한국수학사학회지 제22권 제2호(2009년 5월), 99 - 116

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형 작도의 오류에 대한 연구

경상대학교 한인기
inkiski@gsnu.ac.kr

본 연구에서는 18세기 출판된 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도방법들 중에서 오류를 포함하는 작도를 분석하였다. 정7각형과 정9각형은 자와 컴퍼스를 이용하여 작도불가능하다는 것이 알려져 있지만, '자와 컴퍼스의 방법'에서는 이들 정다각형을 작도하는 두 가지 방법이 제시되어 있다. 본 연구에서는 이들 작도가 오류를 포함하고 있음을 보였고, 이에 관련된 몇몇 정다각형 작도 방법도 오류를 포함하고 있음을 보였다. 이를 통해 정다각형 작도문제의 해결을 위한 노력에서 성공적이지 못한 시도에 관련된 새로운 자료를 제공할 것으로 기대된다.

주제어: 정7각형, 정9각형, 정다각형, 작도, 오류

0. 서론

수학의 역사는 새로운 추측이 만들어지고, 이를 증명하거나 또는 반박하여 추측을 성장시켜 가는 역동적인 과정이라 할 수 있다. [11]에는 최초의 소박한 추측에 대한 증명, 반박, 개선을 통해 수학적 지식의 발전 과정이 기술되어 있으며, 수학적 지식의 역동적인 성장 과정에서 반박, 반례의 중요성을 강조하였다.

한편 [3]에서는 수학 교수-학습에서 역사-발생적 방법과 관련하여, '수학자들이 부딪쳤던 어려움은 학생들이 겪는 장애가 될 것이고, 그러한 어려움을 논리적 장광설로 제거하려는 시도는 성공할 수 없다는 것은 의심의 여지가 없다. 수학자들이 음수 개념을 생각해 내는 데 천년이 걸렸고 수학자들이 음수를 수용하는 데 또 다른 천 년이 걸렸다면, 학생들이 음수 학습에 어려움을 겪을 것임은 분명하다. 더욱이 학생들은 수학자들이 하였던 것과 마찬가지로 음수 개념에 점진적으로 친숙해 짐으로써, 그리고 그것을 다루면서 모든 직관적인 측면을 이용하면서 그러한 어려움을 극복해야 할 것이다'(p.134)라고 하면서, 수학의 역사에서 성공 뿐만 아니라, 어려움과 그 극복의 순간들이 학생들의 수학 학습과정을 이해하는 중요한 기초자료가 될 수 있다고 주장하였다. 그리고 [4]에서는 '오류는 수학의 역사에서 중요한 역할을 했다. 오류는 수학의

발달을 저해하는 요인이기도 하지만, 한편으로는 수학이 발전하는데 도약대가 되는 중요한 역할을 하였으며'(p.36)라고 하면서, 수학의 발전에서 수학적 오류의 중요성을 강조하였다. 결국 수학적 오류에 관련된 자료들은 수학의 역사에 꼭꼭 숨겨두어야 하는 장애물이 아니라, 수학 자체의 발전과 학생들의 수학 교수-학습의 개선을 위해 폭넓게 활용할 수 있는 소중한 자원인 것이다.

수학의 역사에서 오류에 관련된 국내 연구로, [6]에는 수학의 역사에서 잘못 알려진 사실들이 소개되었으며, [2]에는 영에 관련된 오류들이 소개되었고, [4]에는 오류를 통해 수학이 어떻게 발전하였는가가 몇몇 예를 통해 고찰되었다. 이들 연구를 통해, 수학사와 수학교육에서 오류의 역할, 중요성에 대한 논의가 진지하게 이루어진 것은 주목할 만하지만, 아직도 구체적 수학적 주제에 대한 수학사적 오류에 관련된 연구들은 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 1709년 러시아에서 출판된 '자와 컴퍼스의 방법'([12])에 제시된 정다각형의 작도들 중에서 정7각형과 정9각형을 중심으로 이들의 작도에 관련된 오류를 분석할 것이다. 특히 '자와 컴퍼스의 방법'에는 이들 정다각형의 작도와 함께 정육각형에서 정12각형, 정13각형에서 정24각형을 작도하는 일반화된 방법이 제시되어 있는데, 본 연구에서는 이들 작도가 오류를 포함하고 있음을 보이고, 이들 오류의 교육적 활용 가능성에 대해서도 고찰할 것이다. 이를 통해 정다각형 작도문제의 해결을 위한 노력에서 성공적이지 못한 시도에 관련된 새로운 자료를 제공할 것으로 기대된다.

1. 정7각형과 정9각형의 작도

'자와 컴퍼스의 방법'에는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정8각형, 정10각형을 자와 컴퍼스를 이용하여 작도하는 방법이 정확하게 제시되어 있으며[1], 정7각형과 정9각형을 작도하는 방법도 제시되어 있다(물론 제시된 정7각형과 정9각형의 작도 방법에는 오류가 포함되어 있으며, 본 연구에 이들 오류를 연구할 것임).

자와 컴퍼스를 이용하여 정다각형을 작도하는 문제는 수학사에서 많은 수학자들이 도전했던 흥미로운 문제였다. [10]에는 자와 컴퍼스를 이용하여 작도가능한 또는 작도 불가능한 몇몇 정다각형이 [표 1]과 같이 제시되어 있다.

수학적으로 정7각형과 정9각형은 자와 컴퍼스를 이용하여 작도가 불가능하다는 것이 이미 증명되어 있다. 예를 들어 [1]에는 정7각형을 자와 컴퍼스를 이용하여 작도할 수 없다는 것의 대수적 증명방법 하나가 제시되어 있다. 그러나 1709년에 러시아에서 출판된 '자와 컴퍼스의 방법'에서는 이들 정다각형의 작도를 위해 어떤 접근을 취하고 있는지를 알아보고, 이들 작도방법의 오류를 찾아보고 교육적 활용가능성을 모색하는 것은 수학사 연구에서 나름의 의미가 있을 것이다.

1) '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 이들 정다각형의 작도 방법과 그 타당성의 증명은 [5]를 참고하기 바람.

