한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 1 - 30

프레게의 칸토르 비판
— 수학적 실천과 수학의 적용1)

한국과학기술원 문화과학대학 **박준용**
pjyong@hanmail.net

프레게의 논리주의는 흔히 19 세기 후반의 산수화 운동을 잇는 수론 내의 발전 사례로 간주된다. 그러나 실수 해석학 내의 그의 실제 작업을 고려해 볼 때 이런 견해를 받아들이기란 쉽지 않다. 그래서 그의 논리주의는 당대의 수학적 실천과는 유리된 철학적 프로그램에 불과했다고 간혹 주장되곤 했다. 이 논문에서 나는 이 두 견해가 근거 없는 편견에 의존하고 있고, 그런 편견은 당대의 수학적 실천의 맥락 내에서 프레게 논리주의가 갖는 이론적 지위를 오해한 데서 비롯한 것임을 보일 것이다. 첫째로 나는 칸토르의 실수 정의와 이에 대한 프레게의 비판을 검토할 것이다. 이에 근거해서 나는 프레게의 목표는 양의 비율을 순수 논리적으로 정의하는 것이었음을 보일 것이다. 둘째로 나는 프레게 논리주의의 수학적 배경을 고찰할 것이다. 이를 기초로 나는 실수 해석학에 대한 그의 견해는 예상외로 정교하다는 것을 보일 것이다. 프레게는 바이어슈트라스나 칸토르와는 달리 보편적 적용 가능성을 갖는 실수 해석학에 도달하려 하는 반면, 전통적 견해를 고수하는 대부분의 수학자들과 달리 실수 해석학을 확립할 때 기하학적 고찰에 결코 의지하지 않으려 한다. 셋째로 나는 프레게가 이 두 측면 — 기하학으로부터 독립성 및 보편적 적용 가능성 — 을 논리학 자체의 특징으로 간주하였고, 논리주의에 따라 그것을 산수학 자체의 특징으로 간주하였다고 주장한다. 그리고 나는 실수가 양의 비율이라는 그의 견해는 수들의 본성이 다양한 맥락에서 수들이 하는 공통된 역할 내에서 이해되어야 한다는 그의 방법론적 원칙으로부터 유래하였다는 것, 그리고 그는 그런 식의 정의 없이는 수의 보편적 적용 가능성도 적합하게 설명될 수 없다고 생각했다는 것을 보일 것이다.

---

1) 이 논문은 2005년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2005-079-AS0033). 이 글의 초고 일부는 2006년 6월에 한국수학사학회에서 한 번 발표되었고, 한국과학기술원의 수학철학 모임 세미나에서 다시 한 번 발표되었다. 발표에 참여해서 글을 읽어 주신 분들께 감사한다. 그리고 좋은 지적을 해주신 여러 선생님들(박우석, 박창균, 최창선, 최원배, 홍성사 선생님)께 감사를 드린다. 마지막으로 이 글에 관해 가치 있는 논평을 해준 익명의 심사위원들께도 감사한다.

주제어: 프레게, 실수, 칸토르, 해석학의 산수화, 수학의 적용, 양, 비율

1. 머리말

칸토르의 실수 정의 방법은 데데킨트의 실수 정의 방법과 함께 오늘날 집합론 내에서 실수 정의의 표준이 되었다. 오늘날 표준적 집합론에서는 정수들을 [차를 구성하는] 자연수 순서쌍의 동치 집합으로 정의하며, 유리수들을 [분수를 구성하는] 정수 순서쌍의 동치 집합으로 정의한다. 반면 실수들은 너무 많아서 유리수의 쌍으로는 충분히 지시할 수 없으므로, 일정 조건들을 만족하는 유리수 무한 집합으로 실수들을 정의한다. 잘 알려진 한 가지 정의 방법은 실수를 그것에 수렴하는 유리수 수열에 의해 지시할 수 있다는 사실을 이용하여, 코쉬 수렴 조건을 만족하는 모든 유리수 수열의 집합을 동치 관계에 의해 나누는 것이다.[2] 이런 실수 구성의 만족스런 정식화는 칸토르에게서 유래한 것이다.

오늘날에는 칸토르나 데데킨트의 실수 이론이 표준적인 것이 되었지만 그들의 이론이 제시된 19세기 후반부터 그들로부터 비롯된 추상적인 해석학이 충분히 발전된 20세기 초반까지는 그들의 새로운 실수 이론에 대한 반발은 적지 않았다. 칸토르나 데데킨트 등은 당시 이른바 해석학의 산수화 운동에 속한다. 이 전통의 주요 특징은 해석학 연구에서 기하학적 정의 및 증명을 추방하고 순수 산수적 방법에만 의지하는 것이었다. 그러나 유클리드, 뉴턴 등에게서 비롯된 전통, 즉 수를 양 개념과 연결 지어 이해하려던 기존 전통에서 보면, 그들의 추상적 작업은 기존에 수학이 가졌던 과학적 기반을 잃어버리는 것이었다. 이 때문에 여러 수학자들은 새로운 실수 이론이 내적으로 모순은 없다 해도 과학적 가치는 없는 것이라고 주장하였다.[3]

프레게는 『산수의 근본법칙』 제2권(1903)에서 바이어슈트라스, 데데킨트 및 칸토르 등 당대 해석학의 산수화 작업을 주도하던 여러 학자들의 실수이론을 비판하였다. 잘 알려진 대로 프레게가 실수 해석학을 포함한 산수학 전체를 논리학의 일부라고 주장한다는 점을 고려할 때, 그리고 그에게 순수 산수적 방법이란 논리적 방법일 뿐임

---

2) 보통 코쉬 수열은 자연수로부터 유리수로의 함수 s: ω → Q에 의해 $|s_m - s_n|$이 충분히 큰 모든 m과 n에 대해 임의의 유리수 ε보다 더 작게 되는 열로 정의 된다: 즉, 모든 양의 유리수 ε에 대해, $(\exists k \in \omega)(\forall n > k)\ |s_m - s_n| < \varepsilon$. (H.B. Enderton, Set Theory, 111-112.)

3) 유리수의 산수이론 창시자인 항켈은 수와 양을 완전히 분리하려는 바이어슈트라스의 요구에 대해 강한 반대를 표명하였다: "무리수를 양 개념 없이 형식적으로 다루려는 시도는 가장 난해하고 문제 많은 인위성들을 낳게 될 것이고, 그 일이 아주 엄밀하게 수행된다 하더라도 ... 높은 과학적 가치를 갖지는 못할 것이다."(Hankel[1867], p. 46.) 그리고 폴 드 브와-레이몽 같은 수학자는 새로운 해석학의 많은 방법들을 수용하면서도 양 개념이 수 개념의 기초에 핵심적 지위를 차지한다는 견해를 계속 유지한다: "결국 수를 양과 분리하는 순수 형식적주의적-문자적 해석학의 구도는 이 과학[해석학]을 단지 기호들의 게임으로 강등시킬 것이다." (Du Bois- Reymond [1882], p. 53.)

을 고려할 때, 아마 많은 사람들은 실수에 대한 그의 견해가 전통적 양이론을 고수하는 수학자들보다는 새로운 산수학적 해석학을 제시하려는 사람들에 동의하리라고 예상할 것이다. 그러나 그의 실제 논의를 살펴보면 우리는 이런 예상이 상당히 빗나간 것을 알게 된다. 물론 그는 산수학의 기초를 제시할 때 기하학이나 기타 특수과학의 방법에 의존해서는 안 된다고 주장한다. 하지만 그는 여전히 실수를 양 개념과 연결지을 뿐 아니라, 실수를 양의 비율이라고 명시적으로 주장한다. 나아가 그는 산수학적 해석학을 추구하는 수학자들이 실수를 정의할 때 양의 비율로서 실수를 고려하지 못했다고 비판한다.

한 동안 프레게의 논리주의는 19세기 후반 해석학의 산수화 작업의 단순한 연장으로 이해되었다. 이런 해석에서는 마치 데데킨트, 칸토르 등이 실수 해석학을 정수론 및 유리수론 만을 토대로 삼아 발전시켰듯이, 프레게가 한 작업은 자연수론을 논리학과 집합론만을 토대로 발전시킨 것이라고 간주된다.[4] 이 경우 흔히 데데킨트, 칸토르 등의 고전적 실수론과 프레게 실수론의 차이는 아예 무시되지만, 『산수의 근본법칙』 제2권의 논의는 이런 견해를 정면으로 반박한다. 이런 해석에 대한 반발로 어떤 사람들은 프레게가 당대 해석학의 흐름과 유리되어 있었고, 그의 논리주의는 당대 수학적 실천과는 무관한 철학적 프로그램이었을 뿐이었다고 주장한다.[5] 이런 해석에 따르면 프레게가 전통적 양이론을 유지했던 것은 당대 해석학의 상황과 유리되어 나타난 퇴행성의 증거로 여겨질 것이다. 필자는 이 두 해석 모두 프레게 당대의 수학적 실천의 맥락 내에서 그의 논리주의가 갖는 이론적 지위를 알맞게 평가하지 못한 데서 생긴 오류라고 믿는다.[6]

이 글은 프레게 실수이론 및 논리주의에 대한 이런 잘못된 생각을 교정하는 데 목적이 있다. 이를 위해 필자는 『산수의 근본법칙』 제2권의 논의에서 핵심을 차지하

4) 물론 필자는 프레게가 해석학의 산수화 흐름을 전면적으로 거부했다고 주장하는 것이 아니다. 그는 분명히 일정 정도 그 흐름에 동의했고 주요 방법론적 원리를 공유하였다. 필자의 논점은 프레게가 19세기 후반 해석학의 산수화 작업을 주도하던 바이어슈트라스, 데데킨트 혹은 칸토르 등의 실수 이론 내의 작업을 단순히 이어서 자연수론의 기초를 제시하려 한 것이 아니라는 데 있다.

5) 키쳐가 이런 해석을 대표한다. 키쳐는 프레게가 당대의 수학적 실천과 유리되었을 뿐 아니라, 심지어 프레게가 수학의 적용 문제를 제대로 고려하지 않았다고 주장하기까지 한다. Kitcher[1986], 312. 그러나 『산수의 근본법칙』 제2권에 나오는 수학의 적용에 대한 프레게의 논의는 키쳐의 주장에 대한 정면의 반박이다. 흥미롭게도 키쳐 논문의 참고문헌에는 『산수의 근본법칙』 제2권이 등장하지 않는다.

6) 프레게 당대의 다양한 수학적 경향들 내에서 프레게 논리주의가 갖는 이론적 지위에 관해 최근 20여 년간 많은 연구가 이루어졌고, 새로운 사실들이 많이 밝혀졌다. 마크 윌슨은 프레게의 추상 대상의 도입 방법이 당시 사영 기하학에서 복소량을 도입하기 위한 슈타우트나 플뤼커의 방법에 많은 영향을 받았다는 사실을 밝혀 주었다. Wilson[2007] 참조. 야미 타펜덴은 프레게의 수학적 방법론이 당시 실수 해석학의 산수화 작업을 대표하던 베를린 학파의 바이어슈트라스의 사상보다는 리만의 영향 하에 있던 괴팅엔 학파의 사상에 훨씬 더 가깝다는 사실을 밝혀주었다. 그에 따르면 괴팅엔 학파는 수학의 순수성보다는 수학의 다양한 적용 가능성을 더 강조하며, 수학적 개념의 표현이나 계산 방법보다는 수학적 개념의 유기적 구성과 생산적 적용을 더 강조한다. Tappenden[2006] 참조.

는 칸토르 이론에 대한 프레게의 비판을 자세히 검토하려 한다. 이 검토를 토대로 삼아, 필자는 프레게 당대의 해석학에는 흔히 가정되는 것보다 더 다양한 흐름이 존재했다는 것, 프레게의 논리주의는 당대 해석학의 실천에서 유리된 것이 아니라 당대의 다양한 연구 흐름의 장단점을 독자적 시각에서 이해하고 평가한 결과 얻어진 견해였다는 것, 그리고 그의 실수이론은 후대에도 유력한 이론으로 발전하여 왔을 뿐 아니라 지금도 여전히 재조명할 가치가 있다는 것을 보이려 한다.

