

# 불규칙 가진을 받는 탄성진자의 응답 해석

이신영\*

(논문접수일 2008. 11. 12, 심사완료일 2009. 3. 2)

## Response of an Elastic Pendulum under Random Excitations

Sin-Young Lee\*

### Abstract

Dynamic response of an elastic pendulum system under random excitations was studied by using the Lagrangian equations of motion which uses the kinetic and potential energy of a target system. The responses of random excitations were calculated by using Monte Carlo simulation which uses the series of random numbers. The procedure of Monte Carlo simulation is generation of random numbers, system model, system output, and statistical management of output. When the levels of random excitations were changed, the expected responses of the pendulum system showed various responses.

**Key Words** : Elastic pendulum(탄성진자), 불규칙 가진(Random excitation), 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)

## 1. 서론

불규칙 가진을 받는 비선형 시스템의 여러 가지 해석 방법 중 널리 사용되는 방법으로 통계적 선형화 방법이 있다<sup>(1-6)</sup>. 통계적 선형화에 의하여 선형화 또는 준선형화를 수행하면 주어진 계의 거동을 해석하고, 또는 제어하는 것이 원래의 계를 그대로 취급하는 것보다 편리하다. 그런데 이와 같은 선형화를 하기 위하여 통계적 적분을 구하는 과정이 필요하며 이 과정에서 원래의 비선형성을 해치지 않는 적절한 급수의 항으로 주어진 시스템을 나타내는 것이 필요하다.

탄성진자 계의 경우 일반적인 고차 항 외에 삼각함수 등

이 불가피하게 포함되므로<sup>(7)</sup> 위와 같은 과정이 필요하다. 종전의 연구에서는 선형화 방안을 모색하기 위하여 제한된 일부 가진에 대하여 탄성진자 문제를 해석하였으나<sup>(8)</sup> 그 범위가 좁아서 불규칙 가진을 받는 탄성진자 거동의 전체적인 경향을 파악하는 데 충분하지 못하였다. 본 논문에서는 적절한 등가 선형화 계를 모색하기 위한 사전 연구로써 원래 계의 비선형성을 해치지 않는 적절한 급수의 항으로 주어진 시스템을 나타내기 위하여 기존의 문헌<sup>(7,8)</sup>보다 넓은 범위의 가진에 대하여 몬테카를로 시뮬레이션을 사용하여 해석하고 그 결과들을 비교하였다.

\* 국립군산대학교 기계자동차공학부 (sinylee@kunsan.ac.kr)  
주소: 573-701 전북 군산시 미룡동 산68번지

## 2. 탄성 진자 계의 진동

수직과 수평 방향으로 불규칙 가진을 받는 탄성진자계를 Fig. 1에 나타낸다<sup>(7)</sup>.

진자줄이가  $y(t)$ 와  $z(t)$ 의 불규칙 가진을 받고, 점성감쇠가 스프링의 길이 방향 운동과 회전진자 운동에 존재한다고 가정한다. 진자의 자유길이를  $l_0$  정적 변위를  $x_{st}$ 라고 하면, 평면 운동으로 구속되어 있는 이 진자의 수직 및 수평 위치는

$$\begin{aligned} Y &= (l_0 + x_{st} + x(t))\cos\theta(t) - y(t), \\ Z &= (l_0 + x_{st} + x(t))\sin\theta(t) - z(t). \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)의 시간 도함수로부터 속도 항을 구할 수 있고 속도로부터 운동에너지를, 질량의 위치와 변형에너지를로부터 위치에너지를 구할 수 있다. 운동에너지와 위치에너지를로부터 시스템의 운동방정식을 구하는 Lagrange 운동방정식은

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad q = x, \theta. \quad (2)$$

Lagrange 운동방정식 (2)에 운동에너지와 위치에너지를 대입하고 점성 감쇠력  $c_1\dot{x}$ 과  $c_2\dot{\theta}$ 을 추가하면<sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx + Mg(1 - \cos\theta) - M(l+x)\dot{\theta}^2 \\ - M\ddot{y}\cos\theta - M\ddot{z}\sin\theta = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M(l+x)^2\ddot{\theta} + 2M(l+x)\dot{x}\dot{\theta} + c_2\dot{\theta} \\ + M(l+x)(\ddot{y}\sin\theta - \ddot{z}\cos\theta) \\ + Mg(l+x)\sin\theta = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