	정n각형의 n의 값
자와 컴퍼스를 이용하여 작도가능한 정n각형	3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 24, 40, 48
자와 컴퍼스를 이용하여 작도불가능한 정n각형	7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47

[표 1] 자와 컴퍼스를 이용해 작도가 가능한 또는 불가능한 정다각형들

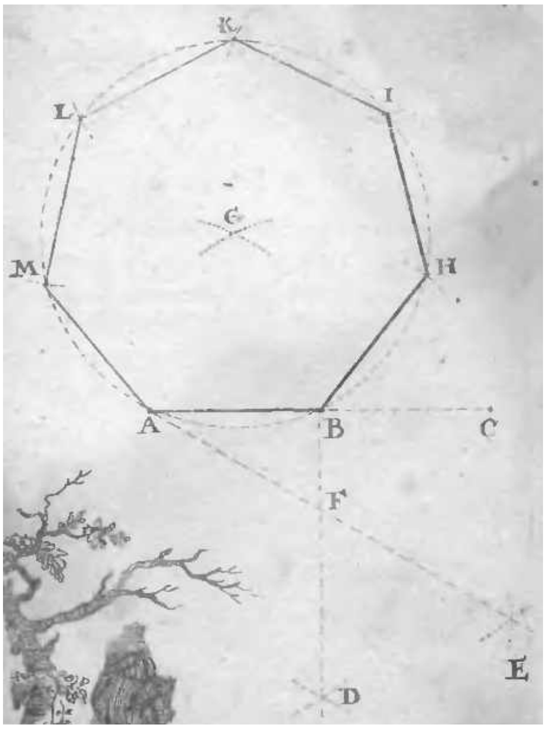
(1) 정7각형의 작도

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정7각형의 작도에 대한 기술을 살펴보자([12], pp.116-117).

주어진 직선 AB에 정7각형을 작도하자. 선 AB를 같은 길이만큼 연장하여 점 C를 표시하자. 길이 AC를 잡아 두 점 A, C로부터 같은 두 호를 그려, 이들의 교점을 D라 하자(그림 1). 컴퍼스를 그대로 들어서 두 점 C, D로부터 교차하는 같은 두 호를 그려, 교점을 E라 하자. 직선 AE, BD를 그린다. 길이 AF를 잡아 두 점 A, B로부터 같은 두 호를 그리고, 이들의 교점을 G라 하자. 표시된 점 G로부터 길이 GA로 원을 그리고, 여기에 주어진 선 AB와 같은 점들 H, I, K, L, M을 표시한다. 점들 사이를 직선으로 연결하면, 정7각형이 얻어진다.

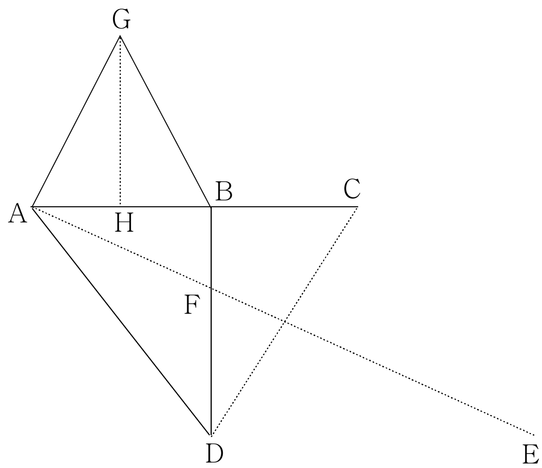
기술한 정7각형의 작도 방법을 정리하면 다음과 같다.

① 선분 AB의 연장선에 AB와 같은 선분 BC를 표시한다.
② 중심이 A, C이고 반지름이 AC인 원을 그려, 이들의 교점을 D라 한다.
③ 중심이 C, D이고 반지름이 AC인 원을 그려, 이들의 교점을 E라 한다.
④ 직선 AE, BD를 그리고, 이들의 교점을 F라 한다.
⑤ 중심이 A, B이고 반지름이 AF인 원을 그려, 이들의 교점을 G라 한다.
⑥ 중심이 G이고 반지름이 GA인 원을 그린다.
⑦ 원에 현 AB와 같은 점 H, I, K, L, M을 잡는다.
⑧ 점 A, B, H, I, K, L, M을 연결하면, 정7각형이 얻어진다.



[그림 1] '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된
정7각형의 작도

기술한 정7각형의 작도방법이 오류를 포함하고 있음을 살펴보자. 선분 AD, CD를 연결하면, AD=DC=AC이므로 정삼각형 ADC가 얻어진다(그림 2).



[그림 2]

점 B는 변 AC의 중점이므로, 선분 DB는 중선이며 수선이 된다. 한편 사각형 ADEC는 변들이 모두 같으므로, 마름모가 되며 각 DAF와 CAF가 같다. 결국 각 FAB는 30°가 된다. 즉 직각삼각형 FAB에서 $\cos 30^{\circ} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AF}}$이고, $\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AF}$이다.

한편 점 G의 작도방법에 의해, AG=AF=BG이며, 삼각형 GAB는 이등변삼각형이다. [그림 1]의 작도에 의해 각 AGB는 $\frac{360^{\circ}}{7}$, 즉 $\frac{2\pi}{7}$이다. 이등변삼각형 GAB에서 수선 AH를 그으면, AH는 각의 이등분선이 되며 $\angle \mathrm{AGH} = \frac{\pi}{7}$된다. 이제 직각삼각형 AGH에서 $\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AG}}$이며, AB=2AH이므로 $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AG} \cdot \sin\frac{\pi}{7}$이다.

등식 $\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AF}$, $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AG} \cdot \sin\frac{\pi}{7}$으로부터, $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AF} = 2\mathrm{AG} \cdot \sin\frac{\pi}{7}$를 얻을 수 있다. 그런데 AF=AG이므로, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{7}$가 된다. 이제 $\frac{\sqrt{3}}{2}$과 $2 \cdot \sin\frac{\pi}{7}$의 근사값을 각각 Excell 프로그램을 이용하여 계산하면, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866025$, $2 \cdot \sin\frac{\pi}{7} \approx 0.867767$이 된다. 결국 $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2 \cdot \sin\frac{\pi}{7}$이며, 모순이 유도된다. 이로부터 위에 기술된 정7각형의 작도에는 오류가 포함되어 있음을 알 수 있다.