필자는 다음 순서에 따라 논의를 진행한다. 먼저 프레게가 비판의 대상으로 삼는 칸토르의 실수 정의 부분을 요약한 후, 프레게의 비판의 요지를 재구성한다. 필자는 특히 실수의 적용에 관한 칸토르의 견해에 대한 비판을 자세하게 검토한다. 다음으로 프레게의 칸토르 비판이 갖는 의의가 무엇인지 밝히기 위해, 당대의 실수 해석학의 상황 내에서 프레게가 차지하는 이론적 지위를 살펴보고, 그의 논리주의 및 실수 이론의 주요 특징을 살펴본다. 이 논의를 기초로 그가 실수와 양을 연결시킨 이유는 단순히 기존 전통을 고수하려는 것이 아니라 산수의 본성 및 산수의 적용에 대한 그의 견해에서 비롯된 것임을 밝힌다.

2. 칸토르의 실수 정의

2.1. 칸토르의 정의 동기

칸토르의 실수 이론은 “삼각 함수열 정리의 확장에 관하여”라는 1872년의 논문[7]에서 처음 등장하며, 1883년 “보편 다양성 이론의 기초”라는 글[8]에서 그 이론을 다시 제시한다. 프레게는 후자의 글을 중심으로 칸토르의 실수 정의를 검토하며, 필요한 곳에서 전자의 글을 검토한다.

칸토르의 정의 동기는 무엇보다 실수에 대한 엄밀한 설명에 도달하는 데 있다. 첫째로 그가 바라는 설명은 기하학적 사실에 의존하지 않는 설명이다. 실수에 관한 당대의 많은 논의들은 기하학적 방법으로 이루어졌고, 이는 실수 해석학의 여러 정리들을 엄밀하게 증명하는 데 장애라고 여겨졌다. 이에 따라 당대 여러 해석학자들은 기하학적 방법에 의존하지 않고 이미 주어져 있는 영역의 수들에 관한 사실만 이용해서 실수의 정의에 도달하려 하였다. 그러므로 칸토르는 다른 사람들의 경우와 마찬가지로 유리수의 집합을 토대로 삼아 실수들을 정의한다.

둘째로 칸토르는 실수를 설명하기 위해 아직 알려지지 않은 사항에 의존해서는

7) “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”, Mathematische Annalen, vol. V, 1872, pp. 123-32.

8) Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883. reprinted in G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, ed. E. Zermelo, Berlin, 1932, pp. 165-208.

안 된다고 생각하였다. 실수들에 관한 기존의 논의에서는 아직 그 존재가 알려지지 않은 극한 값에 의존하는 경우가 빈번하였다. 칸토르가 특히 문제삼은 절차는 어떤 극한의 존재를 그것을 극한으로 갖는 수열로부터 이끌어내는 것이었다. 그는 이와 달리 극한의 존재에 의존하지 않고 특정 조건을 만족하는 수열을 토대로 실수들의 설명에 이르는 것을 목적으로 한다.

2.2. 칸토르의 정의

칸토르의 실수 정의는 그가 "근본열"(fundamental sequences)이라 부르는 유리수열을 도입하는 것에서 시작한다.

> 나는 이제 셋째 실수 정의에 도달한다. 여기서도 우리는 유리수들의 무한 집합 (a_v)를 기초로 삼지만, 그 집합은 바이어슈트라스의 정의와 다른 속성을 갖는다.[9] 내가 요구하는 것은 임의의 작은 유리수 ε을 택한 후에 그 집합의 유한수의 원소들을 분리해 내서 나머지 원소들의 모든 쌍의 차가 절대 값에서 ε보다 작게 되도록 할 수 있어야 한다는 것이다. 조건
>
> $$\lim_{v=\infty}(a_{v+\mu}-a'_{v})=0 \text{ (임의의 } \mu \text{에 대해)}$$
>
> 에 의해 특징을 규정할 수 있는 모든 그런 집합 (a_v)를 나는 근본열이라고 부르고, 그 근본열을 그것에 의해 정의되는 수 b와 대응시킨다. b 대신 우리는 편리하게 기호 (a_v) 자체를 사용할 수 있을 것이다.[10]

그는 이런 설명을 토대로 새로 도입되는 수들을 영, 양수 및 음수로 분류한다.

> 그런 근본열은 정의에 의해 엄밀하게 연역할 수 있는 다음 세 경우를 표현한다: 열 (a_v)의 원소들은 v 값이 충분히 클 때 주어진 어느 수보다도 절대 값이 더 작거나, 특정 v에서 시작할 때 결정적으로 명시할 수 있는 유리수 ρ보다 더 크거나, 특정 v에서 시작할 때 결정적으로 명시할 수 있는 음의 유리수 −ρ보다 더 작다. 첫째 경우 나는 b가 영과 동일하다고 하고, 둘째 경우 b가 영보다 더 큰 것 혹은 양수라고 하고, 셋째 경우 b가 영보다 더 작은 것 혹은 음수라고 한다.

---

9) 칸토르는 문제의 유리수 집합에 대한 바이어슈트라스의 정의를 이렇게 묘사한다: "첫째 정의에서는 (a_v)로 표시되는 유리수 av들의 집합이 기초로 주어지는데, 이 집합은 그 a_v가 무엇이든 그리고 몇 개든 간에 (그 개수가 유한한 한) 그 합이 특정할 수 있는 극한보다 언제나 더 작다는 조건을 충족시킨다."(Cantor[1883], 9절의 셋째 단락.)

10) Cantor[1883], 9절의 여덟 번째 단락. 아래 인용된 칸토르의 언급은 모두 같은 곳에서 따 온 것이다.

다음으로 그는 근본열 개념에 기초해서 새로 도입되는 수들에 대한 합, 곱 등의 연산이 어떻게 이해되어야 하는지 설명한다.

> 이제 초보적 연산들이 등장한다. 만약 (a_v)와 (a'_v)가 수 b와 b′을 결정하는 두 근본열이라면, ($a_v \pm a'_v$)와 ($a_v \cdot a'_v$)도 근본열로서 합과 차 $b \pm b'$ 및 곱 bb′을 결정하는 새로운 세 수를 결정한다는 것을 보일 수 있다.
> 또한 만약 b가 (방금 정의가 주어진) 영과 다르다면, 우리는 (a'_v / a_v)도 근본열로서 그 대응 수가 b'/b의 정의를 제공한다는 것을 증명할 수 있다.

흥미롭게도 이렇게 정의된 연산들은 근본열에 의해 새로 도입된 수들에 대해서만 아니라 이미 주어져 있는 유리수들에도 적용되는 것으로 간주된다.

> 근본열 (a_v)에 의해 주어진 수 b와 직접 주어진 유리수 a 사이의 초보적 연산들은 a'_v=a, b'=a로 적음으로써 방금 주어진 정의에 포함된다.

나아가 칸토르는 이제 새로운 수들에 적용되는 관계 표현으로서 ‘같음’, ‘더 큼’ 및 ‘더 작음’ 등의 표현을 정의한다.

> 이제야 두 수 b와 b′에 대해 (이 중 b'은 =a일 수 있는데) 등식, 더 큼, 더 작음의 정의가 등장한다. 즉, 우리는 $b - b'$이 영과 같은지 영보다 더 큰지 아니면 영보다 작은지에 따라 $b = b'$나 $b > b'$, 아니면 $b < b'$라고 말한다.

2.3. 일리겐스의 비판

일리겐스는 1889년 “바이어슈트라스-칸토로의 무리수 이론에 관하여”라는 논평[11]에서 칸토르의 실수 정의를 비판하였다. 우리가 주목할 만한 비판은 두 가지이다. 첫째로 일리겐스는 칸토르가 유리수를 정당한 이유 없이 새로 도입되는 수에 속하는 것처럼 다룬다는 점을 지적한다.

> 수열 (a_v)에 의해 정의된 새로운 수로서 기호 b가 그 수열에 대응한다면, 적어도 다른 정의를 제시하기 전에는 b가 전혀 알려지지 않은 종류의 아무 속성 없는 사물일 것이다. 왜냐하면 b 자체는 전혀 탐구되지 않았기 때문이다: b는 다만 어떤 법칙에 의해 수열 (a_v)가 주어진다는 것을 나타내는 기호로 간주될 뿐이다. 그런데 b의 개념이 유리수와는 조금도 공통점이 없고 전혀 다른 본성을

11) E. Illigens[1889]: Zur Weierstrass′-Cantor′schen Theorie der Irrationalzahlen, Mathematische Annalen, Vol. xxxiii, 1889, pp. 155-60.

> 갖는다는 것은 의심할 여지가 없다. b는 어떤 수열이 주어져 있다는 것의 기호에 지나지 않지만, 유리수는 분수로 표시되는 다수성(Vielheit), 혹은 더 정확히 표현한다면 사물의 양(Quantität)이기도 하다. 그러므로 유리수는 새로운 사물 b, b′ 등의 특수 사례가 아니다. 그런데 여기서 그 이론이 더 전개될 때 두 수열 기호 b, b′가 어떤 법칙에 따라 전자가 후자보다 '더 큰' 혹은 '더 작은' 것이라고 부를 때에는 무언가 변화가 있지 않은가?[12)]

둘째로 일리겐스는 칸토르의 정의에서는 "$\sqrt{2}$ 미터의 길이" 같은 양의 표현이 무엇을 의미하는지 알 수 없다고 비판한다.

> 또한 무리수가 수열의 기호일 경우 우리는 지칭된 수를 무엇으로 이해해야 하는가? 예를 들어 $\sqrt{2}$ 미터의 길이는 무엇으로 이해되어야 하는가? 아마 우리는 1.4, 1.41, 1.414 미터 등의 길이의 극한인 길이라고 대답할지 모른다. 옳다. 그러나 이 대답은 $\sqrt{2}$가 1.4, 1.41, 1.414등의 극한인 그 양을 의미한다는 전제를 포함한다. 그러나 앞에 설명한 이론에 따를 때 $\sqrt{2}$는 양의 기호가 될 수 없으며, 이와 함께 앞에 제시된 대답은 자격이 없다.[13)]

2.4. 칸토르의 답변

불충분하긴 하지만 칸토르는 같은 해에 일리겐스의 반론에 대해 답하였다. 그의 답변의 요지는 구체적 양과 추상적 사고 대상의 구분에 의존한다.

> 그의 반론은 소위 근본열에 의해 도입된 무리수 개념 b, b′, b′′, ... 에 직관적인 다수성(Vielheit)의 의미를 부여할 수 없다는 사실에 근거하는 것처럼 보인다. 그 점에서 그는 확실히 옳다. 그러나 나도 다른 누구도 기호 b, b′, b′′, ... 가 본래 의미의 구체적 양(concrete Grösse)이라고 주장하지 않을 것이다. 그 기호들은 추상적 사고 대상(abstracte Gedankendinge)으로서 원래와 다른 혹은 전이된 뜻으로 양일뿐이다. 여기서 결정적인 것으로 간주되어야 할 것은 나의 이론을 신뢰하는 누구나 알듯이 이 추상적 양 b, b′, b′′, ...의 도움으로 원래의 구체적 양, 예컨대 기하학적 선분 등을 양적으로 정확히 결정할 수 있다는 사실이다.[14)]

칸토르의 주장은 둘로 나눌 수 있다. 첫째로 새로 도입된 무리수들은 구체적 양이 아

12) Illigens[1889], 157면.
13) Illigens[1889], 160면.
14) Cantor(1889), "Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass′-Cantor′sehen Theorie der Irrationalzahlen" in Math. Annalen, Bd. xxxvi, p. 154.

니라 추상적 사고 대상이다. 둘째로 새로 도입된 무리수들은 기하학적 선분 같은 구체적 양의 크기를 결정하는 데 기여한다.

사실 칸토르는 1872년 글에서 근본열에 의해 결정되는 무리수들을 먼저 도입한 후에, 이 수들이 기하학적 양의 크기를 결정하는 데 어떻게 기여하는지 이미 설명하였다. 이 설명은 수들을 직선상의 점들과 대응시키는 일의 논의로 시작한다. 원점으로부터 직선상의 어떤 주어진 점의 거리가 (단위 거리에 비교할 때) 유리수 값을 갖는다면, 그 점은 어떤 유리수에 의해 표현될 수 있을 것이다. 그러나 그 거리가 유리수 값을 갖지 않는다면, 문제의 점은 다음과 같은 어떤 유리수열에 의해 수렴될 것이다.

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \quad \text{(I)}$$

칸토르는 (I)에 대응하는 수열을 문제의 그 점에 무한정 가깝게 다가가는 근본열로 간주할 수 있다는 것을 다음과 같이 언급한다.