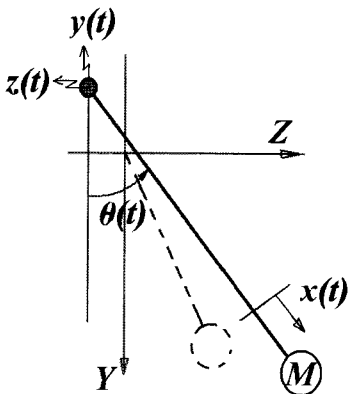


Fig. 1 A spring-pendulum system

다음과 같은 무차원 변수를 도입하고,

$$\begin{aligned} \frac{k}{M} = \omega_1^2, \quad \frac{c_1}{M} = 2\zeta_1\omega_1, \quad \tau = \omega_1 t, \quad u = \frac{x}{l}, \quad \frac{g}{l} = \omega_2^2, \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} = r, \quad \frac{c_2}{M\omega_2} = \zeta_2, \quad \frac{y''}{l} = w_y(\tau), \quad \frac{z''}{l} = w_z(\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

식 (3)과 (4)를 정리하면

$$\begin{aligned} u'' + 2\zeta_1 u' + u - (1+u)\theta'^2 \\ + r^2(1 - \cos\theta) = w_y(\tau)\cos\theta + w_z(\tau)\sin\theta, \\ (1+u)^2\theta'' + 2\zeta_2 r\theta' + 2(1+u)u'\theta' \\ + r^2(1+u)\sin\theta \\ = -(1+u)\sin\theta w_y(\tau) + (1+u)\cos\theta w_z(\tau). \end{aligned} \quad (6)$$

두 개의 2계미분방정식을 다음과 같이 연립 1계미분방정식으로 변환하면 쉽게 풀 수 있다.

즉  $u = X_1, \theta = X_2, u' = X_3, \theta' = X_4$  라고 놓으면

$$\dot{X}_1 = X_3, \quad (8)$$

$$\dot{X}_2 = X_4, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 = -X_1 - r^2(1 - \cos X_2) - 2\zeta_1 X_3 \\ + (1+X_1)X_4^2 \\ + \cos X_2 w_y(\tau) + \sin X_2 w_z(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 = -\frac{2\zeta_2 r}{(1+X_1)^2} X_4 - \frac{2}{1+X_1} X_3 X_4 \\ - \frac{r^2}{1+X_1} \sin X_2 \\ - \frac{\sin X_2}{1+X_1} w_y(\tau) + \frac{\cos X_2}{1+X_1} w_z(\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

위 방정식 (8)~(11)은 일반적인 가진을 받는 탄성진자의 응답을 구하는 운동방정식이고, 가진함수  $w_y(\tau)$  및  $w_z(\tau)$ 를 입력하여 해를 구할 수 있다.

위 방정식 (8)~(11)은 엄밀한 운동방정식이고, 풀이에 많은 시간이 소요되며 선형화 해석에 상당한 어려움을 초래한다. 식 (10), (11)에서 4차 이상의 비선형 항을 무시한 근사 방정식은

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 = -X_1 - \frac{r^2}{2} X_2^2 - 2\zeta_1 X_3 + (1+X_1)X_4^2 \\ + \left(1 - \frac{X_2^2}{2}\right) w_y(\tau) + X_2 w_z(\tau), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_4 = & -2X_4 \left[ \zeta_2 r (1 - 2X_1 + 3X_1^2) + X_3 (1 - X_1) \right] \\ & - r^2 X_2 \left( 1 - X_1 + X_1^2 - \frac{X_2^2}{6} \right) - X_2 (1 - X_1) w_y(\tau) \\ & + (1 - X_1 + X_1^2 - \frac{X_2^2}{2}) w_z(\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

본 논문에서는 식 (10)-(11)을 사용하는 경우 및 식 (12)-(13)을 사용하는 3차 근사식 해석을 수행하고 그 결과를 비교하고자 하였다.

확률론적 방법에 의하여, 불규칙 가진의 스펙트럼 밀도를  $K$ , 시간 간격을  $\Delta t$ , 정규분포하는 불규칙 변수를  $u_k$  라고 하면, 실 백색잡음(real white noise)의  $n$ 번째 표본함수  $W_n(t_k)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$W_n(t_k) = \sqrt{\frac{2\pi K}{\Delta t}} u_k \quad (14)$$

### 3. 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation, MCS)은 계산을 수행하기 위하여 난수(random number)의 수열을 이용하는 방법을 가리키는 일반적인 용어이다<sup>(9)</sup>. 몬테카를로 시뮬레이션의 기본 절차는 불규칙 입력 생성, 시스템 모델, 시스템 출력 및 출력치의 통계적 처리이다.

