

# Max-Plus 대수를 이용한 환승 스케줄 시간표 작성 및 분석

## Timetabling and Analysis of Train Connection Schedule Using Max-Plus Algebra

박범환<sup>†</sup>

Bum Hwan Park

**Abstract** Max-plus algebra is a nonlinear system comprised of two operations, maximization (max) and addition (plus), which are corresponding to the addition and the multiplication in conventional algebra, respectively. This methodology is applicable to many discrete event systems containing the state transition with the maximization and addition operation. Timetable with connection is one of such systems. We present the method based on max-plus algebra, which can make up timetable considering transfer and analyse its stability and robustness. In this study, it will be shown how to make up the timetable of the urban train and analyse its stability using Max-Plus algebra.

**Keywords** : Max-Plus Algebra, Connection Schedule, Stability

**요 지** Max-Plus 대수란, 선형 대수(linear algebra)에서의 더하기(addition) 연산과 곱하기(multiplication) 연산을 최대값(maximization), 더하기(addition)로 각각 대체한 비선형 시스템을 말한다. Max-Plus 대수는 전통적인 의미의 선형 대수에서 다루지는 고유값(eigenvalue), 고유벡터(eigenvector), 안정성(stability) 등의 개념이 Max-Plus 대수에서도 그대로 적용되고, 그것의 의미 또한 실제 시스템의 다양한 해석을 가능케 하고 있어, 최대값 연산과 더하기 연산으로 이루어진 이산 사건 시스템(discrete event system)을 분석할 수 있는 유용한 도구가 된다. 이러한 이산 사건 시스템의 대표적인 예가 바로 환승을 고려한 열차 스케줄이다. 현재 수도권에는 1호선~8호선, 인천1호선, 분당선, 중앙선 등 11개 노선의 도시 철도가 운영되고 있다. 각 노선들은 서울 Metro, 서울도시철도공사, KORAIL 등 서로 다른 운영사에 의해 운영되고 있어서 각 노선의 스케줄 또한 노선간의 환승을 고려하지 않은 채 독립적으로 작성되고 있는 실정이다. 이러한 독립적인 열차 스케줄은 승객들의 긴 환승시간으로 이어진다. 본 연구에서는 Max-Plus 대수 방법론에 대한 자세한 설명을 기초로 1호선과 2호선, 4호선의 주요 환승역인 사당역과 신도림역, 시청역, 동대문역을 중심으로 Max-Plus 대수 방법론의 적용 가능성을 검토해 보았다.

**주 요 어** : Max-Plus 대수, 환승 스케줄, 안정성

### 1. 서 론

철도를 비롯한 대중 교통의 서비스 질을 평가하는 중요한 척도로서, 환승 체계에 대한 관심이 고조되고 있다. 승객의 환승 시간은 환승을 위해 이동하는 시간과, 환승을 위해 플랫폼에서 기다리는 대기 시간(waiting time)으로 구성되는데, 환승 대기 시간을 줄이기 위해서는 각 환승역별 교차하는 열차의 스케줄을 주의깊게 작성해야 한다. 환승을

고려하지 않더라도 열차 스케줄의 작성은 그 자체로도 매우 복잡한 문제로서[1], 전체 네트워크를 대상으로 환승을 고려한 열차 스케줄을 작성하는 것은 매우 어렵다. 또한 환승을 고려한 열차 스케줄을 작성한다고 하더라도, 예기치 못한 지연이 발생할 경우, 원활한 환승을 위해서는 열차 스케줄을 조정해야 되는데, 이러한 열차 스케줄의 조정은 환승 지점을 통해 지연을 전파하여 원래의 스케줄을 회복하기 힘들게 한다.

기존의 스케줄 작성에 관한 연구는 대부분 정수계획 모형(integer programming)에 의존하고 있는데[1,2,3] 이들 모형은 열차간의 환승 조건을 고려하지 않았고, 특정 열차의

<sup>†</sup> 책임저자 : 정회원, 한국철도대학 철도경영정보과 조교수  
E-mail : beomi72@hanmail.net  
TEL : (031)460-4282 FAX : (031)462-2944

지연 발생 시, 경합해소(conflict resolution)를 위해 스케줄을 재 작성하는 방법에 주안점을 두고 있다. 따라서 위의 모형은 열차간의 안전 시격과 같은 기술적 제약 조건을 만족하는 스케줄 작성을 위한 모형들이며, 승객의 환승 편의를 위한 스케줄 작성이나, 스케줄의 안정성(stability) 평가는 할 수 없다는 단점이 있다. 뿐만 아니라 최적화 방법론에 기반한 열차 스케줄 작성 방법론은 네트워크가 커질 경우 해를 구하기 무척 힘들다는 단점이 있는 반면, 추후 살펴보겠지만 Max-Plus 대수 방법론은 간단한 선형 계획 모형만으로도 빠른 시간 안에 해를 구할 수 있다는 장점이 있다.

본 연구는 스케줄의 작성 및 지연에 따른 스케줄의 안정성(stability) 분석을 위한 정량적 분석 방법의 하나인 Max-Plus 대수 방법론을 다루고자 한다. Max-Plus 대수는 생산 시스템이나 교통 시스템 등 다양한 분야에 활용되고 있으며[4], 특히 네덜란드 철도의 경우, PETER(Performance Evaluation of Timed Events in Railways)라는 Max-Plus 대수에 기반한 스케줄 분석 도구를 이미 개발하여 기존의 스케줄 관리 시스템과 연동하여 운영 중에 있다[7]. Max-Plus 대수 방법론은 환승을 고려한 스케줄 작성 뿐만 아니라, 작성된 스케줄이 지연에 대해 얼마나 안정적인지를 대수적으로 계산해 낼 수 있는 현재까지 알려진 유일한 방법론이다.