결국 [그림 1]에서 정7각형의 작도방법 중에서 외접원의 반지름으로 선분 AF를 잡은 것이 잘못되었다. 즉 [그림 1]의 작도과정에서 얻어진 정7각형의 한 변의 길이는 $\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AF}$이다. 그런데 외접원의 반지름이 AF인 정7각형의 한 변의 길이가 $2\mathrm{AF}\sin\frac{180^{\circ}}{7}$이다[2]. 증명한 것과 같이 $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 2 \cdot \sin\frac{\pi}{7}$이 되므로, [그림 1]에서 선분 AF는 정7각형의 외접원의 반지름이 될 수 없다.

[그림 1]의 작도와 관련된 흥미로운 사실은 근사값 계산에 의해 $\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AF}$은 $\mathrm{AB} = 0.866025 \cdot \mathrm{AF}$, $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AF} \cdot \sin\frac{\pi}{7}$은 $\mathrm{AB} = 0.867767 \cdot \mathrm{AF}$이 된다. 이들 근사값을 비교하면, 소수점 아래 두 번째 자리까지는 그 값이 같고, 세 번째 자리에서부터 차이가 난다는 것을 알 수 있다. 즉 [그림 1]에는 정7각형과 아주 비슷한 7각형이 작도되어 있다.

2) [7]에 의하면, 외접원의 반지름이 R인 정n각형의 한 변은 $2R\sin\frac{180^{\circ}}{n}$이다.

(2) 정9각형의 작도

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정9각형의 작도에 대한 기술을 살펴보자([12], p.120).

주어진 직선 AB에 정9각형을 작도하자. 선 AB에 수선 CD를 그어, 중점 F에서 두 부분으로 나누자. 길이 AB를 잡아 점 A, B로부터 같은 두 호를 그려, 교점을 C라 하자. 주어진 선의 절반인 FB만큼을 잡아 직선 CD에 점 C로부터 점 E를 표시하자. 이 점이 원의 중심이다. 점 E로부터 거리 EA로 원을 그리고, 주어진 선만큼 일곱 개의 원을 그리면, 9각형이 얻어진다.

'자와 컴퍼스의 방법'에는 정9각형의 작도에 상응하는 그림은 제시되어 있지 않다. 기술한 정9각형의 작도 방법에 상응하는 작도를 수행하면 [그림 3]과 같으며, 작도 순서를 다음과 같이 정리할 수 있다.

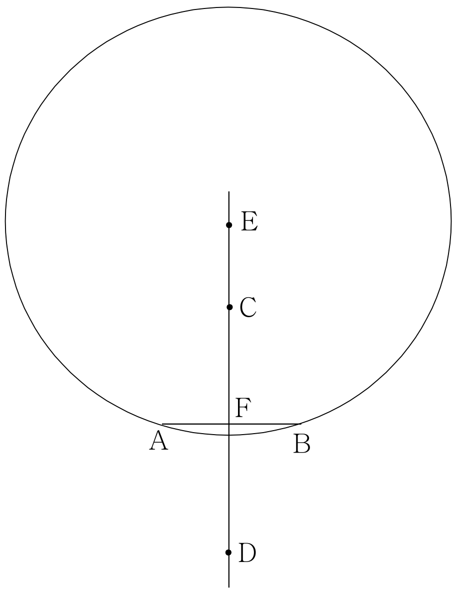
① 중심이 A, B이고 반지름이 AB인 원을 그어, 교점을 C, D라 한다.

② 직선 CD를 그어, 선분 AB와의 교점을 F라 한다.

③ 직선 CD에 FB와 같은 선분 CE를 표시한다.

④ 중심이 E이고 반지름이 EA인 원을 작도한다.

⑤ 원에 현 AB와 같은 점들을 잡아, 이들을 연결하면 정9각형이 얻어진다.



[그림 3] 정9각형의 작도 방법

이제 기술한 작도 방법의 타당성을 살펴보자. [그림 3]에서 원의 반지름 AE를 구하

자. 작도에 의해, 삼각형 ABC는 정삼각형이고 AB=AC이다. 그리고 CE는 FB와 같다. 원의 반지름 AE를 변으로 하는 삼각형 ACE를 생각하자. 각 ACF가 30˚이므로, $\angle ACE = 150^\circ$이다.

이제 코사인 정리로부터, $AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos 150^\circ$이다. 가령 AB를 a라 놓으면, AC=a, $CE = \frac{a}{2}$가 되므로, $AE^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$가 된다. 즉 $AE^2 = \frac{5a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}\,a^2}{2}$, $AE = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{2}a$가 된다. 제곱근호 안을 근사값으로 Excell 프로그램을 이용하여 계산하면, $AE \approx 1.454656456a$가 된다.

한편 외접원의 반지름이 R인 정9각형의 한 변은 $2R\sin 20^\circ$이므로, $a = 2R\sin 20^\circ$이며 $R = \frac{a}{2\sin 20^\circ}$이다. 이제 $\frac{1}{2\sin 20^\circ}$의 근사값을 Excell 프로그램을 이용하여 계산하면, $\frac{1}{2\sin 20^\circ} \approx 1.4619022$가 된다. 즉 $AE \approx 1.454656456a$와 $R \approx 1.4619022a$값이 서로 다르므로, 정9각형이 작도되지 않는다.

[그림 3]에서 살펴본 정9각형의 작도방법에서 외접원의 반지름 AE를 부정확하게 잡았으며, 이로부터 오류가 발생한다는 것을 알 수 있다.

정7각형과 정9각형의 작도에서 발생하는 오류에 대해 살펴보았다. 문제해결 과정에 오류가 존재한다는 것이 밝혀지면, 그 문제해결은 수학적으로 타당하지 않으며 그러한 문제해결은 폐기되는 경우가 많다. 그러나 교육적인 측면에서 보면 문제해결 과정에 존재하는 오류는 새로운 수학적 탐구의 출발점이 되는 경우가 많다.