본 연구에서 사용한 난수발생법은 선형 조화 발생기(linear congruential generator)이고, 이 방식에 의하여 균일하게 분포하는 수열을 구할 수 있다. 선형조화발생기에 의하여 구한 균일하게 분포하는 실수의 수열은 여러 방법에 의하여 특정한 분포를 갖는 수열로 변환할 수 있다. 본 연구에서는 정규분포의 수열을 구하는 박스뮬러(Box-Muller) 방법을 이용하였다<sup>(9,10)</sup>.

본 논문에서 비선형 시스템의 시간이력 해석을 위하여 룬게쿠타(Runge-Kutta) 방법을 사용하였다<sup>(11,12)</sup>.

시스템이 1계 미분함수형으로 주어진 경우 각 시각에서의 응답을 순차적으로 구할 수 있고, 각 시각에서의 응답을 이용하면 변위 제곱의 기댓값을 구할 수 있다.

### 4. 수치 해석 결과

시스템모델링, 확률론적 방법 및 몬테카를로 시뮬레이션(MCS) 기법을 종합하여 전산 프로그램을 작성하고 주어진 변수에 대한 해석을 수행하였다. 전체적인 변수로 감쇠비

$\zeta_1 = 0.01$ ,  $\zeta_2 = 0.01$ 로 설정하였고, Y방향과 Z 방향의 불규칙 가진 스펙트럼밀도  $K_{yy}$ ,  $K_{zz}$  및 진동수비  $r$ 을 변화시켜 가며 해석하였다.

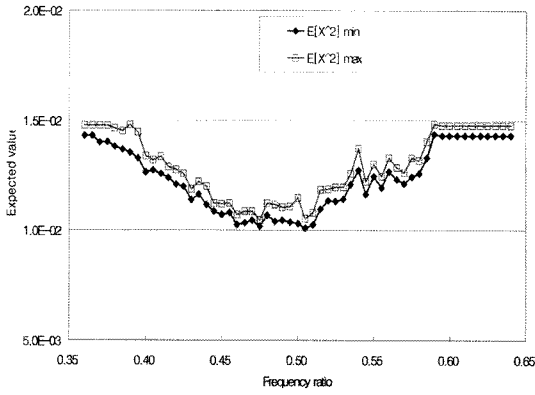
Fig. 2와 3은  $K_{yy} = 10^{-4}$ ,  $K_{zz} = 0$ 인 경우 각각 엄밀한 식 및 개략식을 사용한 결과를 나타낸다. Fig. 4와 5는  $K_{yy} = 0$ ,  $K_{zz} = 2 \times 10^{-5}$ 인 경우 각각 엄밀한 식 및 개략식을 사용한 결과를 나타낸다. Fig. 6~7은  $K_{yy} = 10^{-4}$ 이고  $K_{zz}$ 는  $2 \times 10^{-5}$ 인 경우의 결과를 나타내고 있다. Fig. 8은  $K_{yy} = 10^{-4}$ 이고  $K_{zz} = 4 \times 10^{-5}$ 인 경우 엄밀한 식을 사용한 결과를 나타내는데, 이 경우 근사식으로는 계산값이 수렴하지 않고 발산하여 전산프로그램에서 계산 결과를 구할 수 없었다.

Fig 9-10은  $K_{yy} = 2 \times 10^{-4}$ 이고  $K_{zz}$ 는  $2 \times 10^{-5}$ 와  $4 \times 10^{-5}$ 인 경우 엄밀한 식을 사용한 결과를 나타내는데, 이 두 경우 근사식으로는 계산이 수렴하지 않고 발산하여 계산 결과를 구할 수 없었다. 몇 가지의 진동수비에서 각변위 제곱의 기대치가 크게 나타나므로 물리적 의미로는 진동 변위가 매우 불안정하고 수렴하는 해를 구할 수 없는 구간이라고 사료된다.