2장에서는 Max-Plus 대수의 정의 및 주요 특징과 이를 교통 네트워크 분석에 활용하는 방법에 대해 자세히 알아본다. 3장에서는 수도권 도시철도에 적용하여 구간별 열차의 출도착 시간, 열차 간격 및 열차 스케줄의 안정성을 계산해 본다.

## 2. Max-Plus 대수와 환승 스케줄

### 2.1 Max-Plus 대수

Max-Plus 대수란, 선형 대수(linear algebra)에서 정의하는 더하기(addition) 연산과 곱하기(multiplication) 연산을 최대값(maximization)과 더하기(addition)로 대체한 시스템을 말한다. Max-Plus 대수는  $R_\epsilon = R \cup \epsilon$  ( $\epsilon = -\infty$ ) 상에 다음과 같은 두 개의 연산(operation)이 정의된 시스템을 말한다. 즉,  $a, b \in R_\epsilon$ 에 대해,

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \otimes b = a + b$$

Max-Plus 연산은 다음과 같이 행렬에도 그대로 적용될 수 있다. 먼저,  $A, B \in R_\epsilon^{m \times n}$  행렬에 대해서는 아래와 같은  $\oplus$  연산을 정의할 수 있고,

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

$A \in R_\epsilon^{m \times p}, B \in R_\epsilon^{p \times n}$  행렬에 대해서는  $\otimes$  연산을 정의할 수 있다.

$$(A \otimes B)_{ij} = \oplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_k(a_{ik} + b_{kj}),$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

예를 들어, 행렬  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 인 경우,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \max(2+1, 4+2) & \max(2+\epsilon, 4+2) \\ \max(3+1, 5+2) & \max(3+\epsilon, 5+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

과 같이 계산된다. Max-Plus 대수의 대수적인 성질에 대한 세부적인 설명은 [4,10]를 참조하면 된다.

### 2.2 환승을 고려한 열차 시간표 작성

본 절에서는 Max-Plus 대수를 이용하여 어떻게 환승 스케줄을 분석하는지 간단한 예제를 통해 알아본다. 먼저 아래 그림과 같은 2개의 노선(A→A, A→B→A)과 두 개의 역 A, B를 갖는 철도 네트워크를 가정하자.

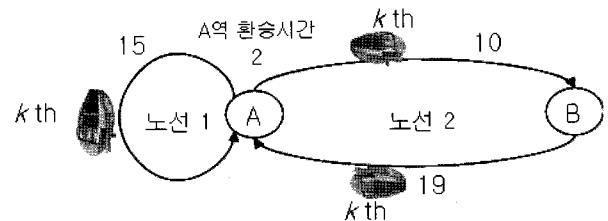


Fig. 1. A railway network

호(arc)위에 표시된 숫자는 정차시간을 포함한 역간 운행 시간을 의미하고, A역에서의 노선 간 환승 시간은 2분이라고 가정한다. 또한 어느 특정 시점에서 봤을 때, 구간 A→A, A→B, B→A간에 각각 한 개의 열차가 운행된다고 가정하자. 또한, 노선 1과 노선 2에서 출발하는 열차는 다른 노선에서 도착하는 열차와의 환승을 위해, 출발열차의 출발 시간은 도착열차의 도착시간과 환승 시간을 더한 값보다 커야 된다고 가정하자. 그러면, Max-Plus 대수는 위와 같은 철도 네트워크상에서 환승을 고려한 각 구간 별 열차 출발 시각과 열차 간격을 구할 수 있다.

위 상황을 Max-Plus 대수로 표현하기 위해 다음과 같은 변수를 도입하자.

- $x_{AA}(k)$  : A→A로 가는 k번째 열차 출발
- $x_{AB}(k)$  : A→B로 가는 k번째 열차 출발

$x_{BA}(k)$  : B→A로 가는 k번째 열차 출발  
 (처음 출발하는 열차의 index를 k=0이라 설정)

먼저 A역에서 출발하고 노선1로 출발(A→A)하는 열차의 경우, A→A상의 k+1번째 출발하는 열차의 출발 시각은 A→A상의 k번째 출발 열차의 출발 시각에 운행 시간(15)을 더한 값과 B→A상의 k번째 출발하는 열차의 출발 시각에 운행시간(19)과 환승시각(2)을 더한 값 중에서 큰 값이 된다. 이와 마찬가지로 다른 열차의 출발 시각도 위와 같은 수식으로 작성해 보면 아래와 같다.

$$x_{AA}(k+1) = \max \{x_{AA}(k) + 15, x_{BA}(k) + 19 + 2\} \quad (1-1)$$

$$x_{AB}(k+1) = \max \{x_{AA}(k) + 15 + 2, x_{BA}(k) + 19\} \quad (1-2)$$

$$x_{BA}(k+1) = \max \{x_{AB}(k) + 10\} \quad (1-3)$$

식 (1)을 행렬형태로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} x_{AA}(k+1) \\ x_{AB}(k+1) \\ x_{BA}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & \epsilon & 21 \\ 17 & \epsilon & 19 \\ \epsilon & 10 & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{AA}(k) \\ x_{AB}(k) \\ x_{BA}(k) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x(k+1) = A \otimes x(k) \quad (2)$$

위 식에서 보듯이  $x(k), x(k+1)$ 은 열벡터(column vector)를 의미하며, 아래 첨자가 없는 한,  $x$ 는 모두 열벡터를 의미한다. 예를 들어, 처음 출발하는 모든 열차가 시각 0에서 출발한다면  $(x_{AA}(0) = x_{AB}(0) = x_{BA}(0) = 0)$ , 식 (2)에 의해, 다음 출발 시각은 아래와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} x_{AA}(1) \\ x_{AB}(1) \\ x_{BA}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{AA}(2) \\ x_{AB}(2) \\ x_{BA}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 38 \\ 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{AA}(3) \\ x_{AB}(3) \\ x_{BA}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 53 \\ 48 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_{AA}(4) \\ x_{AB}(4) \\ x_{BA}(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 68 \\ 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \pmod{60} \dots \quad (3)$$

위와 같은 계산식을 이용할 경우, 처음 열차 출발 시각을 나타내는 벡터를  $x(0)$ 라고 하면, k번째 열차의 출발 시각은 아래와 같다.

$$x(k) = A^k \otimes x(0) \quad (4)$$

여기서  $A^k = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_k$  를 나타내며 특별한 언급이 없는 한,  $A^k$ 는 A를 k번  $\otimes$  연산한 것을 나타낸다.