[11]에는 반례들을 통해 소박한 추측을 개선하는 모범이 제시되어 있으며, [9]에는 '중등학교 학생들과 오류를 고찰하는 것은 첫째, 오류를 알고 앞으로는 그러한 오류를 반복하지 않도록 예방하며, 둘째 오류를 찾는 과정 자체는 학생들에게 매력적이며, 오류의 학습은 수학학습에 대한 흥미를 높이는 수단이 된다'(p.3)고 하면서, 수학 문제해결 과정에서 오류를 찾고, 학생들이 그러한 오류를 아는 것이 수학교육에서 중요하다는 것을 강조하였다.

본 연구에서 고찰한 정7각형과 정9각형의 작도문제에서의 오류는 중등학교 학생들에게 흥미로운 수학탐구의 자료가 될 것이며, 학생들은 이들 작도문제의 오류를 찾고 개선하면서 수학사의 중요한 순간에 서서 수학을 탐구하는 자신을 인식하며, 수학에 대한 흥미를 높일 수 있을 것으로 기대된다.

2. 원주의 등분할을 통한 정다각형 작도

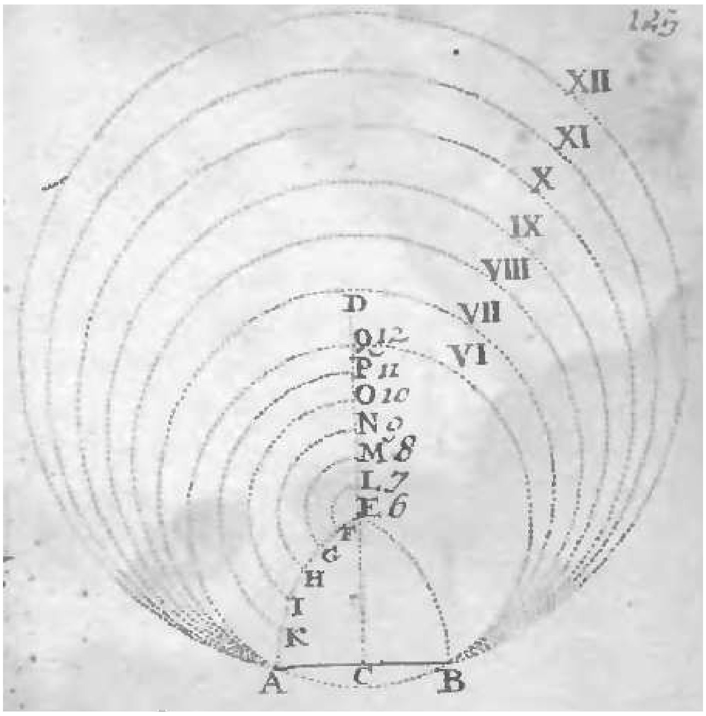
[8]에 의하면, '원주를 n등분하는 문제는 각 2π를 n등분하는 문제와 동치이다. ...원주를 n등분하는 문제는 자연스럽게 정다각형을 작도하는 문제와 연결된다'(p.53)고 하면서, 원주를 n등분하는 문제가 수학사에서 유명했던 각의 등분 문제, 정다각형 작도 문제와 관련됨을 기술하였다.

'자와 컴퍼스의 방법'에서는 원주를 n등분하는 방법으로 정육각형에서 정24각형을 작도하는 방법을 제시하고 있다. 이를 자세히 살펴보자.

(1) 정육각형에서 정12각형의 작도

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정육각형에서 정12각형까지의 작도에 대한 기술을 살펴보자([12], pp.124-125).

주어진 직선 AB에 정육각형부터 정12각형까지 작도하자. 점 C로부터 수직이등분선 CD를 그어, 직선 AB를 이등분하자. 거리 AB를 잡아 점 A 또는 B로부터 호 AE를 긋자. 호 AE를 6등분하는 점 F, G, H, I, K를 표시하자. 컴퍼스의 한쪽 다리를 점 E에 놓고, 다른 다리가 첫 번째 점 F에 놓이도록 움직여, 호 FL을 작도하자(그림 4).



[그림 4] 정육각형에서 정12각형까지 작도 방법

이와 같은 방법으로, 점 E로부터 G, H, I, K, A까지의 거리를 잡아, 다른 호들을 작도한다. 이제 수선 DC에 점 M, N, O, P, Q를 표시하면, 육각형의 중심은 점 E 또는 6이 되며, 칠각형의 중심은 점 L 또는 7이 된다. 만약 9각형을 얻고 싶으면, 컴퍼스의 한쪽 다리를 중심 N 또는 9에 놓고 길이 NB를 잡아 원주를 그린다. 이 원주를 따라 선 AB를 표시하면, 정확히 9번 작도된다. 나머지 다각형들에 대해, 이와 같은 방법으로 나머지 다각형들을 얻을 수 있다.

기술한 방법을 바탕으로, 정7각형의 작도 순서를 기술하면 다음과 같다.

① 선분 AB의 수직이등분선 CD를 작도한다.
② 중심이 B이고 반지름이 AB인 원에서 호 AE를 작도한다.
③ 호 AE를 6등분하는 점 F, G, H, I, K를 표시한다.
④ 중심이 E이고 반지름이 EF인 원에서 호 FL을 작도한다.
⑤ 중심이 L이고 반지름이 LB인 원을 작도한다.
⑥ 얻어진 원주에 선분 AB와 같은 선분을 S, T, U, V, W를 표시한다.
⑦ A, B, S, T, U, V, W를 연결하면, 정7각형 ABSTUVW가 얻어진다.

다른 정다각형들도 유사한 방법으로 작도된다. 즉 정8각형을 작도하려면, 위의 작도 순서 ④에서 중심이 E이고 반지름이 EG인 원에서 호 GM을 작도하고, ⑤에서 중심이 M이고 반지름이 MB인 원을 작도하여, 얻어진 원주에 선분 AB와 같은 선분들을 표시하면 된다.