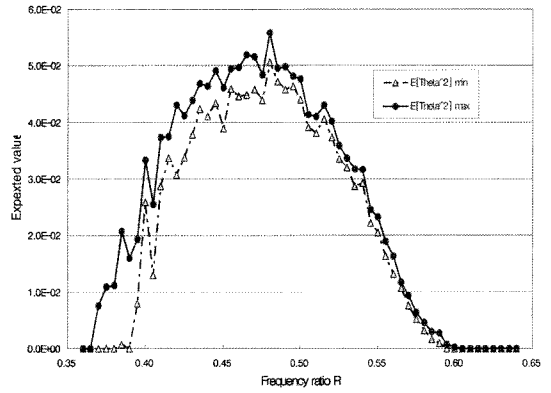
전체적으로 비선형 불규칙 응답의 특성에 따라 해는 최저값과 최고값 사이에서 변화하였고, Figs. 2~5과 같이 한 방향만의 불규칙 가진이 작용하는 경우에는 기존의 문헌(7)과 같이 예측가능한 형상을 나타내었으며, 엄밀 해와 근사해가 잘 일치하였다. 두 방향의 가진이 작용하는 경우 엄밀해와 근사해가 잘 일치하지 않았고, 가진 스펙트럼의 크기가 증가하면 계산이 발산하여 해를 구할 수 없었다. 불규칙 가진의 스펙트럼 밀도가 다양해짐에 따라 응답진폭 제곱의 기댓값은 다양한 형상으로 분포함을 나타내었다.

### 5. 결론

불규칙 가진을 받는 탄성진자의 진동을 수치해석 하고자 하였다. 라그랑지 방정식을 이용하여 시스템의 방정식을 구하고, 확률론적 방법에 의하여 계의 불규칙 가진을 처리하였으며, 몬테카를로 시뮬레이션에 의하여 해석하였다. 시간이력해석에는 룬게쿠타 방법을 이용하였으며 해석결과로부터 변위제곱의 기댓값을 구하였다. 근사해석의 가능성을 고찰하기 위하여 4차 이상의 항을 제외한 근사식과 엄밀한 식의 두 종류의 식을 사용하여 해석하였다.

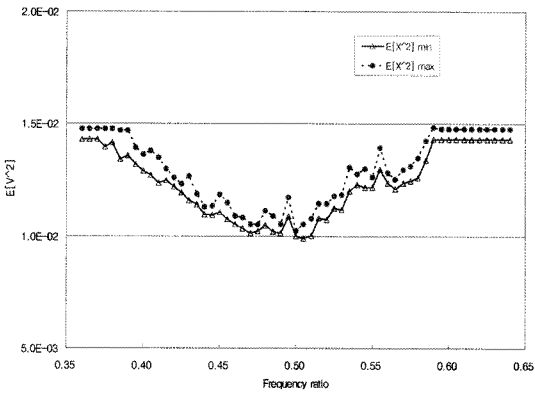


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

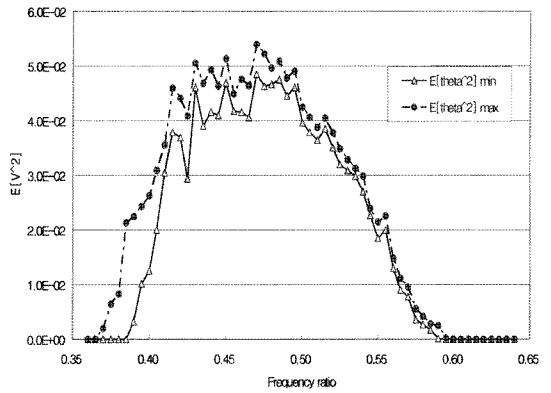


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 2 Expected values by exact formulae in the case of  $K_{yy}=10^{-4}$ ,  $K_{zz}=0$