### 2.3 열차 간격 및 출발 시각 조정

Max-Plus 대수를 이용하면, 실현 가능한 최소의 열차 간격과 초기 출발 시간을 대수적으로 계산할 수 있다. 먼저 앞 절에서 구한 열차별 출발 시각 간격을 구해보면, Table

1에서 보듯이 일정 기간이 지나면 열차 간격이 15와 18이 주기적으로 나타남을 알 수 있다. 그런데, 만약 초기 열차 출발 시각을  $(x_{AA}(0), x_{AB}(0), x_{BA}(0)) = (5, 6, 0)$ 으로 설정하면 Table 2에서처럼 모든 열차간의 간격이 일정하게 유지됨을 알 수 있다.

Table 1. departure time with initial departure time 0 all.

k	$x_{AA}$	$x_{AB}$	$x_{BA}$	$x_{AA}(k) - x_{AA}(k-1)$	$x_{AB}(k) - x_{AB}(k-1)$	$x_{BA}(k) - x_{BA}(k-1)$
0	0	0	0			
1	21	19	10	21	19	10
2	36	38	29	15	19	19
3	51	53	48	15	15	19
4	69	68	63	18	15	15
5	84	86	78	15	18	15
6	99	101	96	15	15	18

Table 2. departure time after adjusting initial departure time

k	$x_{AA}$	$x_{AB}$	$x_{BA}$	$x_{AA}(k) - x_{AA}(k-1)$	$x_{AB}(k) - x_{AB}(k-1)$	$x_{BA}(k) - x_{BA}(k-1)$
0	5	6	0			
1	21	22	16	16	16	16
2	37	38	32	16	16	16
3	53	54	48	16	16	16
4	69	70	64	16	16	16
5	85	86	80	16	16	16
6	101	102	96	16	16	16

Max Plus 대수는, 앞으로 살펴보겠지만, Fig. 1과 같은 철도 네트워크에서 환승 제약을 만족시키는 최소의 열차 간격이 16분임을 증명해 줄 뿐만 아니라,  $x(0), x(1), x(2), x(3) \dots$  사이의 열차 간격 또한 16분으로 조정해 줄 수 있는 최초 열차 출발 시각 벡터  $x(0)$ 를 대수적으로 구해준다. 이러한 계산은 Max Plus 대수의 고유값(eigenvalue)과 고유벡터(eigenvector)를 구함으로써 쉽게 확인할 수 있다. Max Plus 대수에서 고유값과 고유벡터는 아래 식을 만족하는  $x$ 와  $\lambda \in R_\epsilon$ 을 말한다.

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \quad (5)$$

Max Plus 대수의 고유값과 고유벡터의 성질을 알아보기 위해, 행렬 A로부터 우선 그래프(precedence graph)  $G(A)$ 를 다음과 같이 정의하자.

정의 1.  $n \times n$  행렬  $A = (a_{ij})$ 에 대한 우선 그래프  $G(A) = (N, A)$ 는 노드 집합  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 과 아크 집합  $A = \{ij \mid a_{ij} \neq \epsilon\}$ 로 구성되며, 이 때 아크  $ij$ 의 가중치는

$a_{ij}$  인 그래프를 말한다.

**정의 2.[10]** (최대 환 평균) 최대 환 평균(Maximum Cycle Mean)이란 그래프  $G$ 에서 모든 환들의 가중치를 그 환 상에 포함된 호의 개수로 나눈 값 중 가장 큰 값을 말한다. 즉  $\max_{C \in \mathcal{C}} w(C)/|C|$ . 여기서  $w(C)$ 는 환  $C$  상에 존재하는 호의 가중치를 더한 값이다.

**정리 1.[10]** 우선(precedence) 그래프  $G(A)$ 가 강성 연결(strongly connected) 그래프이면, 식 (5)를 만족하는 유일한(unique)  $\lambda$ 가 존재하고 이  $\lambda$ 는 그래프  $G(A)$  상의 최대 환 평균(maximum cycle mean)이 된다. 이때 최대 환 평균을 갖는 사이클을 임계 환(critical circuit)이라 한다.

예를 들어, 위 예제에 대한  $G(A)$ 와 그것에 대한 최대 평균 사이클을 구해보면 Fig. 2와 같다. 그림에서 보듯이, 모든 노드 간에 유 방향 경로(directed path)가 존재하므로 강성 연결을 만족하며,  $G(A)$  상에 정의될 수 있는 모든 환(cycle)중 최대 환 평균은 16이 되며, 그것에 대응되는 환은 1-3-2-1임을 알 수 있다.

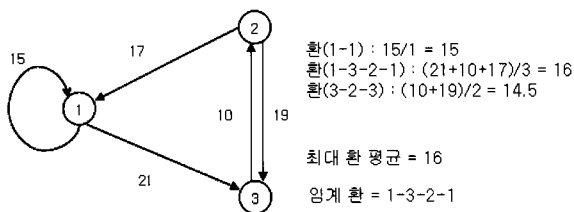


Fig. 2. Precedence graph and critical circuit

정리1에 의해 행렬  $A$ 에 대한 고유값  $\lambda$ 와 고유 벡터  $x$ 가 존재하므로 다음과 같은 수식을 유도할 수 있다.