이제 [그림 4]의 작도방법을 분석하자. 본 연구에서는 첫째, [그림 4]에서 호 AE를 자와 컴퍼스를 이용하여 6등분할 수 있는가, 둘째 그러한 6등분점 F, G, H, I, K가 존재한다고 할 경우에 [그림 4]에서 기술한 작도방법이 타당한가에 대해 살펴볼 것이다.

첫째, 자와 컴퍼스를 이용하여 호 AE를 6등분하는 것은 불가능하다는 것이 수학적으로 증명되어 있다. 즉 호 AE의 중심각이 60°이므로, 호 AE를 6등분하면 얻어진 호들에 대한 중심각으로 10°, 20°, 30°, 40°, 50°가 얻어지는데, 각 20°를 작도하는 것은 유명한 3대 작도불능문제의 하나로 작도가 불가능함이 이미 증명되었다.

둘째, 점 F, G, H, I, K가 호 AE의 6등분점이라 할 때, [그림 4]에서 기술한 작도방법을 통해 정다각형이 얻어지는가를 살펴보자.

[그림 4]에 점 B를 원점으로 하는 좌표계를 생각하고, BC=CA=t라 하자. 그러면 중심이 B이고 반지름이 BA인 원의 방정식은 $x^2+y^2=4t^2$이다. 삼각형 EAB는 정삼각형이므로 $\angle EBA=\frac{\pi}{3}$이며, 점 F, G, H, I, K는 호 EA를 6등분하는 점들이므로 $\angle FBA=\frac{5\pi}{18}$, $\angle GBA=\frac{2\pi}{9}$, $\angle HBA=\frac{\pi}{6}$, $\angle IBA=\frac{\pi}{9}$, $\angle KBA=\frac{\pi}{18}$이다. 이로부터 점 F, G, H, I, K의 좌표가 각각 $\left(-2t\cos\frac{5\pi}{18},\ 2t\sin\frac{5\pi}{18}\right)$,

$\left(-2t\cos\frac{2\pi}{9},\ 2t\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $\left(-2t\cos\frac{3\pi}{18},\ 2t\sin\frac{3\pi}{18}\right)$, $\left(-2t\cos\frac{\pi}{9},\ 2t\sin\frac{\pi}{9}\right)$가 된다는 것을 알 수 있다. 한편 점 E의 x좌표가 -t이고 y좌표는 $(-t)^2+y^2=4t^2$, 즉 $\sqrt{3}t$이므로, 점 E의 좌표는 $(-t,\ \sqrt{3}t)$이다.

이제 선분 EF, EG, EH, EI, EK를 구하면, 선분 EL, EM, EN, EO, EP를 얻을 수 있다. 점-직선 사이의 거리 공식에 의해,

$$EF=EL=\sqrt{\left(2t\cos\frac{5\pi}{18}-t\right)^2+\left(\sqrt{3}t-2t\sin\frac{5\pi}{18}\right)^2}=\sqrt{8-4\cos\frac{5\pi}{18}-4\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}\ t$$

가 얻어진다. 같은 방법으로, EM, EN, EO, EP를 계산할 수 있다.

이제 반지름 BL을 구하기 위해, 삼각형 EBL을 생각하자. $EB=2t$이고 $\angle BEL=\frac{5\pi}{6}$이므로 코사인 정리를 사용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$BL^2=(2t)^2+\left(\sqrt{8-4\cos\frac{5\pi}{18}-4\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}\ t\right)^2-4t^2\sqrt{8-4\cos\frac{5\pi}{18}-4\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}$$

이로부터 $BL=\sqrt{12-4\cos\frac{5\pi}{18}-4\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}+2\sqrt{3}\sqrt{8-4\cos\frac{5\pi}{18}-4\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}}\ t$를 얻을 수 있다. 이제 정다각형의 한 변 $a=2t$임을 감안하면, 정7각형의 외접원의 반지름 BL은 다음과 같다.

$$BL=\sqrt{3-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}}\ a$$

같은 방법으로, 정8각형, 정9각형, 정10각형, 정11각형의 외접원의 반지름 BM, BN, BO, BP를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$BM=\sqrt{3-\cos\frac{2\pi}{9}-\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{2\pi}{9}-\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}}}\ a$$

$$BN=\sqrt{3-\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}}}\ a$$

$$BO=\sqrt{3-\cos\frac{\pi}{9}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{9}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}}}\ a$$

$$BP=\sqrt{3-\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}}}\ a$$

이제, 얻어진 BL, BM, BN, BO, BP의 값을 Excell 프로그램을 이용하여 소수점 9자리까지 근사값을 구하여[3], 정n각형의 한 변의 길이 공식 $a=2R\sin\frac{\pi}{n}$에서 얻어지는 외접원의 반지름 R값과 비교하면 [표 2]와 같다.

3) Excell 프로그램에서 BL의 값을 계산하기 위해, 다음과 같은 식을 이용하였다:
SQRT(3-COS(5/18*PI())-SQRT(3)*SIN(5/18*PI())+SQRT(3)*SQRT(2-COS(5/18*PI())-SQRT(3)*SIN(5/18*PI())))
BM, BN, BO, BP도 유사한 방법으로 계산할 수 있다.

정다각형	[그림 4]에서 얻어지는 R의 값, 즉 BL, BM, BN, BO, BP	$R=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$
정7각형	1.154253370a	1.152382435a
정8각형	1.312307011a	1.306562965a
정9각형	1.471232362a	1.461902200a
정10각형	1.628712265a	1.618033989a
정11각형	1.782811651a	1.774732766a

[표 2] 정다각형들의 외접원의 반지름 비교

[표 2]에서 [그림 4]에서의 작도방법에 의해 얻어지는 외접원의 반지름과 수학적으로 증명된 등식 $a=2R\sin\dfrac{\pi}{n}$으로부터 얻어지는 외접원의 반지름 값이 같지 않다.

[그림 4]와 같은 방법으로 정육각형을 작도하면, 정확한 작도가 얻어진다. 계산과정에서 발생하는 오차를 확인하기 위해, BL을 구했던 식에 $\dfrac{5\pi}{18}$대신에 $\dfrac{6\pi}{18}$을 넣어 정육각형의 외접원의 반지름을 소수점 9자리까지 근사적으로 계산하면 1.000000013a가 되며, $R=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{6}}$을 이용하여 소수점 9자리까지 근사값을 계산하면 1.000000000a가 된다.