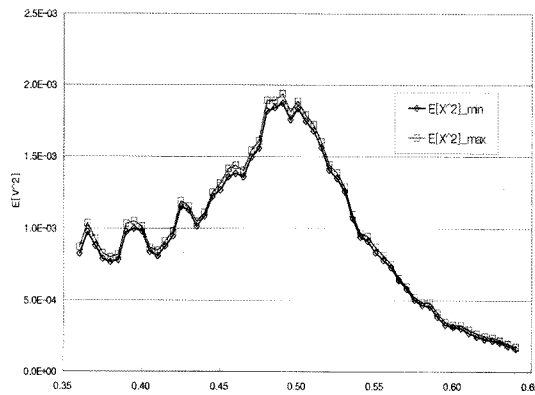


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

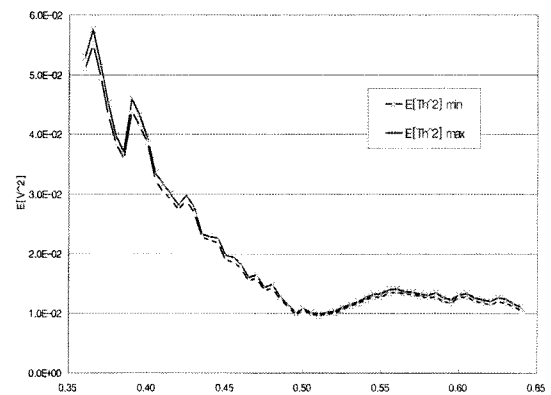


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 3 Expected values by approximate formulae in the case of  $K_{yy}=10^{-4}$ ,  $K_{zz}=0$

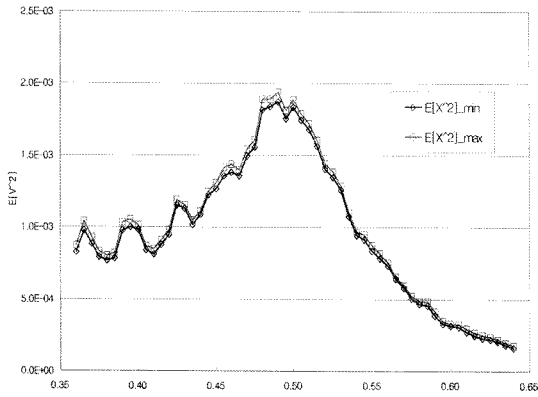


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

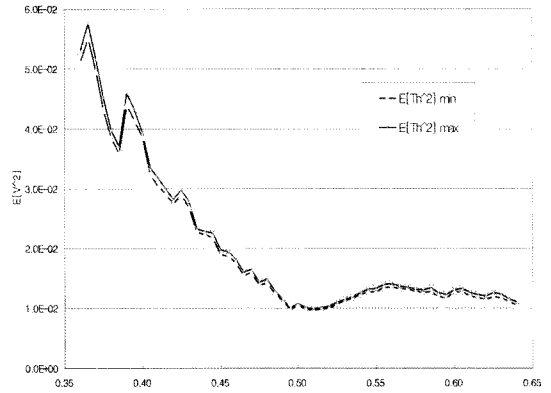


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 4 Expected values by exact formulae in the case of  $K_{yy}=0$ ,  $K_{zz}=2 \times 10^{-5}$

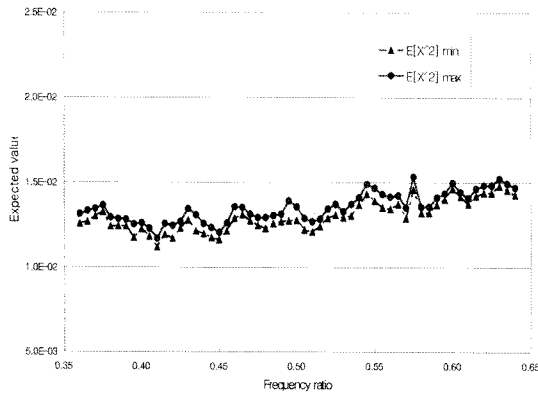


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

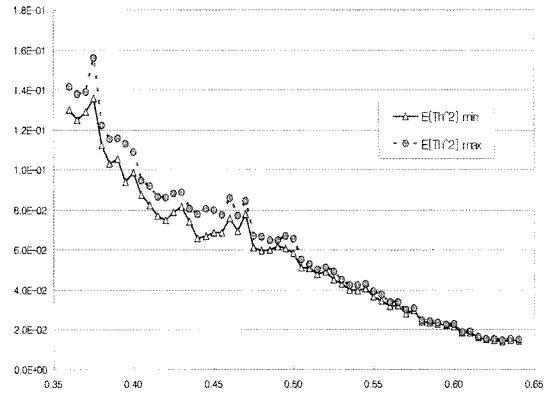


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 5 Expected values by approximate formulae in the case of  $K_{yy}=0, K_{zz}=2 \times 10^{-5}$