> b가 열 (I)에 대응하는 수열일 경우, 원점 O로부터 정해진 점까지의 거리는 b와 같다.[15)]

모든 유리수 각각이 근본열에 의해 결정되는 수들의 집합 안의 어떤 원소와 유일하게 동일시될 때, 직선상의 점들 각각을 새로 도입된 어떤 수에 의해 표현하는 일은 가능할 것이다. 칸토르는 그 역, 즉 새로 도입된 각 수에 직선상의 어떤 점이 대응한다는 것을 공리로 받아들인다.

3. 프레게의 칸토르 비판

프레게는 『산수의 근본법칙』 제2권 3부 (b)절에서 칸토르의 실수 정의를 비판한다. 우리는 그의 비판을 칸토르 정의의 논리적 불완전성과 관련된 것, 그리고 그의 정의가 실수의 적용을 제대로 설명하지 못한다는 것으로 나눌 수 있다.

3.1. 칸토르 정의의 불완전성

칸토르는 한편으로 근본열을 정의한 후 그것을 "그것에 의해 정의되는 수 b와 대응"시킴으로써 b를 수로 간주하는 듯하지만, 다른 한편으로 "b 대신 편리하게 기호 (a_v)를 사용할 수 있다"고 언급함으로써 b를 수가 아닌 근본열의 기호로 간주하기도 하는 듯하다. 프레게의 비판 요지는 바로 둘 중 어느 해석을 택하더라도 칸토르의 언급만으로는 실수 정의에 도달하지 못한다는 것이다. 우리는 그의 비판을 다음과 같이 요약할 수 있다.

15) Cantor[1872], 127면.

(1) b가 근본열의 기호로 이해되는 경우.

b를 근본열의 기호로 간주한다면, b는 없어도 되고 ‘(a_v)’만으로 충분하다. 이 경우 만약 우리가 실수가 무엇인지 안다면, 근본열은 특정 실수를 결정하는 데 도움을 줄 것이다. 그러나 실수가 무엇인지 우리에게 알려진 바가 없다. 왜냐하면, 우리는 근본열만 갖게 되고 실수는 갖지 못하기 때문이다. 그러므로 이 경우 칸토르는 실수의 정의에 도달하지 못한다.

(2) b가 실수로 간주되는 경우.

b가 실수로 간주된다면, 칸토르의 작업은 각 근본열에 이름을 부여하는 것이 아니라 수를 연결시키는 것이 될 것이다. 그런데 이런 수는 이미 주어져 있는 것으로 간주된 유리수는 아닐 것이다. 그런 수는 아직 고찰되지 않은 새로운 수들이고, 그 수들은 그와 연결되어 있는 근본열들에 의해 결정되어야 한다. 그러나 프레게 편에서 보면 새로운 해석은 문제를 조금도 개선하지 못한다. 이렇게 해석할 때 문제는 칸토르가 어느 곳에서도 새 수가 어떻게 정의되어야 하는지, 어떻게 언제 새 수가 정의되었는지 새 수와 근본열과의 연결이 어떻게 언제 설명되었는지 아무런 설명도 하지 않는다는 것이다. 그러므로 이 경우에도 칸토르는 실수의 정의에 도달하지 못한다. 그러므로 프레게는 다음과 같이 말한다.

> 우리는 수와 근본열 사이에 있다고 가정된 그 연관성에 관해 아무 것도 알지 못한다. 하지만 아직 알려지지 않은 것을 전혀 알려지지 않은 관계에 의해 규정하는 것은 불가능하다. 잘못은 바로 근본열의 대응과 새로운 수의 정의를 단번에 성취하려는 데 있다. 우리는 어떤 근본열에 이미 정의된 수를 대응시킬 수는 있지만, 아직 정의하지 않아서 우리에게 주어져 있지도 않은 수를 대응시킬 수는 없다. [각주: 이것은 마치 “붙잡지도 않은 도둑을 목매달고 있는” 격이다.][16]

러셀도 칸토르의 정의 절차와 관련하여 유사한 난점을 지적하였다. 칸토르는 “b=a” 처럼 새로 주어진 수와 이미 주어진 유리수 사이에 동일성을 언급한다. 아마 그는 근본열 (a_v)가

$$a, a, a, ...$$

형태를 가질 때 유리수 a와 같다는 것을 의도한 것으로 보인다. 그러나 근본열을 정의하기 전에 이미 주어진 유리수들이 새로 정의된 수들 안에 포함될 수 있는가?

---

16) Frege[1903], 77절.

> 앞의 실수 정의에는 a가 항들이 모두 a와 같은 근본열에 의해 정의된 그 실수라는 것을 보여주는 바가 전혀 없다. 마치 그것이 자명해 보이는 이유는 극한에 의한 정의가 은밀히 끼어들어서 a가 항들이 모두 a와 같은 열의 극한이라는 것이 뻔해 보이기 때문에 우리로 하여금 a도 그런 열에 의해 정의된 그 실수라고 생각하게 만든다는 것 말고는 없다. 그러나 ... 유리수의 근본열은 실수를 정의하며, 이 실수는 결코 유리수가 아니다.[17]

후대의 발전을 고려한다면, 칸토르가 이런 논리적 난점들을 피하기는 어렵지 않을 것이다. 한 가지 방안은 근본열을 정의한 후 아예 그에 대응하는 수에 관해 언급하지 않는 것이다.[18] 말하자면 먼저 근본열을 정의한 후, 바로 근본열을 사라지는 것, 양인 것, 음인 것 세 부류로 구별한다. 다음으로 근본열들에 대한 차 연산을 정의하고서, (a_v)와 (a'_v)이 근본열일 경우 $(a_v-a'_v)$도 근본열이라는 것을 증명한다. 이렇게 하면 바로 $(a_v-a'_v)$이 사라질 경우 (a_v)를 (a'_v)와 동치인 것으로 정의할 수 있다. 다음으로 이 동치 관계가 이행적이라는 것, 즉 진짜 동치 관계라는 것을 보이고 나면, 우리는 논리적 추상화에 의해 실수들을 근본열들의 동치 집합으로 정의할 수 있을 것이다.

3.2. 칸토르 정의와 실수의 적용

프레게는 칸토르에 대한 일리겐스의 반론은 중요한 논점을 포함하고 있다고 생각한다. 그러나 프레게가 보기에 일리겐스의 반론은 그 자체로 보면 양과 실수의 관계에 대한 중대한 오해를 전제로 삼고 있어서 그 반론의 효력이 상실된다. 이에 따라 프레게는 일리겐스의 오해를 먼저 제거한 후 그의 반론을 재구성한다.

(1) 일리겐스 반론의 재구성

프레게가 언급하는 일리겐스의 첫째 오해는 수가 양을 표시한다고 생각하는 데 있다. 일리겐스는 칸토르의 새로운 수와 달리 “유리수는 양을 표현한다”고 주장한다. 그러나 이는 수 자체가 양의 기호임을 말하는 것이다. 그러나 프레게에 따를 때 수는 기호에 의해 지시되는 것이지 기호 자체가 아니다. 기호와 그것에 의해 지시되는 것의 구분을 유지한다면, 일리겐스의 견해는 오히려 유리수 기호가 양을 표시한다는 것으로 수정되어야 할 것이다. 이에 따라 유리수는 양 자체로 간주되어야 할 것이다.

그러나 프레게는 수정된 일리겐스 견해도 받아들일 수 없다고 한다. 수정된 견해에 따를 때, 유리수 기호는 양을 표시해야 할 것이다. 그러나 정말 그런가? 어떤 막대가 5.5m의 길이를 갖고 있다고 하자. 프레게에 따를 때 여기서 양을 표시하는 말은 “5.5m 길이” 전체이지 “5.5”가 아니다. “5.5”라는 수 표현만으로는 양을 표시하지 못한

17) Russell[1903], §269.
18) Dummett[1991], 267-8.

다. 그러면 양의 표현 “5.5m 길이”에서 “5.5” 자체는 무엇을 표현하는가? 프레게에 따르면, 그것은 1m의 단위 길이에 대해 막대의 길이가 갖는 비율을 표현한다. 그러므로 유리수 기호는 양을 표시하는 것이 아니라, 주어진 양이 단위량에 대해 갖는 비율을 표시한다. 그렇다면 유리수 기호에 의해 지시되는 것, 즉 유리수는 양이 아니라 주어진 양이 단위량에 대해 갖는 비율이다.

이렇게 해서 일리겐스는 유리수 기호가 양을 표시하는 것이 아니라, 문제의 양이 단위량에 대해 갖는 비율을 표시한다는 것을 받아들인다 하자. 프레게에 따를 때 그의 비판은 이제 이렇게 재구성될 수 있다: “유리수 기호는 양의 비율을 표시하지만, 칸토르의 수열 기호는 양이나 그 비율과 무관하게 도입되었으므로 양의 비율을 표시하지 않는다. 양의 비율로서 유리수에 대해 적용되는 ‘더 큰’, ‘더 작은’ 등의 관계 표현은 똑같은 뜻으로 칸토르의 근본열에 적용될 수가 없다. 그러므로 양의 비율로서 유리수를 새로 도입된 수에 포함시키려는 칸토르의 시도는 성공할 수 없다.” 프레게는 이처럼 재구성된 일리겐스의 반론에 대해 다음과 같이 부연한다:

> 만약 일리겐스가 “양”이란 그의 말로 양의 비율, 혹은 — 우리가 지금 지시체가 같은 것으로 간주하는 — 실수에 관해 말하려 하고, 칸토르에 따를 때 수 기호가 아무 양의 비율도 표시하지 않는다고 생각했다면, 그는 옳다. 칸토르의 정의에는 근본열과 수 b만 나타나고 b는 수열의 기호일 뿐이다. 그곳에서는 양의 비율에 관해 아무 것도 언급되지 않는다. 결국 수열 기호는 근본열을 표시하는데, 이 때문에 그것은 더 이상 양의 비율을 표시해서는 안 된다. 왜냐하면 그 경우 기호는 애매해질 것이기 때문이다.[19)]

나아가 프레게에 따를 때 일리겐스의 둘째 반론도 다음과 같이 수정될 수 있다: “칸토르 이론에서 ‘$\sqrt{2}$’의 의미는 유리수처럼 미리 알려져 있는 것으로 전제되지 않으므로, 새로 도입된 수로 간주되어야 할 것이다. 그러나 칸토르는 ‘$\sqrt{2}$’를 양의 비율의 기호로 도입하지 않으므로, ‘$\sqrt{2}$ 미터 길이’도 양을 표현하는 것으로 간주될 수 없다. 그렇다면 도대체 ‘$\sqrt{2}$ 미터 길이의 선’이 무엇을 말하는지 알 수가 없다.”

(2) 칸토르의 적용 설명 비판

수정된 일리겐스의 비판에 대해 칸토르는 어떻게 대응할 수 있는가? 더 이상 수 기호는 양 자체를 나타내는 것으로 간주되지 않기 때문에, 새로 도입한 수가 구체적 양이 아니라는 사실이 문제될 이유는 없을 것이다. 남는 문제는 새로 도입된 수가 유리수와 마찬가지로 양의 크기를 결정하는 데 사용될 수 있는가 하는 점이다. 그러므로 새로 도입된 수를 “구체적인 양의 크기를 결정하는 데 사용할 수 있다”는 칸토르

19) Frege[1903], 73절.

의 주장, 그리고 그런 결정가능성이 그의 실수 정의를 정당화하는 데 결정적이라는 그의 주장이 문제된다.

프레게는 먼저 후자의 주장에 대해 비판한다. 칸토르는 구체적 양의 크기를 정확히 결정하는 일이 그의 이론에 사소하지 않은 중요한 일임을 인정한다. 다시 말해 그는 실수 정의가 구체적 양의 크기를 정확히 결정하는 일에 기여하지 못한다면 만족스러운 것이 되지 못한다는 것을 인정한다. 그러나 프레게가 보기에 이런 생각은 칸토르 자신의 이론과 양립할 수 없다.