이로부터 [표 2]에서 근사값들의 차이가 계산과정에서 발생할 수 있는 오차에 의한 것이 아니라, [그림 4]에 의한 정다각형 작도가 정확한 작도가 아니라는 것으로부터 유래한다는 것을 알 수 있다.

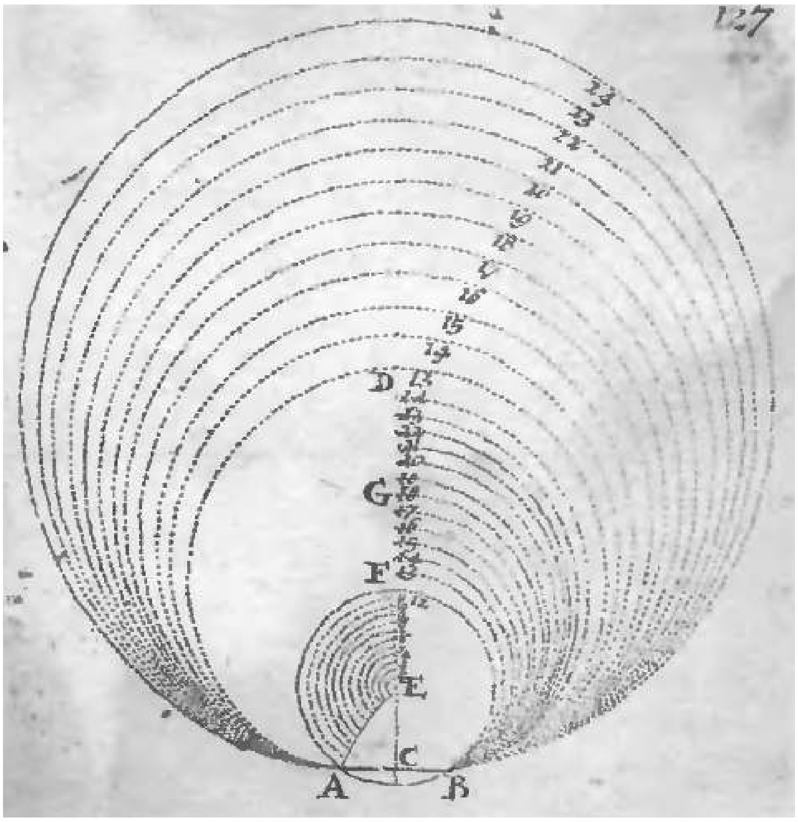
(2) 정12각형에서 정24각형의 작도 방법

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정육각형에서 정12각형까지의 작도에 대한 기술을 살펴보자([12], pp.126-127).

주어진 직선 AB에 정12각형부터 정24각형까지 작도하자. 주어진 선 AB의 중점 C를 잡아, 수선 CD를 작도하자. 거리 AB를 잡아, 점 B로부터 호 AE를 작도하여, 이 호를 12등분하자. 그 다음에, 컴퍼스의 한쪽 다리를 E에 놓고, 다른 다리는 호 AE에 표시된 점들에 각각 놓고, 수선 CD와 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12에서 만나도록 12개의 호를 작도한다.

그 다음에, 컴퍼스의 한쪽 다리를 E에 놓고, 다른 다리를 점 B에 놓고 호 ABF를

작도한다. 표시된 점 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12로부터 점 B까지의 거리를 잡아, 같은 방법으로 호를 작도한다. 예를 들어, 2로부터 B까지의 거리를 잡아 작도하면 원 13을 얻게 되며, 3으로부터 B까지의 거리를 잡아 작도하면 원 14를 얻게 된다. 이와 같은 방법으로, 수선 CD와 만나는 다른 호들 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24를 작도한다. 이들 교점은 구하는 다각형들의 중심이 된다. 만약 정18각형을 원한다면, 점 G 또는 18로부터 B까지의 거리를 잡아 원주를 작도하고, 원주를 따라 18개의 원을 작도하면 된다.



[그림 5] 정12각형에서 정24각형까지 작도 방법

기술한 방법을 바탕으로, 다음과 같은 정13각형의 작도 순서를 얻을 수 있다.

① 선분 AB의 수직이등분선 CD를 작도한다.

② 중심이 A이고 반지름이 AB인 원에서 호 AE를 작도한다.

③ 호 AE를 12등분하는 점 H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R을 표시한다.

④ 중심이 E이고 반지름이 EH인 원에서 호 HU를 작도한다.

⑤ 중심이 U이고 반지름이 UB인 원을 작도하여 CD와의 교점을 V라 한다.

⑥ 중심이 V이고 반지름이 VB인 원을 작도한다.

⑦ 얻어진 원주에 선분 AB와 같은 선분들을 표시하면, 정13각형을 얻게 된다.

다른 정다각형들도 정13각형의 작도와 같은 방법으로 작도되게 된다. 이제 [그림 5]의 작도방법을 분석하자. 앞에서 기술한 것처럼 호 AE를 자와 컴퍼스를 이용하여 12등분하는 것은 불가능하다. 여기서는 12등분점 H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R이 주어졌다고 할 경우에 [그림 5]에서 기술한 작도방법이 타당한가에 대해 살펴보자.

[그림 5]에 점 B를 원점으로 하는 좌표계를 생각하고, BC=CA=t라 하자. 그러면 중심이 B이고 반지름이 BA인 원의 방정식은 $x^2+y^2=4t^2$이다. 삼각형 EAB는 정삼각형이므로 $\angle\mathrm{EBA}=\frac{\pi}{3}$이며, 점 H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R는 호 EA를 12등분하는 점들이므로 $\angle\mathrm{HBA}=\frac{11\pi}{36}$, $\angle\mathrm{IBA}=\frac{5\pi}{18}$, $\angle\mathrm{JBA}=\frac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{KBA}=\frac{2\pi}{9}$, $\cdots$, $\angle\mathrm{RBA}=\frac{\pi}{36}$이다. 이로부터 점 H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R의 좌표가 각각 $\left(-2t\cos\frac{11\pi}{36},\ 2t\sin\frac{11\pi}{36}\right)$, $\left(-2t\cos\frac{5\pi}{18},\ 2t\sin\frac{5\pi}{18}\right)$, $\left(-2t\cos\frac{\pi}{4},\ 2t\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\cdots$, $\left(-2t\cos\frac{\pi}{36},\ 2t\sin\frac{\pi}{36}\right)$가 된다는 것을 알 수 있다. 한편 점 E의 좌표는 $(-t,\ \sqrt{3}t)$이다.

