일 수밖에 없다. 그러나 DVN공리계에서 선택공리를 제거한다면 더 이상 불가지류가 집합인지 결정할 방법이 없다. DVN공리계에서 "선택함수의 존재성"과 "불가지류가 순수류"라는 것은 논리적으로 동치인 개념이다. 한편 선택공리가 성립한다는 것을 전제로 하여 보조정리 2.3을 다음과 같이 수정하여 보자. "A와 B가 집합이면 A와 B 사이에는 단사함수가 존재한다." 이 명제의 대우는 "A와 B 사이에 단사함수가 존재하지 않으면 A와 B 중 적어도 하나는 집합이 아니다."이다. 그러므로 선택공리를 인정한다면 집합이 아닌 류의 존재성이 암묵적으로 인정되고 있음을 알 수 있다. 결국, DVN공리계에서 불가지류를 순수류로서의 존재임을 인정한다면 모든 집합은 표준 집합에 의하여 결정되며, 가산집합, 유한집합, 비가산집합으로 구분할 수 있다. 또한 Recursion 정리에 의해 표준집합은 자연수의 집합과 대등하므로, 표준집합에 더하기와 곱하기를 도입할 수 있고 더욱이 산술에 관한 모든 기본 성질을 얻는다. 이로부터 더 확대된 유리수체계, 실수체계, 복소수체계까지도 순차적으로 구성해 나갈 수 있다. 그럼에도 불구하고 직관적으로 "불가지 류"가 실재하는지에 대해서는 의문이다. von Neumann이 "수학에서는 사물을 이해하는 것이 아니다. 그저 익숙해질 뿐이다."라고 말한 것처럼 선택공리에 그냥 익숙해진 것은 아닌가 하는 생각이 든다. 끝으로 불가지 유의 유일성과 "불가지류"와 "모든 집합의 류"의 관계에 대한 연구는 계속될 필요가 있다고 생각한다.

참고문헌

1. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen Braunschweig?, 1888.
2. K. Hrbacek and T. Jech, Introduction to Set Theory, Marcel Dekker, INC. New York and Base, 1984.
3. S.Y. T. Lin and Y. F. Lin, Set Theory: An Intuitive Approach, Houghton Miffin Co., Boston, 1974.
4. E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, D. Van Nostrand Co., New york, 1979.
5. C. C. Pinter, Set Theory, Addison-Wesely, Reading, Massachcett, 1971.
6. R. L. Vaught, Set Theory, BirkhaCer Boston Inc., Boston, 1985.

Existence of an unknowable class and the axiom of choice

Dept. of Mathematics and Information, Kyungwon University **Se Hwa Chung**

In this paper, we modify the axiom of infinity of von Neumann's axioms modified by Pinter([5]), and then discuss an existence of an unknowable class in the system and a relationship between the unknowable class and the axiom of choice.

Key words: successor set, standard set, unknowable class, ZF set theory, Von Neumann set theory, Dedekind infinite set, recursion theorem, countable set, denumerable set, uncountable set, generating function, axiom of choice.

2000 Mathematics Subject Classification: 03C62, 03C64, 03D80, 03E25, 03F07

ZDM Subject Classification: E, E60, F30.

접수일: 2009년 9월 1일 수정일 : 2009년 10월 20일 게재확정일: 2009년 10월 23일