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \Rightarrow A^k \otimes x = \lambda^k \otimes x \tag{6}$$

여기서  $\lambda^k$ 는 전통적인 대수 관점에서 계산하면  $k\lambda$ 가 됨을 주의하자. 결국, 고유 벡터  $x$ 를 열차 별 최초 출발 시각  $x(0)$ 로 설정하면,  $k$ 번째 열차 출발 시각은  $\lambda$ 만큼의 시간만큼만 계속 더해 가면 된다는 의미이다. 이 때, 최대 환 평균을 갖는 임계 환(critical cycle)은 1-3-2-1로 돌아오는 환이다. 결국 임계 환은 전체 네트워크에서 링크 당 평균 열차 간격이 가장 긴 환으로 볼 수 있다.

Max-Plus 대수의 고유값과 고유 벡터를 구하는 방법은 대수식으로부터 선형 계획 모형(Linear Programming)을 도출하여 계산하는 방법도 있고, 그래프  $G(A)$  상에서 최대 환 평균을 구하는 방법도 있다[5]. 이 방법들 모두 다항 시

간(polynomial time)만에 빠르게 계산 가능하며, 본 연구에서는 아래와 같은 선형 계획법을 이용하여 계산하였다 [5,11]. 아래 선형 계획 모형은 원래의 max-plus 대수식을 완화한 모형으로 고유값은 구할 수 있지만, 고유 벡터는 별도의 계산과정을 통해 계산해야 한다. 자세한 계산과정은 [11]을 참고하면 된다.

$$\min \lambda \text{ s.t. } \forall i, j \quad a_{ij} + x_j \leq x_i + \lambda$$

## 2.4 스케줄 안정성(stability) 분석

스케줄 분석에서 중요한 이슈 중 하나는 예기치 못한 지연에 대해 스케줄이 얼마나 안정적인가에 대한 분석이다. 이를 분석하기 위해, 현재 시각표에 나타난 스케줄이  $\tau$  열차 간격 시간을 갖는 주기적 스케줄(periodic schedule)이라 가정하고,  $k$ 번째 열차 출발 시각을 나타내는 열벡터를  $d(k)$ 라 정의하자. 주기적 열차 스케줄이므로  $k+1$ 번째 열차 출발 시각은

$$d(k+1) = \tau \otimes d(k), \quad d(k) = \tau^k \otimes d(0) \tag{7}$$

와 같이 표현되며, 실제 열차 출발 시각  $x(k)$ 는 시각표 상의 열차 출발 시각  $d(k)$  보다 커야 하므로, 주어진 주기적 시각표를 고려한 환송 스케줄은 아래와 같은 식을 만족해야 한다.

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus d(k+1) = A \otimes x(k) \oplus \tau^{k+1} \otimes d(0) \tag{8}$$

위 예제에서,  $x(k+1) = A \otimes x(k)$ 을 만족하는 최소 열차 간격은 16이었는데, 만약 시각표에 나와 있는 열차 스케줄의 주기 시간  $\tau$ 가 16보다 작은 값이면 시각표에 따른 열차의 정상적인 운행이 불가능함을 의미한다.

**따름정리 1.**  $x(k+1) = A \otimes x(k)$  시스템의 유일한 고유값  $\lambda$ 와 그 고유값에 대응되는 고유벡터  $v_0$ 가 주어졌을 때, 식 (8)에서  $d(0) = v_0$ ,  $\tau = \lambda$ 로 두면, 식 (8)의 해  $x(k) = A^k v_0$ 가 되어,  $v_0$ 는 초기 출발시간을 나타내는 벡터이다.

이러한 관점에서 Max-Plus 대수를 이용한 분석에서는 주어진 시각표의 안정성에 대한 식을 유도할 수 있다. 먼저 스케줄이 안정적이라 함은, 예기치 못한 사건에 의해 발생된 지연이 일정 시간이 지나면서 자연스럽게 지연이 해소되어, 원래 스케줄을 회복함을 말한다.

**정리 2.[9]** 주기적 스케줄 (periodic schedule) 상의 열차

간격 (cycle time)을  $\tau$ 라고 했을 때,  $\lambda < \tau$  이면 스케줄은 안정적이다. 역도 성립한다.

Table 3. delay recovery when  $\tau=17$

$k$	$x_{AA}$	$x_{AB}$	$x_{BA}$	$x_{AA}(k) - x_{AA}(k-1)$	$x_{AB}(k) - x_{AB}(k-1)$	$x_{BA}(k) - x_{BA}(k-1)$
0	5	6	0	$\tau=17$		
1	22	23	17	17	17	17
2	39 > 42	40	34	20	17	17
3	57	59	51	15	19	17
4	73	74	69	16	15	18
5	90	91	85	17	17	16
6	107	108	102	17	17	17

예를 들어, 예기치 못한 원인에 의해 열차 지연이 발생하여  $x_{AA}(2) \leftarrow x_{AA}(2) + 3$ 으로 3분 지연되었다고 가정하자. 이 때,  $\tau$ 를 각각 15, 17, 20으로 설정했을 때, 스케줄에 주는 영향과 파급 효과를 계산하면 아래와 같다. Table 3에서 보듯이,  $\tau$ 를 15로 설정할 경우, 주기적 스케줄이 파괴됨을 알 수 있으며 따라서 열차 간격을 15로 설정한 시각표는 안정적이지 않음을 알 수 있다. 반면에,  $\tau$ 를 16보다 큰 17로 설정한 경우,  $k=5$ 에서 20으로 설정할 경우  $k=3$ 에서 처음 설정된 시각표를 회복할 수 있음을 볼 수 있다.

이것은 최대 환 평균( $\lambda$ )이 16이므로 평균 16분 간격으로 일정시간 동안 스케줄을 조절하고 나면 원래 시각표의 스케줄대로 돌아가기 때문이다(Table 4 참조). 물론  $\tau$ 가 클수록 여유 시간이 많아 짧은 시간 안에 스케줄을 회복할 수 있다. 이것에 대한 수학적 증명은 [6]을 참조하면 된다.