이제 선분 EH, EI, EJ, EK, EL, EM, EN, EO, EP, EQ, ER을 구하자. 우선 EH를 점-직선 사이의 거리 공식에 의해,

$$\mathrm{EH}=\sqrt{\left(2t\cos\frac{11\pi}{36}-t\right)^2+\left(\sqrt{3}t-2t\sin\frac{11\pi}{36}\right)^2}=\sqrt{8-4\cos\frac{11\pi}{36}-4\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}\ t$$

가 얻어진다. 위에서 기술한 정13각형의 작도방법의 표기를 이용하면, $\mathrm{EH}=\mathrm{HU}$가 된다. 같은 방법으로, EI, EJ, EK, EL, EM, EN, EO, EP, EQ, ER을 계산할 수 있다.

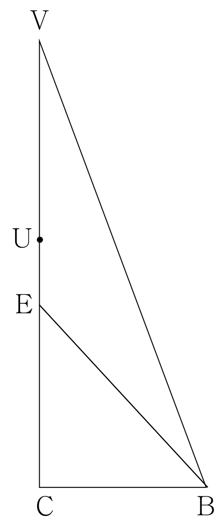
이제 HU를 구하기 위해, 삼각형 EBU를 생각하자. $\mathrm{EB}=2t$이고 $\angle\mathrm{BEU}=\frac{5\pi}{6}$이므로 코사인 정리를 사용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\mathrm{BU}^2=(2t)^2+\left(\sqrt{8-4\cos\frac{11\pi}{36}-4\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}\ t\right)^2-4t^2\sqrt{8-4\cos\frac{11\pi}{36}-4\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}$$

이로부터 $\mathrm{BU}=\sqrt{12-4\cos\frac{11\pi}{36}-4\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}+2\sqrt{3}\sqrt{8-4\cos\frac{11\pi}{36}-4\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}}\ t$를 얻을 수 있다. 정다각형의 한 변 $a=2t$임을 감안하면,

$$\mathrm{BU}=\sqrt{3-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}}\ a$$

가 된다. 이제 정13각형의 외접원의 반지름 BV를 계산하자. 이를 위해 직각삼각형 VCB를 생각하자(그림 6).



[그림 6]

[그림 6]에서 피타고라스 정리에 의해, $\overline{BV}^2=(\overline{CE}+\overline{EU}+\overline{UV})^2+\overline{CB}^2$이다. $\overline{BU}$=$\overline{UV}$이고, $\overline{CB}=\frac{a}{2}$, $\overline{CE}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$, $\overline{EU}=\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}\,a$이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\overline{BV}^2=\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}+\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}\,a+\sqrt{3-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}}\,a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

이 식을 정리하면,

$$\overline{BV}^2=\left(6-2\cos\frac{11\pi}{36}-2\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}+2\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}+\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}\right)\times\sqrt{3-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{11\pi}{36}-\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{36}}}\right)a^2$$

같은 방법으로, 정14각형의 외접원의 반지름을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\left(6-2\cos\frac{5\pi}{18}-2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}+2\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}+\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}\right)\times\sqrt{3-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}+\sqrt{3}\sqrt{2-\cos\frac{5\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{18}}}\right)a^2$$

나머지 정다각형의 외접원의 반지름도 유사한 방법으로 구할 수 있다.

이제 얻어진 정13각형, 정14각형, 정15각형, 정16각형, 정17각형, 정18각형, 정19각형, 정20각형, 정21각형, 정22각형, 정23각형의 외접원의 반지름을 Excell 프로그램을 이용하여 소수점 9자리까지 근사값을 구하여[4], 정n각형의 한 변의 길이 공식 $a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$에서 얻어지는 외접원의 반지름 R값과 비교하면 [표 3]과 같다.

정다각형	[그림 5]에서 얻어지는 R의 값, 즉 BL, BM, BN, BO, BP	$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$
정13각형	2.090377787a	2.089290734a
정14각형	2.250827938a	2.246979604a
정15각형	2.412466897a	2.404867172a
정16각형	2.57464574a	2.562915448a
정17각형	2.736782846a	2.721095576a
정18각형	2.898349591a	2.879385242a
정19각형	3.058859639a	3.03776691a
정20각형	3.217860981a	3.196226611a
정21각형	3.374930014a	3.35475307a
정22각형	3.529667147a	3.513337092a
정23각형	3.681693557a	3.671971098a

[표 3] 정다각형들의 외접원의 반지름 비교

[표 3]의 계산 결과로부터, [그림 5]를 이용하여 얻어지는 정다각형의 작도방법이 정확하지 않음을 알 수 있다. 즉 [그림 5]의 작도방법에서 얻어지는 외접원의 반지름과

4) Excell 프로그램에서 정13각형의 외접원의 반지름 BV의 값을 계산하기 위해, 다음과 같은 식을 이용하였다:
SQRT(6-2*COS(PI()*11/36)-2*SQRT(3)*SIN(PI()*11/36)+2*SQRT(3)*SQRT(2-COS(PI()*11/36)-SQRT(3)*SIN(PI()*11/36))+(SQRT(3)+2*SQRT(2-COS(PI()*11/36)-SQRT(3)*SIN(PI()*11/36)))*SQRT(3-COS(PI()*11/36)-SQRT(3)*SIN(PI()*11/36)+SQRT(3)*SQRT(2-COS(PI()*11/36)-SQRT(3)*SIN(PI()*11/36))))

수학적으로 증명된 등식 $a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$으로부터 얻어지는 외접원의 반지름 값이 같지 않으므로, [그림 5]에 의한 정다각형 작도가 정확한 작도가 아니라는 결론을 얻을 수 있다.