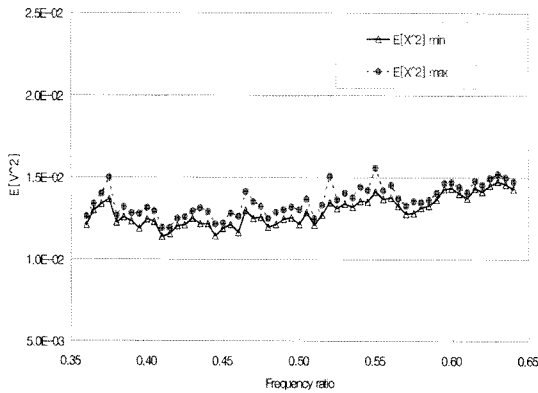


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

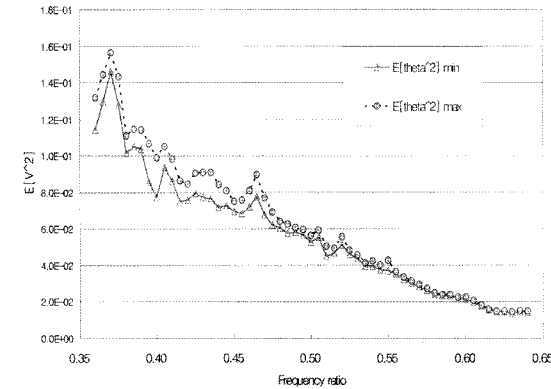


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 6 Expected values by exact formulae in the case of  $K_{yy}=10^{-4}, K_{zz}=2 \times 10^{-5}$

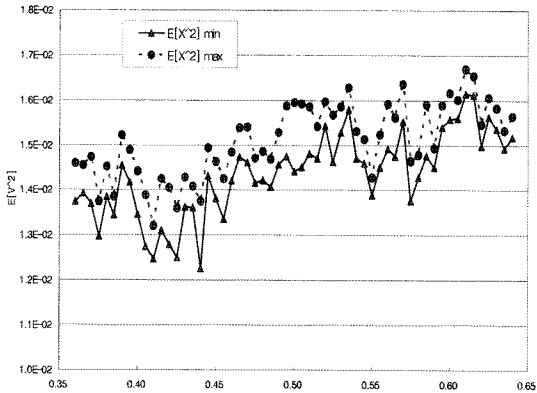


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

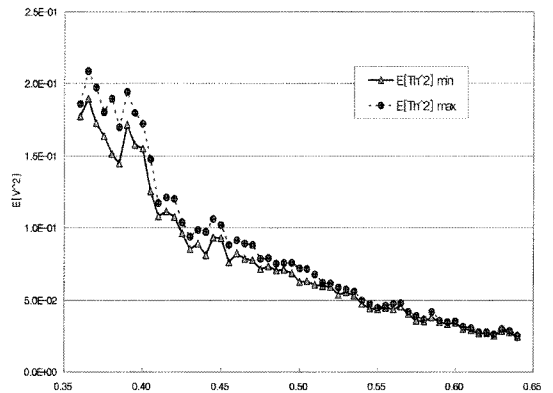


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 7 Expected values by approximate formulae in the case of  $K_{yy}=10^{-4}, K_{zz}=2 \times 10^{-5}$

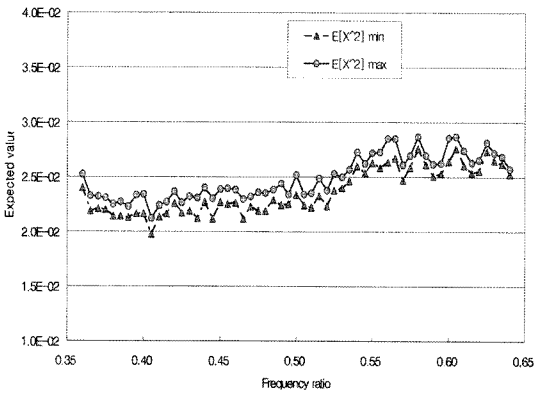


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

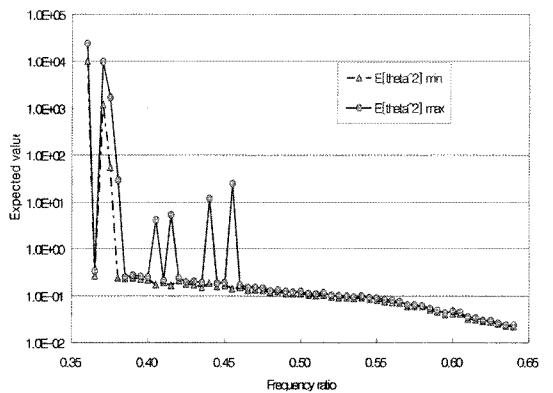


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 8 Expected values by exact formulae in the case of  $K_{yy}=10^{-4}$ ,  $K_{zz}=4 \times 10^{-5}$