> 왜냐하면 수량에 대한 그의 정의에는 그런 결정적인 것이 전혀 나타나지 않기 때문이다. 오히려 b, b′, b′′, . . . 이 도입된 후에야 비로소 수량에 의해 거리가 결정된다. 이런 식으로 수량을 도입하는 것은 순수 산수적인 것이긴 하지만, 그 안에는 결정적인 것이 포함되어 있지 않다. 반면 거리가 어떻게 수량에 의해 결정되는지 진술할 때에는 결정적인 것이 포함되긴 하지만, 그 진술은 더 이상 순수 산수적인 것이 아니다. 이 때문에 칸토르 자신이 세운 목표는 성취되지 못할 것이다. 그의 정의에서 우리는 한편으로 근본열을, 다른 한편으로 기호 b, b′, b′′, . . .를 얻지만, 그밖에 아무 것도 얻지 못한다.[20]

다시 말해 칸토르의 새로운 수는 양이나 양의 크기와는 전혀 관계없이 도입되었다. 이런 도입 방식은 실수를 순수 산수적으로 도입하려는 칸토르 자신의 목적에 부합한다. 그러나 그런 정의만으로는 새로운 수가 어떻게 양의 크기를 재는 데 이용될 수 있는지 알 수 없다. 반면 거리 같은 기하학적 양의 크기를 결정하는 데 새로운 수를 사용하는 방법을 설명할 때에는 거리와 관련된 기하학적 지식을 전제할 것이다. 이 때문에 새로운 수의 적용을 설명할 때에는 칸토르의 정의를 정당화하는 데 중요한 사항이 거론되지만, 그런 설명은 더 이상 순수 산수적 설명이 아니다.

그러면 칸토르의 첫 번째 주장은 근거가 있는가? 즉 구체적 양을 결정하는 데 새로운 수를 이용하는 방법에 대한 칸토르의 설명은 설득력이 있는가? 프레게는 먼저 칸토르의 설명에서 유리수에 의한 거리 결정 방법은 이미 알려진 것으로 전제된다는 점을 주목한다. 유리수 기호는 양의 비율을 표시하므로, 우리는 주어진 거리가 단위 길이에 비해 얼마나 긴지 결정한 후 그 비율로서 유리수를 부여하면 될 것이다. 그러면 칸토르는 새로 도입된 수들에 의한 거리 결정 방법을 어떻게 설명하는가? 그는 근본열의 각 원소는 유리수이므로 각 원소에는 원점으로부터 특정 거리가 대응되고, 원점에서 그 거리만큼 떨어져 있는 점이 대응될 것이라고 생각한다. 이런 점들은 문제의 근본열에 의해 결정되는 어떤 점에 무한정 다가갈 것이다. 이제 칸토르는 원점으로부터 그 점까지의 거리(가 단위 길이에 대해 갖는 비율)는 문제의 근본열에 대응되는 그 수량과 같다고 한다.

20) Frege[1903], 75절.

그러나 이것으로 예컨대 "원점에서 $\sqrt{2}$ 미터 떨어져 있는 거리"라는 표현을 충분히 설명한 것인가? 프레게는 그렇지 않다고 대답한다. 왜냐하면 앞의 절차는 이미 "단위 길이에 대한 주어진 거리의 비율"이 무엇을 의미하는지 알려져 있다고 간주하기 때문이다. 그 절차에서는 유리수에 의한 거리 결정 방법도 이미 알려져 있는 것으로 간주되었고, 근본열에 의해 결정된다고 가정되는 **"그 점이 원점으로부터 떨어져 있는 거리"** 혹은 **"그 점과 원점과의 거리가 단위 길이에 대해 갖는 비율"**이 무엇인지도 알려져 있는 것으로 간주되었다. 그러므로 칸토르가 한 일은 결국 기하학적 양으로서 거리, 두 거리의 비율 등이 무엇인지 알려져 있다는 전제 하에서 이루어진 것일 뿐이다. 그러나 앞에서 본대로 그의 실수 설명에서는 그런 것에 관해 알려진 바가 없다. 그러므로,

> 거리의 비율이 무엇인가 하는 것은 물론 여기서 알려져 있지 않은 것으로, 그리고 이에 따라 설명이 가능한 것으로 간주되어야 한다 — 그리고 그 안에 바로 사태의 핵심이 들어 있다.[21)]

나아가 프레게는 칸토르의 새로운 수는 사실 거리를 결정하는 데 아무 역할도 하지 못한다고 비판한다. 근본열이 주어지면 새로운 수 b, b′, b′′, . . .는 거리 결정에 필요하지 않다.

> 칸토르의 수량 b, b′, b′′, . . .이 기호든지 추상적 사고 대상이든지 혹은 둘 다일 수 있든지, 분명히 그것들은 거리를 결정하는 데에는 쓸모가 없다. 사실 그것들이 끼어들면 쓸 데 없이 일만 더 복잡하게 만들 뿐이다. 수량을 논의에서 전적으로 배제해 보라. 그러면 우리는 근본열만으로 — 그것에 기호 b가 대응되든 말든 — 그 목적에 충분함을 알게 된다.[22)]

그러나 거리의 비율이 무엇인지 알려져 있지 않다면, 근본열만으로 거리의 비율을 결정할 수는 없다. 반면 근본열을 거리 결정에 이용하기 위해 거리의 비율에 대한 별도의 설명에 의존하려 한다면, 앞에서 본대로 이 절차는 순수 산수적이 아니다. 따라서 실수의 기하학적 적용에 대한 칸토르의 설명은 더 이상 순수 산수적 이론이 아니다.

> 만약 거리의 규정이 주어져 있지 않다면, 우리는 한편으로 근본열을 갖고 다른 한편으로 기호들을 갖지만, 아직도 주제는 빠져 있다. 기호 b, b′, b′′, . . . 는 필수적인 것이 아니므로, 우리는 사실 근본열만 가질 뿐이다. 이 열은 비율을 결정하는 데 사용될 수는 있지만, 이것은 양의 비율이 무엇인지 알고 난 후에

21) Frege[1903], 75절.
22) Frege[1903], 76절.

나 가능하다. 그리고 이것이 바로 우리에게 없는 것이다.

여기서도 사정은 마찬가지이다. 우리는 우선 양의 비율, 즉 실수들을 알아야 하고, 그 다음에야 비로소 근본열에 의해 비율을 결정하는 방법을 발견할 수 있다. 기호 b, b′, b′′, . . .을 대응시키는 일에 어떤 창조적 힘을 돌리는 것은 이상한 일이다. 이에 따라 우리는 여기서 온갖 노력을 다해 도달하려 하는 그 내용을 기하학에 의해 얻게 되므로, 기하학이 끼어드는 일은 결정적이다. 그러나 이 경우에는 결정적인 것이 기하학에 있게 되므로, 칸토르의 이론은 결코 순수 산수적 이론이 아니다.[23)]

(3) 프레게의 대안

프레게에 따를 때 칸토르의 실수 정의의 난점은 그런 정의로는 실수의 적용을 적합하게 설명할 수 없다는 데 있다. 기하학적 양의 크기를 결정하는 데 새로 도입된 실수를 알맞게 사용하려면, 먼저 기하학적 양의 크기와 실수가 서로 어떤 관계를 갖는지 알려져야 한다. 그러나 칸토르의 근본열이나 그것에 의해 결정된다고 간주되는 실수들은 양이나 그 비율과는 무관하게 도입되었다. 그러므로 그의 정의만으로는 $\sqrt{2}$ 같은 실수가 선분의 길이 같은 양에 부여되는 방식을 적합하게 설명할 수 없다.

칸토르는 이런 어려움에서 벗어나기 위해 기하학적 양과 그 비율에 대한 별도의 설명을 제시하려 할지 모른다. 그러면 그는 이 설명과 그의 실수 정의를 이용해서 기하학적 양의 크기의 결정 방법을 알맞게 제시할 수 있을 것이다. 그러나 이 절차는 전체적으로 칸토르 자신의 이론적 동기와 충돌한다. 왜냐하면 실수 해석학을 기하학의 도움을 받지 않고 순수 산수적으로 제시하려는 것이 그의 실수 정의의 주요 동기이기 때문이다. 간단히 말해 실수의 적용에 알맞게 실수 이론을 제시하려면 순수 산수적 실수 이론을 제시하기는 어렵고, 순수 산수적 실수 이론을 위해서는 실수의 적용에 알맞은 실수 이론을 제시하기가 어렵다.

프레게의 비판은 칸토르가 다음 두 가지의 과제를 모두 성취하려 한다는 데 의존하고 있다. 첫째로 실수 해석학의 기초를 엄밀히 제시하기 위해서는 실수에 대한 순수 산수적 정의를 제시해야 한다. 둘째로 실수에 대한 적합한 정의는 실수의 적용이 어떻게 가능한지 적절히 설명해 주어야 한다. 프레게는 불완전하긴 하지만 칸토르의 실수 정의가 첫째 조건을 성취하도록 보완될 수 있다는 것을 부정하지는 않는다. 그러나 프레게에 따르면 칸토르의 정의가 보완되더라도 둘째 조건을 성취하려면 특수한 양이나 그 비율에 대한 또 다른 설명이 필요하고, 이 설명에 의존하는 한 칸토르는 또 다시 첫째 조건을 어기게 된다. 그러면 칸토르가 처한 난점을 벗어나려면 어떻게 해야 되는가?

23) Frege[1903], 76절.

> 만약 우리가 (양의) **비율**에 대한 순수 산수적 정의 혹은 순수 논리적 정의를 갖고 있다면, 그리고 그 정의로부터 비율들이 존재하고 그런 비율 중에 무리수가 존재한다는 것을 이끌어낼 수 있다면, 사정은 달라질 것이다. 그러면 그 정의에는 결정적인 것이 나타날 것이고, 단위와 비율(실수)에 의해 거리를 결정하는 일은 예증 사례의 지위만 갖게 되어 생략될 수도 있을 것이다.[24]

프레게의 처방은 먼저 실수를 양의 비율로 설명해야 한다는 것, 그리고 이 설명을 순수 산수적으로 제시해야 한다는 것이다. 그렇게 되면 우리는 거리 같은 특수한 양을 따로 설명하지 않고도 거리 같은 양들 사이의 비율을 왜 실수로 간주할 수 있는지 알 수 있다. 그리고 그 때문에 실수가 왜 다양한 양의 영역에 적용될 수 있는지를 기하학적 지식이나 물리학적 지식에 의존하지 않고도 설명할 수 있게 된다.

4. 프레게 논리주의와 산수의 적용

머리말에 언급한 것처럼 프레게의 논리주의 작업은 당대 해석학의 산수화 흐름의 단순한 연장이거나 아니면 당대의 수학적 실천과 유리된 철학적 프로그램으로 간주되곤 했다. 이 절에서는 이 두 견해 모두가 당대 수학적 실천 내에서 프레게의 작업이 갖는 이론적 지위를 적절히 평가하지 못한 데서 비롯한 것임을 보일 것이다. 나아가 프레게의 논리주의 기획의 전체적 성격 내에서 그의 실수 이론의 주요 특징을 재고함으로써, 칸토르의 실수 이론에 대한 그의 비판이 어떤 의의를 갖는지 평가할 것이다.

4.1. 프레게 실수 이론의 양면성

우선 우리는 이른바 “19세기 해석학의 산수화”이라고 불리는 연구 흐름이 단일한 이론적 특징을 갖는 프로그램으로 이해해서는 안 된다. 그 흐름은 19세기 초반의 가우스, 코시 및 볼차노 등에게서 시작해서 19세기 후반의 바이어슈트라스, 데데킨트 및 칸토르에 이르는 다양한 경향의 연구를 포괄한다.[25] 이런 다양한 연구 경향에 공통되는 점이 있다면 그것은 해석학에서 개념을 정의하고 정리를 증명할 때 기하학적 방법에 호소하지 않고 순수 산수적 방법에 의지해야 한다는 것이다. 그러나 순수 산수적 방법이 무엇을 의미하는지에 대해서는 학자들마다 견해를 달리하였다.[26]

19세기 해석학의 산수화 흐름을 이처럼 넓은 뜻으로 이해할 때, 프레게 역시 이

24) Frege[1903], 75절.
25) Klein(1895), 참조.
26) 예컨대 그 흐름의 주요 인물로 여겨지는 바이어슈트라스, 크로넥커, 그리고 데데킨트 등은 수학의 본성에 관해, 그리고 수학적 방법론에 관해 상당히 다른 견해를 가졌던 것으로 여겨진다. Boniface[2007]의 4절 참조.

흐름에 속한다는 것은 분명하다.[27] 프레게는 이미 1874년 그의 교수 자격 논문에서 수학을 크게 공간적 직관에 의존하는 기하학과 공간적 직관의 도움을 필요하지 않은 산수학, 두 분야로 분류한다.[28] 그에게 "산수학"이란 대수, 정수론, 실수 해석학 및 복소수 해석학을 포함한 넓은 영역의 과학이다. 그는 직관에 의존하는 종합적 방법을 기하학에만 적합한 것으로 한정하고, 수들을 다루는 산수학에는 그런 방법이 필수적임을 거부한 셈이다.