만약,  $\lambda$ 가  $\tau$ 보다 작은 불안정한 스케줄의 경우, 임계 환에 열차를 추가 투입하면  $\lambda$ 를 줄일 수 있다. Fig. 1에서 BA구간에 열차를 하나 더 투입하여, 임의의 시점에서 BA구간에 열차가 2대인 경우 Max-Plus 대수식은 식 (9)와 같이 된다.

$$x_{AA}(k+1) = \max \{x_{AA}(k) + 15, x_{BA}(k-1) + 19 + 2\} \tag{9-1}$$

$$x_{AB}(k+1) = \max \{x_{AA}(k) + 15 + 2, x_{BA}(k-1) + 19\} \tag{9-2}$$

$$x_{BA}(k+1) = \max \{x_{AB}(k) + 10\} \tag{9-3}$$

$$x_{BA}(k) = \max \{x_{BA}(k), \epsilon\} \tag{9-4}$$

$$\begin{bmatrix} x_{AA}(k+1) \\ x_{AB}(k+1) \\ x_{BA}(k+1) \\ x_{BA}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & \epsilon & \epsilon & 21 \\ 17 & \epsilon & \epsilon & 19 \\ \epsilon & 10 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{AA}(k) \\ x_{AB}(k) \\ x_{BA}(k) \\ x_{BA}(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x(k+1) = A \otimes x(k)$$

Table 4. delay propagation and recovery with respect to time period

$\tau$	$k$	지연 발생 전			지연 발생 후		
		$x_{AA}$	$x_{AB}$	$x_{BA}$	$x_{AA}$	$x_{AB}$	$x_{BA}$
$\tau=15$	0	5	6	0	5	6	0
	1	21	22	16	21	22	16
	2	37	38	32	40	38	32
	3	53	54	48	55	57	48
	4	69	70	64	70	72	67
	5	85	86	80	88	87	82
	6	101	102	96	103	105	97
$\tau=17$	0	5	6	0	5	6	0
	1	22	23	17	22	23	17
	2	39	40	34	42	40	34
	3	56	57	51	57	59	51
	4	73	74	68	73	74	69
	5	90	91	85	90	91	85
$\tau=20$	0	5	6	0	5	6	0
	1	25	26	20	25	26	20
	2	45	46	40	48	46	40
	3	65	66	60	65	66	60

식 (9-1)에서 보듯이, BA구간에 열차가 추가됨으로써, AA구간의 k+1 번째 열차는 BA구간의 k-1 번째 열차와 환승된다. 식 (9-4)는 위 시스템을 일차 재귀식(first order recurrence)으로 맞추기 위한 중복 제약식이다. 이러한 일차 식 전환은 다음 절에서 보다 자세히 다루고자 한다.

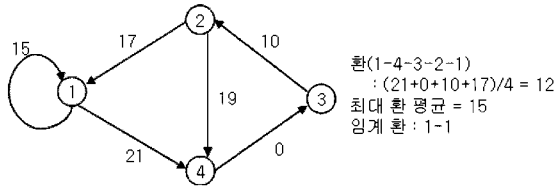


Fig. 3. Precedence graph when a train is added between B and A

Fig. 3에서 보듯이, 기존의 임계 환이 환의 가중치는 그대로면서 호의 수가 하나 증가한 1-4-3-2-1로 변한 것을 볼 수 있으며, 기존의 최대 환 평균도 16에서 15로 감소함을 알 수 있다. 결국, BA구간에 열차 한 대를 더 투입하면, 열차 간격을 15분 정도로 더 줄이면서 환승 제약을 만족하는 주기적인 스케줄을 작성할 수 있음을 의미한다.

2.5 일차 재귀식 변환

앞 절에서 나왔듯이, 두 노선에 있는 열차들 간에 환승 제약을 추가하고자 할 때, 각 노선의 열차 운행횟수 (frequency)에 따라 고차 재귀식(higher-order recurrence relation) 혹은 영차 재귀식(zero-order recurrence relation) 형태의 Max-Plus 대수식이 구성될 수 있다. 여기서 고차식이란 Max-plus 대수식의 좌변 벡터의 차수와 우변 벡터의 차수의 차이가 2이상인 경우를 말하고, 영차식은 차수의 차이가 0인 경우를 말한다. 만약 Fig. 1에서 특정 시점에서의 각 구간별 열차 수가 아래 그림과 같이 노선1에는 2대의 열차, AB구간에는 1대의 열차, 노선 BA구간에는 열차가 없는 것으로 조사되었다면, k+1번째 열차의 각 구간별 운행 시작 시간과 열차 간 환승제약은 아래와 같은 Max-Plus 대수식으로 정형화된다.

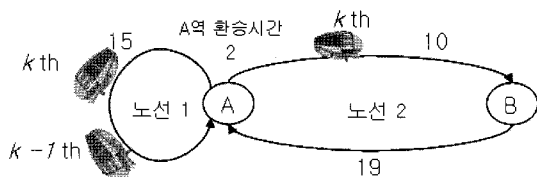


Fig. 4. Modified example from Fig. 1

$$x_{AA}(k+1) = \max \{x_{AA}(k-1) + 15, x_{BA}(k+1) + 19 + 2\}$$

$$x_{AB}(k+1) = \max \{x_{AA}(k-1) + 15 + 2, x_{BA}(k+1) + 19\}$$

$$x_{BA}(k+1) = \max \{x_{AB}(k) + 10\}$$

먼저, AA구간을 운행하는 k+1번째 열차의 A역에서의 출발시간은, k-1번째 AA구간 운행 열차의 운행시간과 BA구간에서 운행되는 k-1번째 열차와의 환승을 고려하여 설정된다. 특히, AB구간을 운행하는 k+1번째 열차의 출발시간은 이전 대수식과 달리 BA구간의 k+1번째 열차의 운행시간을 고려하여 결정된다.