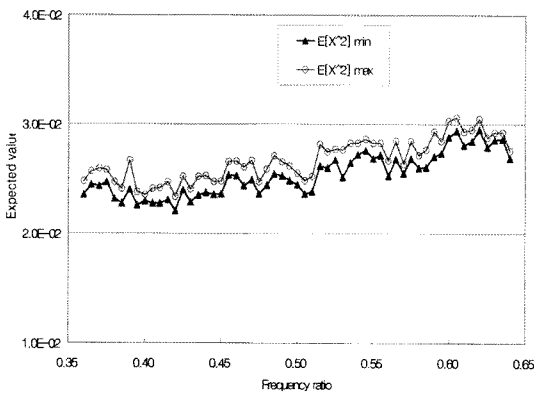


(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio

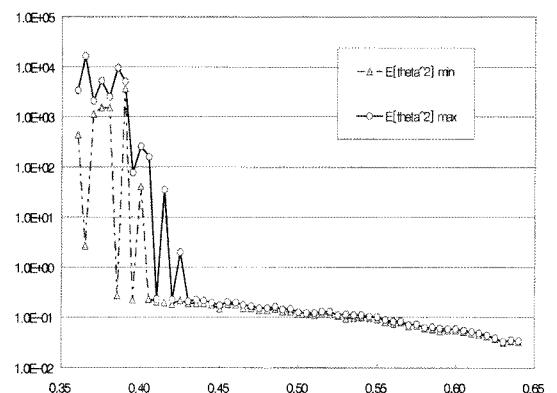


(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 9 Expected values by exact formulae in the case of  $K_{yy}=2 \times 10^{-4}$ ,  $K_{zz}=2 \times 10^{-5}$



(a)  $E[X^2]$  vs. frequency ratio



(b)  $E[\theta^2]$  vs. frequency ratio

Fig. 10 Expected values by exact formulae in the case of  $K_{yy}=2 \times 10^{-4}$ ,  $K_{zz}=4 \times 10^{-5}$

한 방향만의 불규칙 가진이 작용하는 경우에는 기존의 문헌과 같이 예측가능한 형상을 나타내었다. 양 방향의 불규칙 가진이 작용하는 경우 가진이 불규칙 가진의 스펙트럼 밀도가 다양해짐에 따라 응답진폭 제곱의 기댓값은 다양한 형상으로 분포함을 나타내었고, 가진 스펙트럼의 크기에 따라서 근사적으로는 계산이 되지 않는 범위가 있음을 확인하였다.

### 참고 문헌

- (1) Chen, J. B. and Li, J., 2005, "Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structure," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 33~44.
- (2) Spanos, P. D. and Zeldin, B. A., 1998, "Monte Carlo treatment of random fields: a broad perspective," *Applied Mechanics Review*, Vol. 51, No. 3, pp. 219~237.
- (3) Klosner, J. M. and Haber, S. F., 1992, "Response of non-linear systems with parameter uncertainties," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, No. 4, pp. 547~563.
- (4) Liu, W. K., Besterfeld, G., and Belytschko, T., 1988, "Transient probabilistic systems," *Computing Methods on Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 67, No. 1, pp. 27~54.
- (5) Bernard, P., 1998, "Stochastic linearization: what is available and what is not," *Computers and Structures*, Vol. 67, pp. 9~18.
- (6) Lin, Y. K., and Cai, G. Q., 2004, *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.
- (7) Cho, D. S., 2001, "Nonlinear Vibration Responses of a Spring-Pendulum System under Random Base Excitations," *J. of KSPE*, Vol. 18, No. 3, pp. 175~181.
- (8) Lee, S. Y., 2007, "Nonlinear random vibration responses of an elastic pendulum system," *Proc. of the KSMTE Autumn Conference*, pp. 172~177.
- (9) Marek, P., Brozzetti, J., and Gustar, M., 2001, *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Praha Czech.
- (10) Landau, D. P. and Binder, K., 2000, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (11) Meirovitch, L., 1985, *Introduction to Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York.
- (12) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T., 1988, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York.