이런 점에서 프레게의 논리주의가 해석학의 산수화 작업과 일치하는 몇몇 논제들을 포함한다는 것은 이상한 일이 아니다. 그는 『산수의 기초』(1884)나 『산수의 근본법칙』(1893, 1903)의 여러 곳에서 "수를 정의할 때 낯선 것을 끌어들이지 말아야 한다"고 언급하는데, 여기서 낯선 것이란 바로 순수 산수적인 것 이외의 것, 기하학이나 역학에서 빌어온 개념이나 방법을 말한다.[29] 그러므로 그가 산수학에 대해 경험적 기초를 제시하려는 경험주의,[30] 시공간적 직관을 토대로 삼아 산수학의 기초를 제시하려는 칸트주의를 모두 반대하는 것은 자연스런 일이다.[31]

그러나 이는 산수학에 대한 프레게의 작업이 당대의 바이어슈트라스나 데데킨트 혹은 칸토르의 견해나 방법을 그대로 따랐다는 것을 의미하지 않는다. 잘 알려진 것처럼 그는 일찍이 『개념 표기』(1879)의 3부에서 수열 이론의 몇몇 개념들에 대한 논리적 정의로부터 고단계 양화 논리학의 원리들을 토대로 삼아 수열 이론의 주요 원리들을 연역해 내었다. 이는 그에게 시공간적 직관에 호소하지 않고 산수 개념을 정의하고 산수학의 정리들을 엄밀히 증명할 수 있는 순수 산수적 방법의 전형으로 여겨졌다. 이에 비해 실수나 무한수의 산수적 설명을 제시하기 위해 바이어슈트라스, 데데킨트, 칸토르가 의존했던 모임, 체계 및 집합에[32] 관한 이론은 그에게는 산수학의 기초를 엄밀히 제시하기에는 불충분한 것으로 여겨졌다. 이에 그는 여러 곳에서 이들의 집합 개념 및 수 개념을 비판한다.[33]

---

27) 뤼첸이 Lützen[2003]에서 하듯 19세기 해석학의 흐름을 코시나 볼차노가 중심이 된 19세기 초반의 엄밀화 작업과 바이어슈트라스로 대표되는 19세기 후반의 산수화 작업으로 나누어서 이해한다면, 프레게는 전자의 전통에는 대체로 동의했지만 후자의 전통에 대해서는 유보적이었을 뿐 아니라 상당히 비판적이었던 것으로 보인다. 순수 산수적 방법에 관한 프레게의 견해는 바이어슈트라스의 견해보다는 중간값 정리에 관한 유명한 논문에서 표명된 볼차노의 견해에 훨씬 더 가깝다. 아래에 묘사된 산수학의 보편적 적용에 관한 프레게의 생각을 Bolzano[2004], 254면에 나타난 볼차노의 견해와 비교해 볼 것.

28) Frege[1967], 51-52면 참조.

29) Frege[1884], 103절. Frege[1903], 158절 참조.

30) 프레게는 『산수의 기초』에서 밀의 경험주의가 산수학의 적용을 산수학의 내용과 혼동한다고 비판하고 있고, 『산수의 근본법칙』II권에서는 헬름홀츠의 경험주의에 대해 유사한 비판을 제시하고 있다. Frege[1884], 8-9절; Frege[1903], 139절.

31) 『산수의 기초』에서 프레게는 대표적 칸트주의자로서 항켈을 지목해서 그의 직관 개념을 비판하고, 『산수의 근본법칙』II권에서는 항켈의 기하학적 실수 설명을 반대한다. Frege[1884], 12절. Frege[1903], 158절.

32) 여기서 "집합"은 "Menge"(set)의 번역이다.

33) Frege[1884], III장의 심리학적 추상화 이론 비판; Frege[1967], 179-180면의 칸토르 집합 개

하지만 아마 프레게의 자연수론이나 기수이론만 고려하는 경우에는 그의 방법과 데데킨트나 칸토르의 방법과의 차이는 그리 두드러져 보이지 않을지 모른다. 그는 이들과 달리 이른바 논리적 집합[34] 개념에 의존하고 있고 고단계 양화 논리학 내에서 엄밀한 증명을 제시하긴 하지만, 그는 여전히 데데킨트와 칸토르가 개척한 실무한의 영역을 받아들이며 이 영역에 대한 그들의 순수 산수학적 작업을 고무한다.[35] 하지만 우리가 『산수의 근본법칙』 제2권에 나타난 그의 실수 이론에 눈을 돌리면, 그의 방법과 데데킨트나 칸토르의 방법의 차이는 좀 더 분명히 드러난다.[36] 그는 데데킨트나 칸토르처럼 유클리드 전통의 양이론을 배격하려 하지 않고, 오히려 실수를 양의 비율로 간주하는 전통적 실수 이론을 적극적으로 수용한다.

> 우리는 실수들을 양의 비율로 이해하였고, 앞에 언급한 형식적인 산수를 배제하였다. 그것을 통해 우리는 양들을 대상들로 간주하는데, 그 대상들 사이에는 그런 비율이 성립한다. [각주: 여기서 우리는 뉴턴과 일치된 견해를 가진다.][37]

프레게의 역사적-이론적 위치는 흔히 예상하는 것보다 더 미묘하다. 한편으로 그는 실수 해석학의 정의나 증명에서 기하학적 직관에 호소해서는 안 된다고 생각한다는 점에서 해석학의 산수화 흐름에 동조하지만, 이 흐름에 속해 있던 대부분의 수학자들이 그랬던 것처럼 전통적인 양이론에서 벗어나서 양 개념과 무관하게 실수를 구성하는 절차에 동조하지 않는다. 그러나 다른 한편으로 그는 실수를 양의 크기와 연결시켰던 당대 대부분의 수학자들처럼 — 예컨대 항켈이 그랬던 것처럼 — 실수를 설명하기 위해 기하학적 양 개념에 의존하려 하지도 않는다.[38] 다음 언급은 이런 그의 방

념 비판; Frege[1893] 서론의 데데킨트 체계 개념 비판; Frege[1903], 3부 1장의 (e)절의 바이어슈트라스의 모임 개념 비판 참조.

34) 프레게는 Frege[1884], 68절에서 “개념의 외연” 개념을 도입하고 Frege[1893], 3절에서 악명 높은 외연의 공리 V를 도입한다. 그는 “개념의 외연” 대신 간단히 “집합”(Klass, class)이라는 말을 쓰기도 한다.

35) Frege[1884], 84-86절; Frege[1967], 178.

36) 아래에서 보겠지만 사실 자연수론에서도 실수론의 경우와 유사한 차이가 있다. 다만 그 경우에는 프레게 역시 일종의 집합론에 의지하고 있다는 점에서 그 차이가 덜한 것처럼 보일 뿐이다. 그러나 프레게는 자연수론에서도 그는 산수학의 순수성이나 추상성만 아니라 산수학의 포괄적 적용 가능성을 강조하고 있고, 1885년 「형식적 산수에 관하여」에서는 그런 포괄적 적용 가능성을 논리주의의 핵심 논제로 간주하고 있다. Frege[1884], 14절 및 23절; Frege[1967], 103-104.

37) Frege[1903], 157절. 우리는 이런 그의 견해가 이전과 달라진 것으로 오해해서는 안 된다. 그는 이미『산수의 기초』(1884)에서 유클리드와 뉴턴의 수 개념을 기수의 정의로는 받아들이지 않지만 더 넓은 의미의 수의 정의로서는 존중한다: “뉴턴은 수를 단위들의 집합이라기보다는 각각의 양이 단위로 간주된 다른 양에 대해 지니는 추상적 비율로 이해하였다. 이렇게 이해할 때 분수와 무리수도 포함하는 넓은 의미의 수를 알맞게 기술할 수 있다고 인정할 수 있다.”(Frege[1884], 19절.)

38) 데데킨트는 양이론에 근거해서 실수를 설명하려는 것은 바로 산수학에 낯선 것을 끌어들이는 것이라고 비판한다. Dedekind[1872], 머리말 및 3절 참조. 이 점에서 아마 그는 기하학적

법론적 양면성을 명확하게 보여주고 있다.

> 여기서 추구하는 길은 무리수 이론의 기초를 — 항켈이 선호했듯이 — 기하학적으로 제시하려는 이전 방법과 최근에 많이 따르는 방법들 사이에 놓여 있다. 우리는 실수가 양의 비율이나 측정수라는 전자의 견해를 유지하지만, 온갖 특수한 종류의 양들과 마찬가지로 기하학적인 종류의 양으로부터 실수를 분리함으로써 후자의 새로운 노력에 접근한다. 그러나 우리는 후자의 시도에서 드러나는 약점도 피하려 한다. 후자의 경우에는 ... 어떤 경우에 실수가 측정 수로 사용될 수 있는지, 그 경우 실수의 적용이 어떤 식으로 이루어지는지에 대해 알려 주는 일반적인 특징의 표현은 전혀 찾아볼 수 없다.39)

결국 프레게는 실수를 양의 비율로 이해하는 동시에 양의 비율로서 실수를 순수 산수적 방법 혹은 논리적 방법으로 정의하려 한다. 실수에 관한 프레게의 논의에 낯선 독자들은 자연스럽게 두 가지 의문을 가질 만하다. 첫째로, 산수학이 논리학이라는 그의 주장을 입증하려 한다면 — 즉 실수 해석학의 개념을 논리적 개념에 의해 정의하고 그 정의와 논리 법칙으로부터 실수 해석학의 원리들을 연역하는 것이 목표라면 — 실수를 양의 비율로 간주할 필요가 있는가? 둘째로, 실수를 양의 비율로 간주한다고 해도 그런 비율에 대한 순수 논리적 정의가 실제로 가능한가?

먼저 둘째 물음에 대답해 보자. 실수를 전통적 양이론과 연결지어 이해하려는 사람들이 모두 기하학적 양 개념에 의존했던 것은 아님을 우선 주목할 필요가 있다.40) 1885년 오토 슈톨츠는 헤르만 그라스만의 추상적 외연량 이론을 발전시켜 추상적 양이론을 공리화하려 하였고, 1901년 오토 횔더는 그런 추상적인 공리적 양이론 체계를 제시한 다음 이를 토대로 삼아 실수 이론을 발전시켰다. 이들은 모두 프레게와 마찬가지로 실수를 양들 사이의 추상적 비율로 간주하며, 유독수스 비례원리를 실수 동일성 원리로 받아들인다. 특히 횔더는 그의 추상적 양이론의 공리들이 길이 같은 기하학적 양의 측정에 어떻게 직접 적용 가능한지 구체적으로 설명하였다.41)

방법에 의지하지 않고 양이론을 발전시킬 수 있는 가능성을 고려하지 않았던 것 같다. 이런 좁은 시야는 해석학의 산수화 작업과 함께 양이론이 끝났다고 여기는 에플 같은 최근의 논자들에게도 여전한 것 같다. Epple[2003] 참조.

39) Frege[1903], 159절.

40) 당대 실수 해석학에는 바이어슈트라스, 데데킨트, 칸토르처럼 일종의 집합론에 의지하는 실수 이론 이외에도, 헤르만 항켈이나 폴 드부아 레이몽, 그리고 헤르만 헬름홀츠처럼 기하학적 직관이나 경험적 지각에 의지해서 실수 연속성을 이해하려는 경향, 수에 관한 형이상학적 물음을 배격하기 위해 순수 형식주의적 실수 이론을 제시하려는 하이네나 토마에의 시도, 오토 슈톨츠나 오토 횔더처럼 추상적 양이론을 기초로 실수 해석학을 재구성하려는 경향, 크로넥커처럼 유한적 영역 내에서 해석학을 제시하려는 시도 등 다양한 흐름이 있었다. 이런 여러 경향에 관해서는 Epple[2004], 1-2절; Ehrlich[1994] 서론 및 Boniface[2006] 참조.