$$x_{AA}(k+1) = \max \{x_{AA}(k-1) + 15, x_{BA}(k+1) + 19 + 2\}$$

$$x_{AB}(k+1) = \max \{x_{AA}(k-1) + 15 + 2, x_{BA}(k+1) + 19\}$$

$$x_{BA}(k+1) = \max \{x_{AB}(k) + 10\}$$

$$x_{AA}(k) = \max \{x_{AA}(k)\}$$

$$\begin{bmatrix} x_{AA}(k+1) \\ x_{AB}(k+1) \\ x_{BA}(k+1) \\ x_{AA}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & 21 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 19 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{AA}(k+1) \\ x_{AB}(k+1) \\ x_{BA}(k+1) \\ x_{AA}(k) \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & 15 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 17 \\ \epsilon & 10 & \epsilon & \epsilon \\ 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{AA}(k) \\ x_{AB}(k) \\ x_{BA}(k) \\ x_{AA}(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(k+1) = A_0 \otimes x(k+1) \oplus A_1 \otimes x(k)$$

위 식에서 보듯이, 고차 재귀식은 모두 일차 재귀식으로 전환되었지만, 영차 재귀식  $A_0 \otimes x(k+1)$ 은 그대로 남아 있다. 이를 일차 재귀식으로 전환하기 위해서는 아래와 같은 Max-Plus 대수 방정식의 해에 관한 정리를 이용해야 한다.

정리 4.[10]  $G(A_0)$ 가 양의 환(positive circuit)을 가지고 있지 않을 때, Max-Plus대수식  $x = A_0 \otimes x \oplus b$ 의 해  $x$ 는 다음과 같다.

$$x = A^* \otimes b \text{ where } A^* = E \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus \dots,$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & \dots \\ \epsilon & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

증명. 행렬 A가 주어져 있을 때,  $A_{ij}^k$ 는  $G(A)$ 에서 노드 i에서 j로 가는 k개의 아크를 사용하는 경로의 가중치이다. 따라서  $G(A_0)$ 가 양의 환이 없으면  $A^*$ 는 유한(finite)하다.  $x = A^* \otimes b$ 를  $x = A_0 \otimes x \oplus b$ 식에 대입하면,  $A_0 \otimes (A^* \otimes b) \oplus b = A_0 \otimes A^* \otimes b \oplus E \otimes b = (E \oplus A_0 \otimes A^*) \otimes b = A^* \otimes b$ 를 만족한다. □

일반적으로 대중 교통 시스템 분석을 위한 Max-Plus 대수 시스템에서는  $G(A_0)$ 는 환(cycle)이 없는 비환 그래프

(acyclic graph)이다. 만약  $G(A_0)$ 가 환을 가지고 있으면, 환을 구성하는 운행 구간에서 특정역을  $k$ 번째로 출발하는 열차는 그 특정역으로 들어오는  $k$ 번째 열차의 도착시간이 더 작아야 된다는 모순이 발생한다.

위 정리를 이용하여 열차 재귀식을 없애기 위해,  $A^*$ 를 계산해보면 다음과 같다. 먼저,  $A_0$ 에 대응되는 우선 그래프  $G(A_0)$ 는 아크 하나로만 구성된 비환 그래프이므로, 양의 환은 존재하지 않으며, 경로는 노드 1과 2에서 노드 3로 가는 아크수가 1개인 두 개의 경로만이 존재하므로,  $A^*$ 는 다음과 같다.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 21 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 19 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}, A^* \otimes A_1 \otimes x(k) \\ = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 21 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 19 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & 15 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 17 \\ \epsilon & 10 & \epsilon & \epsilon \\ 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \otimes x(k)$$

따라서, 최종적인 열차 재귀식은 아래와 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} x_{AA}(k+1) \\ x_{AB}(k+1) \\ x_{BA}(k+1) \\ x_{AA}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & 31 & \epsilon & 15 \\ \epsilon & 29 & \epsilon & 17 \\ \epsilon & 10 & \epsilon & \epsilon \\ 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{AA}(k) \\ x_{AB}(k) \\ x_{BA}(k) \\ x_{AA}(k-1) \end{bmatrix}$$

다음 장에서는 지금까지 서술한 Max-Plus 대수방법을 수도권 도시 철도에 적용하여 환승을 고려한 스케줄을 작성해보고 그것의 안정성을 분석해 보고자 한다.

### 3. 수도권 도시철도 적용

#### 3.1 Max-Plus 대수 모델 구축

본 연구는 수도권 지하철의 주요 환승역인 신도림, 사당, 시청, 동대문운동장, 동대문 역을 중심으로 각 구간별 열차출도착 시간 및 안정성 분석을 위한 Max-Plus 대수 모델 구축을 위해 Fig. 5와 같은 네트워크를 구성하였다. 완벽한 분석을 위해서는 수도권 도시 철도의 모든 환승역을 고려한 네트워크를 고려해야 하지만, 본 연구에서는 Fig. 5와 같이 대표적인 환승역을 중심으로 Max-Plus대수의 적용 가능성을 검토해보고자 한다. Fig. 5는 1호선의 시종착역을 신도림역과 동묘역으로, 4호선의 시종착역을 사당역과 혜화역으로 단순화하였는데, 이는 1호선, 4호선의 시종착역에 도착하는 열차는 일정시간(본 연구에서는 1분으로 설정)을 지나면 다시 그 역으로 돌아 나오도록 네트워크를 구성한 것이다.

Fig. 5는 각 구간에 운행 중인 열차수와 주행 시간, 그리고 각 구간에 매긴 번호를 보여주고 있다. 예를 들어, 신도림에서 사당으로 가는 구간은 7번 구간으로 표현하였고, 그 구간에 운행 중인 열차는 3대, 그리고 주행 시간은 17분을 나타내고 있다. 그리고 모든 노선은 7분 간격으로 운행된다고 가정하고 각 구간별 운행 시간을 7분으로 나눈 후 그것을 반올림하여 각 구간에 존재하는 열차수를 계산하였다. 주행시간이 7분 이하 구간인 4호선 동대문-동대문-혜화의 경우, 동대문-혜화 구간에 1대의 열차가 있는 것으로 가정하였다.