'자와 컴퍼스의 방법'에 원주의 등분할을 통해 정육각형에서 정12각형, 정13각형에서 정24각형까지의 일반화된 작도 방법이 제시되어 있었다. 그러나 이들 정다각형의 외접원의 반지름을 계산하여 비교한 결과, '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 작도방법은 정확한 정다각형의 작도가 아니라, 정다각형과 유사한 다각형의 작도방법이라는 것이 확인되었다.

원주의 등분할을 통해 얻어진 정육각형에서 정12각형의 작도 방법, 정13각형에서 정24각형까지 작도 방법은 나름대로 일반화된 접근 방법을 제시하였다는 측면에서는 의미를 부여할 수 있으며, 특히 중등학교의 심화학습에서 이들 작도방법을 학생들과 탐구하고, 작도과정의 오류에 대해 논의하는 것은 학생들의 비판적 사고력 계발・육성과 관련하여 의미로울 것으로 기대된다.

3. 결론

본 연구에서는 1709년 러시아에서 출판된 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도들 중에서 정7각형과 정9각형을 중심으로 이들의 작도에 관련된 오류를 분석하였다. '자와 컴퍼스의 방법'에는 이들 정다각형의 작도와 함께 정육각형에서 정12각형, 정13각형에서 정24각형을 작도하는 일반화된 방법이 제시되어 있는데, 본 연구에서는 이들 작도가 오류를 포함하고 있음을 보이고, 이들 오류의 교육적 활용 가능성에 대해서도 고찰하였다.

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정7각형의 첫 번째 작도 방법에서는 정7각형의 한 변이 되는 선분 AB를 연장하여 AB=BC인 선분을 작도한 다음, 마름모 ACED를 작도하였다. 그리고 선분 BD와 대각선 AE의 교점 F를 잡아, 선분 AF를 반지름으로 하는 원을 작도하였다. 그런 다음, AB를 한 변으로 하는 다각형을 작도하면, 정7각형이 얻어진다. 본 연구에서는 이와 같은 방법으로 얻어진 원의 반지름 AF에 대한 근사값과 정7각형의 한 변의 공식 $2R\sin\frac{180^{\circ}}{7}$에 대한 근사값을 Excell 프로그램을 이용하여 계산하여, 작도과정에 오류가 있음을 밝혔다. 한편 '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정9각형의 작도방법에 관련된 수학적 관계를 유도하여, 정9각형의 작도에 오류가 포함되어 있음을 제시하였다. 그리고 근사값의 계산을 통해, 이들이 정7각형, 정9각형에 유사한 정다각형이라는 것을 알 수 있었다.

'자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도와 관련하여 흥미로운 것들 중의 하

나는 원주의 등분할을 이용하여, 정육각형에서 정12각형까지, 정13각형에서 정24각형까지를 작도하는 일반화된 방법을 제시하고 있다는 것이다. 본 연구에서는 다양한 근사값의 계산을 통해, 이들 작도를 통해 얻어지는 다각형들이 정다각형은 아니라는 것을 보였다. 그러나 얻어진 도형들이 정다각형은 아니지만, 자와 컴퍼스를 이용한 간단한 작도를 통해 수학사의 중요한 문제인 정다각형 작도에 근접한 다각형의 작도를 얻을 수 있다는 것은 학생들의 인지적인 호기심을 자극하기에 충분할 것으로 생각되며, 학생들의 수학적 탐구의 좋은 대상이 될 것으로 기대된다.

본 연구를 통해 얻어진 자료들은 정다각형 작도문제의 해결을 위한 노력에서 성공적이지 못한 시도에 관련된 새로운 자료를 제공할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. 김주봉, 정다각형의 작도법에 관한 고찰, **청주교육대학교 과학교육연구소 논문집** 20, 73-88. 1999.
2. 김주영, 김성숙, 영의 역사와 영에 얽힌 오류들, **한국수학사학회지** 14 (2001) No.1, 101-108.
3. 우정호, **수학 학습-지도 원리와 방법**, 서울대출판부, 2000.
4. 이종희, 수학의 역사와 오류, **한국수학사학회지** 15 (2002) No.3, 35-48.
5. 한인기, '자와 컴퍼스의 방법'에 제시된 정다각형의 작도 방법 연구, **한국수학사학회지** 21 (2008) No.2, 119-134.
6. 허민, 수학사의 오류, **한국수학사학회지** 9 (1996) No.1, 32-39.
7. Atanasyan L.S., Denisova N.S., Silaev E.V., *Krus Elementarnoi Geometrii*, Santakc-Press, 1997.
8. Belozerov S.E., *Pyat Znamenityh Zadach Drevnocti*, Izd. Rostovskogo Universiteta, 1975.
9. Bradis V.M.,, Minkovski V.L., Harcheva A.K., *Oshibki v Mathematichskih Rassuzdeniyah*, Uche-ped. Izd., 1959.
10. Kirillov A., O Pravilnyh Mnogougolnikah, Funktsii Eulera i Chislah Ferma, *Kvant*, 7 (1977), 2-9.
11. Lakatos I., *Proof and Refutations*, Cambridge University Press, 1976.
12. *Priemy tsirkulya i Lineiki*, Moskva, 1709.

A Study on the Errors Related with Constructing Regular Polygons in 'Method of Ruler and Compass'

Gyeongsang National University **Inki Han**

In this paper we study errors related with constructing regular polygons in the book 'Method of Ruler and Compass' written three hundreds years ago. It is well known that regular heptagon and regular nonagon are not constructible using compass and ruler. But in this book construction methods of these regular polygons is suggested. We show that the construction methods are incorrect, it include some errors.

Key words : construction, regular polygon, error, regular heptagon, regular nonagon
2000 Mathematical Subject Classification: 01A05, 01A50, 97U20
ZDM Classification: U24

접수일 : 2009년 4월 17일 수정일 : 2009년 5월 15일 게재확정일 : 2009년 5월 18일