41) 오토 횔더는 Hölder[1901]의 제1부에서 양이론의 공리들을 제시하고 그 공리들로부터 실수에 관한 주요 정리들을 연역해 낸다. 제2부에서는 직선상의 거리에 대한 기하학적 사실들이 주어질 때 양의 공리들로부터 증명된 실수 정리들을 이용해서 어떻게 기하학적 거리들을 결정할 수 있는지 설명한다. 이 설명은 기하학적 양과 실수의 관계에 대한 별도의 설명에 의지하지 않고 — 프레게의 정신에 따라 — 어떻게 양의 비율로서 실수가 특수한 양의 크기를

슈톨츠나 횔더는 추상적 양이론을 공리화 했지만, 프레게가 염두에 두었던 것처럼 그런 공리들을 논리학의 근본 원리들로 환원하려 하지는 않았다.[42] 특히 횔더는 데데킨트의 실수 연속성 원리를 양 일반에 관한 원리로서 공리로 가정하였다. 그러나 프레게는 우선 양들을 관계들로부터 추상화된 대상으로, 양들의 비율은 그런 대상들의 관계로부터 추상화된 대상으로 환원하려 한다. 그리고 그는 양의 공리들을 양의 비율에 대한 추상화 원리 및 논리학의 원리들로부터 연역하려 하였다.[43] 결국 실수 해석학에서 프레게가 목표로 삼은 작업은 양의 비율을 그의 논리적 관계 이론 내에서 정의한 후, 그 정의와 그의 고단계 양화 논리학의 원리들로부터 슈톨츠나 횔더 식의 양의 공리들을 연역해 내는 것이었다. 그러나 불행하게도 프레게가 추상화의 기초 원리로서 가정한 논리학의 공리 V가 모순에 빠짐으로써 그는 이 작업을 완수하지 못하였다. 이 작업은 약 10여년 후 화이트헤드와 러셀에 의해『수학원리』제3권에서 수정된 형태로 수행되었다.

4.2. 프레게 논리주의의 두 특징

이제 앞의 첫째 물음에 관해 논의해 보자. 논리주의를 입증하기 위해 왜 실수를 양의 비율로 정의해야 하는가? 이에 대해 적절히 대답하려면 먼저 그의 논리주의가 갖는 전체적 특징을 살펴보아야 한다. 프레게가 보기에 산수학은 상호 연관된 두 특징을 가지고 있다. 한편으로 산수학은 기하학이나 물리학 등의 과학과 독립되어 있는 과학이다. 기하학 연구는 공간적 직관에 그 인식적 원천이 있고, 물리학 연구는 지각 경험에 의존하지 않을 수 없다. 그러나 산수학 연구를 위해서는 공간적 직관의 도움도, 지각 경험의 도움도 받을 필요가 없다. 프레게에 따르면 산수학 연구는 순수 개념적인 사고에 의존하는 것으로 충분하다. 다른 한편으로 프레게에 따르면 산수학은 보편 과학이다. 산수학의 개념과 정리는 기하학이나 물리학 등 과학에서만 아니라 일상

결정하는 데 사용될 수 있는지 보여주는 훌륭한 사례이다. 프레게는 슈톨츠의 작업에 관해서는 잘 알고 있었고, 『산수의 근본법칙』 제2권에서 그의 양이론을 직접 논의의 자료로 삼고 있다. 하지만 그가 횔더의 저술에 관해 알고 있었는지는 분명하지 않다. 슈톨츠에 관한 프레게의 논의를 보려면 Frege[1903], 143-145절 및 160-161절 참조.

42) 프레게는 『산수의 근본법칙』 제2권 출간 시기에 횔더와 유사한 작업을 하던 헌팅턴에게 직접 논문 Huntington[1902]를 받고 감사의 편지를 보냈다. 그는 그 편지에서 자신의 작업이 헌팅턴의 작업과 유사하긴 하지만, 실수 이론을 단지 공리적으로 체계화하려는 것이 아니라, 순수 논리적 원리들만 이용해서 실수 이론을 연역하려 한다는 점에 차이가 있다고 언급한다. Frege[1976], 88-90 참조.

43) 프레게가 실제로 어떤 절차에 따랐는지 보려면 Dummett(1991), 22절 및 Simons(1987), 4-6절 참조. 세바스티안 강동(S. Gandon)은 러셀 및 화이트헤드의 실수이론에 관한 그의 최근 논문에서 부랄리-포르티가 구체적 양들의 영역으로부터 직접 실수들을 구성하려 했다고 묘사하고, 프레게도 마치 그랬던 것처럼 주장하고 있다. Gandon[2008], 25면 각주. 그러나 이것은 명백한 오해이다. 부랄리-포르티에 대한 그 논문의 묘사가 옳다면, 그의 견해는 프레게의 견해가 아니라 오히려 프레게에 의해 비판된 항켈의 견해와 유사할 것이다. 그리고 프레게의 견해는 강동이 부랄리-포르티와 대비하고 있는 러셀 및 화이트헤드의 견해에 더 가깝다.

생활에서도 광범하게 사용된다. 산수학의 개념이나 정리의 도움을 받지 않고는 과학 연구란 거의 불가능하고, 일상 생활도 거의 불가능하다.

산수학이 이런 두 특징을 갖는다는 프레게의 주장은 그의 논리주의와 무슨 관계를 갖는가? 프레게의 논리주의는 산수학이 논리학이라는 주장이고, 산수학이 바로 논리학과 같은 특징을 갖는 과학이라는 주장이다. 따라서 산수가 갖는 독립성과 보편적 적용 가능성은 바로 논리학 자체가 갖는 특징이기도 하다. 논리학은 경험이나 시공간적 직관에 의존하지 않고 순수 개념적 사고에만 의존해도 성립하는 과학이고, 논리학의 원리들은 어느 분야의 어느 주제에 관해 논의하든지 전제가 된다.[44]

프레게 논리주의의 이런 양면적 특성은 아직도 충분히 이해된 것같지 않다. 특히 보편적 적용 가능성이 산수학 자체의 본성을 이룬다는 그의 생각, 그리고 이점이 산수학을 논리학으로 간주할 만한 주요 이유라는 그의 생각은 아직 충분히 이해된 것 같지 않다. 이 때문에 산수 정리의 참이 경험적 관찰에 근거한다는 밀의 주장에 대한 그의 비판은 익히 알려져 있지만, 산수 법칙이 과학에 포괄적으로 응용된다는 밀의 주장을 그가 고무했다는 사실은 잘 알려져 있지 않다.[45] 그리고 항켈 같은 칸트주의자들이 직관에 함부로 호소한다는 그의 비난은 익히 알려져 있지만, 공간적 직관을 토대로 삼는 수의 정의가 수의 기하학적 적용을 용이하게 설명할 수 있게 해준다는 점을 그가 강조했음은 잘 알려져 있지 않다.[46]

프레게가 독립성만 아니라 보편적 적용 가능성도 산수학의 본성으로 간주했다는 사실을 간과하게 되면, 하이네나 토마에 같은 게임이론적 형식주의자들에 대해 제기한 핵심적 비판의 의의를 간과하기 쉽다. 그는 산수의 포괄적 적용이 어떻게 가능한지 해명하는 것은 기하학이나 물리학 같은 특수 과학에 속한 일이 아니라, 산수학 자체에 속하는 일이라고 주장한다.[47] 마찬가지로 바이어슈트라스나 칸토르 등처럼 순수 산수적으로 실수 이론을 제시하려는 사람들에 대해 프레게가 제기하는 비판의 핵심은 그들이 산수학에 부과된 임무를 방기한다는 데 있다. 실수의 보편적 적용 가능성은 고려하지 않고 실수의 순수 산수적 구성에만 치중함으로써, 결국 실수가 왜 양을 측정하는 데 보편적으로 적용되는지 해명하는 데 실패하게 된다는 것이다.

산수학의 독립성과 보편적 적용 가능성 주장은 프레게가 입증해야 할 과제이기도 하다. 그의 논리주의의 과제는 2중적이다. 한편으로 그는 산수학의 토대를 경험이나 직관에 호소하지 않고 제시할 수 있다는 것을 보이기 위해, 잘 알려져 있는 것처럼 논리학의 원리와 논리적 정의로부터 논리적 추론만 이용해서 산수 법칙들을 연역하려 하였다. 다른 한편으로 그는 산수학이 보편적으로 적용 가능한 이유를 밝히려 하였다. 그는 이 작업이 성취되기 위해서는 두 가지 일이 필요하다고 생각하였다. 첫째로 그

44) 프레게 논리주의의 이 두 특징에 관해서는 박준용[2007a] 참조.
45) Frege[1884], 17절 및 23절 참조.
46) Frege[1884], 19절 참조.
47) 하이네, 토마에 등의 게임이론적 형식주의자들의 수학의 적용에 관한 견해를 프레게가 어떻게 비판하였는지 보려면 Frege[1903], 89-91절 참조.

는 산수의 대상이나 개념이 포괄적으로 적용 가능한 이유는 산수의 대상이나 개념 자체가 그런 특성을 가지고 있기 때문이라고 생각하였다. 그러므로 산수의 대상이나 개념을 정의하는 일은 그런 대상이나 개념을 포괄적으로 적용할 수 있게 해주는 그 특성을 포착하는 일을 동반한다. 둘째로 그는 산수의 대상이나 개념의 그런 특성은 그런 대상이나 개념의 다양한 사용 맥락에 공통적으로 드러나는 양식들을 고찰할 때 제대로 이해된다고 생각하였다. 그러므로 그는 산수의 대상이나 개념이 순수 산수 진술 내에서 사용될 때만 아니라 일상 생활의 진술이나 과학적 진술에서 사용될 때에도 공통되게 등장하는 양식들에서 산수학의 적용을 지배하는 일반적 원리를 찾아낼 수 있다고 생각하였다.

이에 따라 프레게의 견해에서 보면 산수학의 정의는 적어도 다음의 두 요건을 충족시켜야 한다. (1) **형식적 조건**: 산수학의 대상이나 개념, 혹은 관계의 정의는 순수 논리적으로 정의되어야 하고, 산수 법칙을 연역하는 데 생산적으로 기여해야 한다. (2) **실질적 조건**: 산수학의 대상이나 개념, 혹은 관계의 정의는 다양한 적용에 공통되게 드러나는 그 특성에 따라 정의되어야 하고, 다양한 적용을 지배하는 원리에 맞게 정의되어야 한다.

4.3. 기수의 적용과 그 설명

프레게가 산수학의 정의에서 앞의 두 조건을 어떻게 충족시키려 했는지 보려면 먼저 그가 산수학을 어떻게 분류하였는지 살펴보아야 한다. 먼저 주목해야 할 사실은 그는 당대의 대부분의 수학자들과 달리 수들을 자연수, 정수, 유리수, 실수 등으로 분류하지 않았다는 것이다. 그는 한편으로 자연수를 비롯하여 무한 기수들까지 포함하는 수들을 모두 한 부류의 수들로 간주한다. 다른 한편으로 그는 정수, 유리수 및 실수를 다른 종류의 수들로 간주하지 않고 같은 부류의 수로 간주한다.[48] 이는 수들을 실질적 조건에 맞게 정의하려는 그의 생각에서 비롯된 것이다. 그는 자연수(유한 기수)나 무한 기수 모두 특정 조건을 충족하는 사물의 개수라는 데 공통점이 있다고 생각한다. 기수들은 모두 “F를 만족하는 사물은 몇 개인가” 하는 물음에 대답하는 데 사용된다. 반면 정수나 유리수만 아니라 실수들 전체는 “주어진 사물이 갖는 양이 같은 종류의 단위량과 비교할 때 얼마나 큰가” 하는 물음에 대답하는 데 사용된다고 생각한다.[49] 즉 실수는 주어진 사물의 양이 단위량에 대해 갖는 비율이라는 점에서 정수나 유리수와 다르지 않다. 이 때문에 프레게는 유리수를 먼저 설명한 후에 이에 근거해서 실수를 설명하려 하는 당대 대부분의 수학자들이 따르는 절차를 따르지 않고,

48) 프레게가 복소수를 어떻게 이해했는지는 분명하지 않다. 그가 복소수도 기수나 실수를 도입할 때와 유사한 방식으로 복소수 동일성 진술의 뜻을 고정함으로써 설명하려 한다는 것은 알려져 있다.(Frege[1884], 99절-104절 참조.) 그러나 그가 복소수를 실수처럼 양의 크기를 측정하는 데 사용된다고 생각했는지 아니면 다른 종류의 수로 간주했는지는 그의 저술 내에서는 분명하지 않다.

49) Frege[1884], 19절 및 Frege[1903], 157절 참조.