환승역의 특성과 환승이 이루어지는 시간대에 따라 환승 시간은 제각각이지만 본 연구는 아래 네트워크에 대해 모든 환승역에서의 환승 시간은 5분이고, 정차역에서의 정차시간(dwell time)은 30초로 가정하고, 아래와 같은 환승 제약을 설정하였다.

#### 노선 간 환승 제약

- 시청역 1호선 상행 : 2호선 내선(식 (10-3))
- 시청역 2호선 내선 : 1호선 상하행(식 (10-12))
- 동대문역 4호선 하행 : 1호선 상하행(식 (10-18))
- 신도림역 2호선 외선 : 1호선 하행(식 (10-7))
- 사당역 2호선 외선 : 4호선 상하행(식 (10-9))
- 사당역 4호선 상행 : 2호선 내외선(식 (10-15))
- 동대문운동장역 2호선 외선 : 4호선 상하행(식 (10-11))
- 동대문운동장역 4호선 하행 : 2호선 내외선(식 (10-16))
- 동대문운동장역 4호선 상행 : 2호선 내외선(식 (10-17))

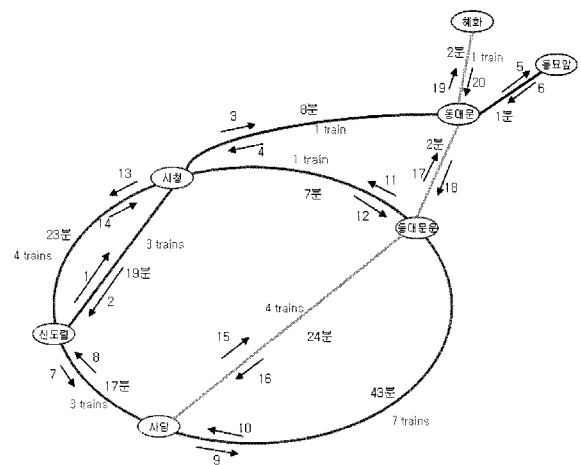


Fig. 5. Simplified Urban Network

위와 같은 환승 제약과 정차역에서의 정차시간을 고려한 열차간 연결 조건을 반영한 수식을 작성하면 (식 10)과 같다.

$$x_1(k+1) = \max\{x_2(k-2) + 19 + 1, \epsilon\} \quad (10-1)$$

$$x_2(k+1) = \max\{x_4(k) + 8 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-2)$$

$$x_3(k+1) = \max\left\{x_1(k-2) + 19 + 0.5, \right. \\ \left. x_{14}(k-3) + 23 + 5, \epsilon\right\} \quad (10-3)$$

$$x_4(k+1) = \max\{x_6(k+1) + 1 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-4)$$

$$x_5(k+1) = \max\{x_3(k) + 8 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-5)$$

$$x_6(k+1) = \max\{x_5(k+1) + 1 + 1, \epsilon\} \quad (10-6)$$

$$x_7(k+1) = \max\left\{x_2(k-2) + 19 + 5, \right. \\ \left. x_{13}(k-3) + 23 + 0.5, \epsilon\right\} \quad (10-7)$$

$$x_8(k+1) = \max\{x_{10}(k-6) + 43 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-8)$$

$$x_9(k+1) = \max\left\{x_7(k-2) + 17 + 0.5, \right. \\ \left. x_{16}(k-3) + 24 + 5, \epsilon\right\} \quad (10-9)$$

$$x_{10}(k+1) = \max\{x_{12}(k) + 7 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-10)$$

$$x_{11}(k+1) = \max\left\{x_9(k-6) + 43 + 0.5, x_{15}(k-3) + 24 + 5, \right. \\ \left. x_{18}(k+1) + 2 + 5, \epsilon\right\} \quad (10-11)$$

$$x_{12}(k+1) = \max\left\{x_1(k-2) + 19 + 5, x_4(k) + 8 + 5, \right. \\ \left. x_{14}(k-3) + 23 + 0.5, \epsilon\right\} \quad (10-12)$$

$$x_{13}(k+1) = \max\{x_{11}(k) + 7 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-13)$$

$$x_{14}(k+1) = \max\{x_8(k-2) + 17 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-14)$$

$$x_{15}(k+1) = \max\left\{x_7(k-2) + 17 + 5, \right. \\ \left. x_{10}(k-6) + 43 + 5, \right. \\ \left. x_{16}(k-3) + 24 + 1, \epsilon\right\} \quad (10-15)$$

$$x_{16}(k+1) = \max\left\{x_9(k-6) + 43 + 5, x_{12}(k) + 7 + 5, \right. \\ \left. x_{18}(k+1) + 2 + 0.5, \epsilon\right\} \quad (10-16)$$

$$x_{17}(k+1) = \max\left\{x_9(k-6) + 43 + 5, x_{12}(k) + 7 + 5, \right. \\ \left. x_{15}(k-3) + 24 + 0.5, \epsilon\right\} \quad (10-17)$$

$$x_{18}(k+1) = \max\left\{x_3(k) + 8 + 5, x_6(k+1) + 1 + 5, \right. \\ \left. x_{20}(k) + 2 + 0.5, \epsilon\right\} \quad (10-18)$$

$$x_{19}(k+1) = \max\{x_{17}(k+1) + 2 + 0.5, \epsilon\} \quad (10-19)$$

$$x_{20}(k+1) = \max\{x_{19}(k) + 2 + 1, \epsilon\} \quad (10-20)$$

식 (10)은  $x(k+1) = A \otimes x(k)$ 와 같은 일차 재귀식이 아니므로 2.5절에서 설명한 방법론을 이용하여 일차 재귀식을 구성하면, 52×52 행렬 A로 이루어진 일차(first-order) Max-Plus 대수식을 구할 수 있다.

### 3.2 환승 스케줄 작성 및 분석

위 Max-Plus 대수식을 이용하여 최대 환 평균( $\lambda$ )를 계산해보면 7.5분이 나온다. 만약 모든 노선이 7.5분이라는 동일한 운행간격으로 운행한다고 가정하면, 각 구간별 열차 출발 시각은 Table 5와 같이 된다. Table 5에서 보듯이  $k=0$ 일 때의 최초 출발시간을 기준으로 모든 구간에서 열차가 동일한 간격 시간으로 열차가 운행되며 이러한 열차 출발시각은 앞에서 서술한 주요 환승 제약을 모두 만족하게 된다. 또한 정리 2에 의해, 앞 절에서 서술한 환승 제약 조건을 만족하여 승객에게 환승 편의성을 제공하면서 동시에 지연이 발생하더라도 원래의 스케줄을 자연스럽게 회복할 수 있는 안정적인 스케줄의 작성을 위해서는 각 노선의 열차 간격은 7.5분 보다 커야 함을 알 수 있다.

물론 이러한 분석은 본 연구에서 가정한 노선 간 환승 조건과 환승역에서의 환승시간에 대한 가정에 기초한 것으로서, 실제 정확한 분석을 위해서는 전체 도시 철도 네트워크와 환승역에서의 환승시간 등을 이용하여 분석해야 한다. 이러한 분석은 본 연구에서 제시한 일련의 방법론을 그대로 사용할 수 있을 것이다. 또한 본 연구에서 가정한 노선 간 환승 제약을 어떻게 설정하느냐에 따라 적정 열차 간격시간이 변하므로, 환승 승객에 대한 실적 데이터를 기초로 환승 제약식을 설정할 필요가 있다.

### 4. 결론

본 연구에서는 Max-Plus 대수를 이용하여 환승을 고려한 주기적인 열차 스케줄 작성 방법과 시각표의 안정성 분석에 관해 서술하였고, 이를 이용하여 현재 운영되고 있는 수도권 도시철도의 혼잡 구간인 신도림역, 사당역, 시청역, 동대문역, 동대문운동장역을 중심으로 시각표 작성 및 분석의 가능성을 검토하였다. 도시철도 시각표의 완벽한 분석을 위해서는 모든 노선의 시종착역이 모두 포함된 전체 네트워크를 대상으로, 주요 환승역의 환승시간에 대한 실

Table 5. departure time of each segment in every period corresponding  $\lambda = 7.5$

k	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
0	0	2.5	-3	1.5	-2	0	6.5	-2	10.5	7
1	7.5	10	4.5	9	5.5	7.5	14	5.5	18	14.5
2	15	17.5	12	16.5	13	15	21.5	13	25.5	22
3	22.5	25	19.5	24	20.5	22.5	29	20.5	33	29.5
	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	x20
0	13	7	13	-7	6.5	11.5	11.5	6	14	9.5
1	20.5	14.5	20.5	0.5	14	19	19	13.5	21.5	17
2	28	22	28	8	21.5	26.5	26.5	21	29	24.5
3	35.5	29.5	35.5	15.5	29	34	34	28.5	36.5	32



제 값과 주요 노선간의 환승제약을 보다 면밀히 설계할 필요가 있다. 본 연구는 이러한 분석을 위한 Max-Plus 대수 체계 및 그것의 적용 방법에 대해 상세히 기술하였다.

이러한 Max-Plus 대수 분석 방법론은 철도 이용객들에게 보다 빠른 환승 시간을 제공해 줄 수 있으며, 동시에 지연에 따른 회복을 고려한 열차 간 운행 간격 및 열차 시각표를 생성함으로써, 지연에 대해 보다 안정적인 열차 시간표를 제공할 수 있을 것으로 기대된다. 이러한 방법론은 철도뿐만 아니라 스케줄에 따라 운영되고 전체 대중 교통 네트워크의 환승 체계를 분석하는데 있어서도 매우 유용한 도구가 될 것이다.

### 감사의 글

이 논문은 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2007-331-D00579).

### 참고 문헌

1. M. R. Bussieck, T. Winter and U. T. Zimmermann (1997), Discrete Optimization in public rail transport, *Mathematical Programming*, Vol. 79, pp. 415-444.
  2. Higgins, A., Kozan, E. and Ferreira, L. (1996), Optimal Scheduling of trains on a single line track, *Transportation Research Part B : Methodological*, Vol. 30, No. 2, pp. 147-161.
  3. 김재희, 오석문, 홍순흠(2005), 단선구간 열차 경합해소 문제를 위한 수리계획 모형의 기본설계, *한국철도학회논문집*, 제 8권 4호, pp.314-320.
  4. B. D. Schutter (1996), *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, Ph. D Thesis, Katholieke Universiteit Leuven.
  5. Misoo Chung (1995), *Eigenvalues and Eigenvectors in the Max-Plus Algebra*, Master Thesis, Applied Mathematics, Univ. of Colorado at Denver.
  6. R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin (1993), *Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, Newsersey.
  7. R. M. P. Goverde, M. A. Odijk (2002), Performance evaluation of network timetables using PETER, *Computers in Railways VIII*, WIT Press.
  8. R. M. P. Goverde, P. H. L. Bovy, G. J. Olsder (1998), The Max-Plus Algebra Approach to Transportation Problems, *Proc. of 8th WCTR*.
  9. R. M. P. Goverde (2007), Railway Timetable Stability Analysis Using Max-Plus System Theory, *Transportation Research Part B* 41. pp. 179-201.
  10. B. Heidergott, G. J. Olsder and J. V. D. Woude (2006), *Max Plus at Work - Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press.
  11. G-J. Olsder, K. Roos, R-J van Egmond (1999), An Efficient Algorithm for critical circuits and finite eigenvectors in the max-plus algebra, *Linear algebra and Applications* Vol. 295, pp. 231-240.
- 접수일(2008년 10월 22일), 수정일(2008년 11월 18일),  
게재확정일(2009년 4월 10일)