기수 이론만을 토대로 삼아 직접 실수를 도입하려 한다.50)

프레게가 실수를 어떤 절차에 따라 정의하려 하는지 보기 전에 기수의 정의 절차를 살펴보는 것이 좋다. 우리는 『산수의 기초』 46절- 73절에 나타난 그의 기수 정의 절차를 다음의 단계적 절차로 재구성할 수 있다.

(1) **첫째 단계**: 프레게는 "기수는 무엇에 부여되는가?" 혹은 "기수를 갖는 것은 무엇인가?" 하는 물음으로 시작한다. 그는 기수를 갖는 것은 사물이나 사물 모임이 아니라 사물들이 속하는 개념이라고 한다. "지구의 위성"이라는 개념에는 기수 1이 부여되고, "목성의 위성"이란 개념에는 기수 4가 부여된다. 프레게는 "목성은 네 개의 위성을 가지고 있다"는 형식의 기수 부여 진술은 다음 형식의 기수 동일성 진술과 동치라고 생각한다: "목성의 위성의 그 기수 = 4." 그리고 일반적으로 기수는 개념이 갖는 것이므로, 기수 동일성 진술은 일반적으로 "개념 F의 그 기수 = 개념 G의 그 기수" 형식을 갖는다.

(2) **둘째 단계**: 다음으로 프레게는 두 기수가 같다는 것은 일반적으로 무엇을 말하는지 혹은 "개념 F의 그 기수 = 개념 G의 그 기수" 형식의 기수 동일성 진술은 일반적으로 어떤 뜻을 갖는지 묻는다. 그리고 그는 그 뜻을 "개념 F 아래 속하는 대상들과 똑같이 많은 대상들이 개념 G 아래 속한다"는 것으로 풀이한다. 그는 두 개념 F와 G가 이런 관계에 있을 때, 그 두 개념 사이의 관계를 "동수 관계"라고 부른다.

(3) **셋째 단계**: 다음으로 프레게는 동수 관계를 논리적으로 설명하려 한다. 그는 두 개념 F와 G 사이의 동수 관계를 그 두 개념 사이에 1-1 상호 대응 관계가 성립한다는 사실에 의해 설명하고, 1-1 상호 대응 관계를 그의 논리학의 개념을 이용하여 정의한다. 그리고 그는 이 정의를 토대로 삼아 0, 1 등의 수들, 자연수, 무한 기수 등을 논리적으로 정의하고, 이런 정의들을 이용해서 기수 이론의 원리들을 증명한다.

프레게는 앞의 절차를 통해 기수 정의가 순수 논리적으로 수행되어야 한다는 요구만 아니라 기수가 보편적으로 적용 가능한 이유를 설명해 주어야 한다는 요구도 만족시키려 한다. 첫째 단계에서 정식화된

$$\text{F인 것이 네 개 있다} \leftrightarrow \text{F의 기수} = 4$$

같은 동치 원리는 산수의 수로서 수 4를 다양한 맥락에 보편적으로 적용하기 위해 무엇이 필요한지 보여준다. 이 원리는 기수를 갖는 것이 개념이라는 사실만 아니라 개념에 기수를 부여하는 일을 어떻게 산수의 수에 관한 말로 이해할 수 있는지 보여준다. 나아가 일반적으로 사물의 개수를 결정하는 데 기수를 사용할 수 있으려면, 사물의 개수를 표현하는 문장은 언제나 기수 동일성 문장과 동치여야 한다는 것을 받아들여야 할 것이다.51) 둘째 단계에서 프레게는 오른편의 기수 동일성 문장을 동수 관계에 의해 설명하고, 셋째 단계에서 그는 동수 관계를 개념들 사이의 1-1 상호 대응 관

50) 프레게는 러셀에게 보낸 한 편지에서 이 점을 분명히 밝히고 있다. Frege[1976], 239면.

51) 실제의 수 사용에서 이런 동치 원리가 하는 역할에 대한 좀더 자세한 논의는 박준용 [2007b], 4절 참조.

계에 의해 설명한다. 그러므로 결국 그는 사물의 개수를 결정하는 일을 1-1 상호 대응 관계에 근거해서 설명한 셈이다. 이렇게 해서 사물의 개수를 결정하는 데 기수가 어떻게 일반적으로 적용되는지 설명할 수 있게 된다.

4.4. 실수의 적용과 양의 비율

이 절 앞에서 제기한 물음에 대답할 차례가 되었다. 프레게는 왜 실수를 양의 비율로 정의하려 하는가? 왜 실수를 데데킨트나 칸토르처럼 추상적 체계나 대상으로 간주하는 데 그치지 않고, 애초부터 양이나 양의 크기와 연관시키는가? 만약 실수 이론이 기하학이나 역학으로부터 독립된 과학이라는 것을 보이는 것만 목적이라면 실수를 양의 비율과 연관시키는 절차가 반드시 필요하지는 않을 것이다. 그 절차는 분명히 실수 이론이 보편적으로 적용 가능한 과학이라는 사실을 해명하는 일과 관련되어 있다. 프레게가 보기에 실수들이 다양한 영역에서 포괄적으로 사용된다는 것은 주어져 있는 사실이다. 실수에 대해 실질적으로 적합한 정의라면 실수의 그런 포괄적 적용이 가능한 이유를 설명해 주어야 할 것이고, 이를 위해서는 먼저 실수들이 사용되는 다양한 맥락을 검토해야 할 것이다.

실수에 관한 프레게의 논의는 『산수의 근본 법칙』 제3부에 가장 풍부하게 제시되어 있긴 하지만, 그곳의 논의도 실수의 정의에 이를 만큼 충분히 진행되지 않는다. 우리는 그의 단편적 논의들을 자료로 삼아 그가 어떤 경로에 따라 실수 정의에 이르렀을지 기수 정의의 절차와 비교해서 재구성할 수 있다.

(1) **양의 비율로서 실수**: “실수는 무엇에 부여되는가?” 혹은 “실수를 갖는 것은 무엇인가?” 하고 물어보자. 물론 실수를 갖는 것은 양이라는 것이 프레게의 답변이다. 그러나 양과 실수의 관계는 개념과 기수의 관계처럼 단순하지 않으므로, 몇 가지 예비 사항을 주의할 필요가 있다.

첫째로 프레게에 따를 때 기수는 “개념 F 아래 속하는 것이 몇 개 있는가?” 하는 물음에 대답하는 수이지만, 실수는 “양 q는 단위량에 대해 얼마나 큰가?” 하는 물음에 대답하는 수이다. 기수는 특정 개념에 부여된다. 하지만 실수는 특정 양에 따로 부여되는 것이 아니라, 언제나 다른 양과 비교해서 부여된다. 비교되는 그 양은 보통 단위로 주어진다.

둘째로 서로 크기를 비교할 수 있는 양들은 같은 종류의 양들 뿐이다. 길이를 길이와 비교할 수는 있지만, 길이를 온도와 비교할 수는 없다. 그러나 양에 부여되는 실수로서 양의 비율들 자체는 서로 비교할 수 있다. 주어진 길이와 온도의 크기를 서로 비교할 수는 없지만, 그 길이의 단위 길이에 대한 비율은 그 온도의 단위 온도에 대한 비율과 서로 비교할 수 있다.

셋째로 양을 재는 데 사용되는 단위는 양의 종류마다 다르고, 같은 종류의 양에 적용할 수 있는 단위도 다양할 수 있다. 그리고 같은 양에도 비교 단위가 무엇인지에 따라 다른 비율이 부여될 것이다. 그러나 단위는 고정된 것이 아니다. 원리상 주어진

종류의 어떤 양이든지 단위로 이용될 수 있다.

(2) **실수 적용 원리**: "(단위 길이와 비교할 때) 이 막대는 얼마나 긴가?" 하는 물음에 대해 "이 막대는 2.5m의 길이를 갖는다"고 대답했다고 하자. 여기서 "2.5m"는 주어진 막대의 길이를 나타내지만, "2.5" 자체는 단위 길이 1m에 대해 주어진 막대의 길이가 갖는 비율을 나타낸다. 그러므로 우리는 길이의 크기에 관한 앞의 진술을 비율 동일성을 나타내는 진술로 고쳐쓸 수 있다.

이 막대는 2.5m의 길이를 갖는다

↔ 단위 길이에 대해 이 막대의 길이가 갖는 비율 = 2.5.

길이 진술에서 수 표현이 자체가 언제나 단위 길이에 대한 주어진 길이의 비율을 나타낸다면, 우리는 이 경우 "(단위) 길이 l_2에 대한 길이 l_1의 (그) 비율"을 길이의 비율을 나타내는 표현의 일반적 형식으로 간주할 수 있다. 그리고 "이 막대는 2.5m의 길이를 갖는다" 같은 수 확정 진술은 언제나 "이 막대는 단위 길이 1m보다 2.5배 더 길다"와 같은 양 비교 진술로 바꾸어 쓸 수 있다. 그러면 우리는 길이 진술과 비율 동일성 사이의 동치를 다음처럼 일반적으로 제시할 수 있다.

길이 l_1은 길이 l_2보다 r배 더 길다

↔ 길이 l_1이 길이 l_2에 대해 갖는 (그) 비율 = r.

이 동치 원리는 길이 일반에 적용될 수 있지만, 실수의 보편적 적용을 설명하는데 이용하기에는 아직 두 측면에서 만족스럽지 못한다.

첫째로 그 원리는 특수한 양에 제한되어 있어서 양 일반에 보편적으로 적용될 수는 없다. 우리에게 필요한 원리는 길이, 넓이, 면적 등의 공간적 양만 아니라 속도, 조도, 강도, 온도 등의 물리량에도 일반적으로 적용 가능한 원리이다.

둘째로 그 원리는 길이에 대한 특수한 지식을 필요로 한다. 이에 따라 앞의 원리에 의지해서 실수의 적용을 설명하게 되면 우리는 산수학에 낯선 것을 끌어들이게 된다. 우리에게 필요한 원리는 기하학이나 물리학의 특수한 지식에 의존하지 않아도 논리적 지식만으로 이해할 수 있는 원리이다.

이런 제한을 극복하려면 문제의 원리는 "l_1은 l_2보다 r배 더 길다" 같은 진술만 아니라, "s_1은 s_2보다 r배 더 넓다", "밝기 b_1은 밝기 b_2보다 r배 더 밝다" 등처럼 양의 크기를 진술하는 어느 진술에나 적용 가능해야 한다. 그리고 그 원리에 나타나는 비율에 대한 표현은 길이에 대해서만 아니라 양 일반에 대해 적용가능한 형식을 가져야 한다: "양 q_2에 대한 양 q_1의 (그) 비율." 이제 "... 더 길다", "... 더 밝다" 등의 양 비

교 표현 일반에 대해 관계 변항 "ϕ"를 사용한다면, 우리는 바라는 동치 원리를 아래와 같이 표현할 수 있다.

q_1는 q_2 보다 r배 더 ϕ

↔ q_1이 q_2에 대해 갖는 (그) 비율 = r.

(3) **비율 동일성 설명**: 이제 앞의 원리의 오른편 동일성을 설명할 수 있고 그 설명을 다시 논리적으로 설명할 수 있다면, 실수의 보편적 적용을 해명할 수 있는 정의에 이를 수 있을 것이다. 우선 비율 동일성 진술의 일반 형식은 아래와 같다. [여기서 a와 b, 그리고 c와 d는 서로 같은 종류의 양으로 간주된다.]

b에 대한 a의 비율 = d에 대한 c의 비율.

프레게의 논의에는 이 진술의 뜻에 대한 명시적인 설명은 제시되어 있지 않다. 하지만 이미 유클리드의 『원론』에는 그런 설명이 포함되어 있고, 전통적 양이론을 받아들이는 많은 학자들은 그 설명을 받아들였다. 간단히 말하면 그 설명은 "임의의 양(陽)의 정수 m, n에 대해 ma가 nb에 대해 갖는 똑같은 양적 관계를 mc가 nd에 대해 갖는다"는 것이다. 더 정확히 말하면, b에 대한 a의 비율이 d에 대한 c의 비율과 같다는 것은 다음을 의미한다.

> 임의의 양(陽)의 정수 m, n에 대해, ma가 nb보다 더 크면 그리고 그 때에만 mc가 nd보다 더 크고, ma가 nb보다 더 작으면 그리고 그 때에만 mc가 nd보다 더 작고, ma가 nb와 같다면 그리고 그 때에만 mc는 nd와 같다.[52)]

프레게가 "똑같은 양적 관계"라는 개념을 논리적으로 어떻게 설명하려 했는지는 그의 저술 내의 논의만으로는 충분히 알기 어렵다. 하지만 앞의 논의만으로도 그가 왜 실수를 양의 비율로 정의해야 한다고 생각했는지, 칸토르 실수 정의에 대한 그의 비판의 이론적 의의가 무엇인지 대답하기에는 충분하다.

첫째로 프레게가 양의 비율을 논리적으로 설명할 수 있다면, 그 설명은 칸토르나 데데킨트의 설명만큼 기하학적 방법에서 벗어나 있을 것이다. 그러므로 양이론에 근거할 때 낯선 것을 끌어들이게 된다는 비판에서 프레게는 벗어날 수 있다.

52) 비율 동일성 설명은 유클리드 『원론』제 V권의 정의 5로 처음 제시되었다. 『원론』V권의 비례 이론은 유독소스(Eudoxos)에게서 유래한 것으로 전해진다. Heath[1956], 120-9면 참조. 슈타인은 데데킨트 실수 이론이 유독수스 비례 이론의 자연스런 발전으로 간주할 수 있음을 보여주었다. Stein[1990] 참조.

둘째로 프레게는 실수의 실제 적용 맥락들 내에서 실수가 무엇인지 설명하므로, 그의 실수에 대한 설명은 실수 적용 맥락에 바로 이전될 수 있다. 프레게에게 실수를 적용하기 위해 필요한 일은 적용 원리에 나타나는 대상, 개념 및 관계 변항 대신 해당 양의 영역의 특수한 대상, 개념 및 관계를 대입하는 것뿐이다.

셋째로 칸토르처럼 구체적 양의 크기에 관한 또 다른 설명에 의존함으로써 실수 적용의 설명에 낯선 것을 끌어들일 필요가 없다. 프레게는 특수한 양에 관한 이해에 의존하지 않고 실수 적용 원리에만 의존하더라도, 실수가 왜 보편적으로 적용 가능한지 충분히 설명할 수 있다. 양의 비율이 논리적으로 설명될 수 있다면, 우리가 실수 적용 원리를 이해하는 데에는 논리적 개념과 원리를 이해하는 것으로 충분할 것이다.

5. 맺는 말

프레게의 논리주의, 나아가 19세기 말에서 20세기 초 수학의 기초 연구로서 논리주의는 재평가되어야 하는 것으로 보인다. 특히 당시 집합 개념에 기초를 둔 바이어슈트라스, 칸토르, 데데킨트 등의 산수화 작업과 대비되는 논리주의 작업의 주요 특징으로서 수학의 다양한 적용을 해명하려는 시도는 다시 주목되어야 한다.[53] 당시 추상적 양이론을 공리화 하려던 슈톨츠나 횔더, 양의 공리들을 논리적으로 환원하려던 프레게, 그리고 이들의 작업을 이어받는 화이트헤드 및 러셀의 작업은 단지 전통적 양이론이 순수 산수적으로 재구성될 수 있음을 보이는 데만 목적이 있었던 것이 아니라, 실수 해석학이 어떻게 해서 기하학이나 물리학에 다양하게 적용될 수 있는지 밝히려는 데 있었다.[54] 화이트헤드는 1906년 러셀에게 보낸 한 편지에서 이렇게 말한다.

> 조금 더 고찰해 보면 양은 더욱 더 중요해 진다 – 현대의 수학의 산수화는 전체적으로 오류이다. 물론 그것은 옳은 논점들에 주목하게 만드는 유용한 오류이다. 수학의 산수화는 증명을 산수학의 특수한 사례들에 한정하는데, 이런 사례들을 논리적 전제들로부터 연역하는 일은 존재 정리를 형성한다. 그러나 이런 제한은 (측정 이론 등의) 전체 응용 수학 이론을 증명하지 않고 남겨둔다. 반면 해석학이 참된 양이론을 가질 때에는 일반적 개념에서 시작하며 산수의

---

53) 이 점과 관련해서 프레게의 양이론 및 추상화이론을 발전시키려는 최근 수학철학 내의 헤일의 작업, 그리고 실수의 적용에 관한 횔더의 이론을 측정 이론 내에서 발전시키려는 미첼의 작업은 주목할 만하다. 헤일의 작업은 Hale[2000] 및 이후의 일련의 관련 논문에서 발전되고 있고, 미첼의 작업은 Michell[1999] 및 이후의 일련의 관련 논문에서 발전되고 있다.

54) 에플은 "양의 과학의 종말: 해석학의 기초, 1860-1910"이라는 자극적인 제목의 글에서 전통적 양이론에 대한 프레게의 옹호를 그의 보수적 태도에서 나온 편협함으로 폄하한다. 그러나 이런 평가는 프레게의 논리주의의 동기를 수학의 확실성 확보로 보는 에플의 편협한 시야에 기인하는 것 같다. Epple[2003], 302-304 참조.

존재들은 존재 정리를 제공받는 것으로서 제자리를 찾는다. 산수의 존재들을 유일한 존재로 고려하는 것은 사실 온갖 종류의 상관없는 사항들을 포함시킴으로써 생각을 복잡하게 할 뿐이다 – 간단히 말해 “양들”이 무엇인지 알기만 해도 “양들”에 관해 말하는 옛날 형식의 대수들이 옳을 것이다.[55)]

참 고 문 헌

1. 박준용, “프레게 논리주의에서 논리적 진리와 분석적 진리,” 『철학』(2007년 여름), 159-193., 2007a.
2. 박준용, “프레게 제한,” 『논리연구』 10-2: 51～113, 2007b.
3. B. Bolzano, *The Mathematical Works of Bernard Bolzano*. (Oxford, New York), 2004.
4. Boniface, J.. “The Concept of Number from Gauss to Kronecker”, The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae, (eds.) Goldstein, C.; Schappacher, N.; Schwermer, J. (Springer)., 315-342, 2006.
5. Cantor, G., “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen,” Mathematische Annalen, vol. V(1872), pp. 123-32.
6. ———. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883. (translated as Foundations of General Theory of Manifolds by W. Ewald) in Ewald, 878-920, 1996.
7. ———, “Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantor'sehen Theorie der Irrationalzahlen,” Mathematische Annalen, Bd. xxxvi, p. 154, 1889.
8. Dedekind, R. Continuity and Irrational Numbers, 1872. (translated by W. Ewald) in Ewald, 765-779, 1996.
9. ————, “Aus Briefen an R. Lipschitz,” Gesammelte mathematische Werke, Dritter Band, 464-482, 1876.
10. Du Bois-Reymond, P., Allgemeine Funtionenlehre. (Tuebingen), 1882.
11. Ewald, W., From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics. (Oxford, Clarendon Press), 1996.
12. Dummett, M., Frege: Philosophy of Mathematics, Havard University Press, 1991.
13. Ehrlich, P.(ed.), Real Numbers: Generalization of Reals, and Theories of

55) 이 언급은 1909년 9월 17일자에 화이트헤드가 러셀에게 보낸 서한에서 발췌된 것이다. Gandon[2008], 4면으로부터 재인용.

Continua.(Kluwer), 1994.
14. Enderton, H.B., Set Theory. (Academic Press), 1977.
15. Epple, M., “The End of the Science of Quantities: Foundations of Analysis, 1860-1910,” A History of Analysis, (ed.) H.N. Jahnke. (American Mathematical Society), 2003.
16. Frege, G., “Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Groessenbegriffes Gruenden,” Frege[1967], 50-84, 1874.
17. ———, Die Grundlagen der Arithmetik.(Breslau). 『산수의 기초』, 1884.
18. ———, Grundgesetze der Arithmetik I.(Jena).『산수의 근본 법칙』 제1권, 1893.
19. ———, Grundgesetze der Arithmetik II.(Jena). 『산수의 근본 법칙』 제2권, 1903.
20. ———, Kleine Schriften.(Hildesheim), 1967.
21. ———, Wissenschaftlicher Briefswechsel.(Hamburg), 1976.
22. Gandon, S., “Which Arithmetization for Which Logicism? — Russell on Relations and Quantities in The Principles of Mathematics,” History and Philosophy of Logic 29: 1-30, 2008.
23. Hale, B., “Reals by abstraction,” Philosophia Mathematica 8: 100-123, 2000.
24. Hankel, H., Theorie der Complexen Zahlensystem. (Leopold Voss, Leibzig), 1867.
25. Heath, T. L., The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol II, Book III-IX, Translated from the text of Heiberg with Introduction and Commentary. (Dover Publications, Inc. New York), 1956.
26. Hölder, O., “The Axioms of Quantity and the Theory of Measurement,” (translated by J. Michell) Journal of Mathematical Psychology 40(1996): 235-252 and Journal of Mathematical Psychology 41(1997): 345-356, 1901.
27. Huntington, E., “A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitudes,” Transactions of the American Mathematical Society 3, 264－279, 1902.
28. Illigens, E., “Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen,” Mathematische Annalen, Vol. xxxiii, 1889, pp. 155-60, 1889.
29. Kitcher, P., “Frege, Dedekind, and the Philosophy of Mathematics,” Frege Synthesized, (eds.) L. Haaparanta and J. Hintikka, 299-343, 1986.
30. Klein, K., “The Arithmetizing of Mathematics”, 1895, (translated by W. Ewald) in Ewald, 965-971, 1996.
31. Lützen, J., “The Foundation of Analysis in 19C Century,” A History of Analysis, (ed.) H.N. Jahnke. (American Mathematical Society), 2003.
32. Michell, J., Measurement in Psychology. (Cambridge), 1999.

33. Petrie, B. and Schappacher, N., “On Arithmetization,” The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae, (eds.) Goldstein, C.; Schappacher, N.; Schwermer, J. (Springer)., 343-374, 2007.
34. Russell, B., Principles of Mathematics. Routledge, 1903.
35. Simons, P., “Frege's Theory of Real Numbers,” History and Philosophy of Logic 8: 25-44, 1987.
36. Stein, H., “Eudoxos and Dedekind: On the Ancient Greek Theory of Ratios and Its Relation to Modern Mathematics,” Synthese 84: 163-211, 1990.
37. Stolz, O., Vorlesung über allgemeine Arithmetik (Leibzig, Teubner), 1885.
38. Tappenden, J., “The Riemannian Background to Frege's Philosophy,” The Architecture of Modern Mathematics (eds.) J. Ferreoros and J.J. Gray. (Oxford)., 97-132, 2006.
39. Whitehead, A.N. and Russell, B., Principia Mathematica, Volume III. (Cambridge), 1913.
40. Wilson, M., “Frege's Mathematical Setting,” http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00003374/, 2007.

Frege's Critiques of Cantor — Mathematical Practices and Applications of Mathematics.

College of cultural science, KAIST, Junyong Park

Frege's logicism has been frequently regarded as a development in number theory which succeeded to the so called arithmetization of analysis in the late 19th century. But it is not easy for us to accept this opinion if we carefully examine his actual works on real analysis. So it has been often argued that his logicism was just a philosophical program which had not contact with any contemporary mathematical practices. In this paper I will show that these two opinions are all ill-founded ones which are due to the misunderstanding of the theoretical place of Frege's logicism in the context of contemporary mathematical practices. Firstly, I will carefully examine Cantorian definition of real numbers and Frege's critiques of it. On the basis of this, I will show that Frege's aim was to produce the purely logical definition of ratios of quantities. Secondly, I will consider the mathematical background of Frege's logicism. On the basis of this, I will show that his standpoint in real analysis was much subtler than what we used to expect. On the one hand, unlike Weierstrass and Cantor, Frege wanted to get such real analysis that could be universally applicable. On the other hand, unlike most mathematicians who insisted on the traditional conceptions, he would not depend upon any geometrical considerations in establishing real analysis. Thirdly, I will argue that Frege regarded these two aspects — the independence from geometry and the universal applicability — as those which characterized logic itself and, by logicism, arithmetic itself. And I will show that his conception of real numbers as ratios of quantities stemmed from his methodological maxim according to which the nature of numbers should be explained by the common roles they played in various contexts to which they applied, and that he thought that the universal applicability of numbers could not be adequately explicated without such an explanation.

keywords: Frege, real numbers, Cantor, arithmetization of analysis, applications of mathematics, quantities, ratios of quantities

2000 Mathematics Subject Classification : 97-02, 97-03.

ZDM Classification : A3, E1, E2, F5, M1

접수일: 2009년 7월 6일 수정일: 2009년 8월 19일 게재확정일: 2009년 8월 25일