대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.1, 55-70. Mar. 2009

Lakatos의 증명과 반박 방법에 따른 기하 교수 · 학습 상황 분석 연구[1)]

박 경 미*

Lakatos 이론의 근저에 깔린 생각은 수학적 지식이 절대적이고 보편적이고 영원불변한 진리라기보다는 상대적이고 잠정적이며 오류가능성이 있다는 점이다. 수학사를 살펴보면 추측이 제기되어 일차적으로 증명되지만 그에 대한 반례가 나타나면서 증명이 개선되고 추측이 수정되는 예를 어렵지 않게 찾을 수 있다. 실제 이러한 Lakatos식의 증명과 반박의 과정은 수학자가 수학 지식을 창안할 때 뿐 아니라 학생들의 수학 교수 · 학습에 유용한 방법이 될 수 있다. 이에 본 연구는 Lakatos의 증명과 반박에 의한 교수 방법을 정리하고, 이에 대한 선행연구를 분석한 후, 중학교 수학 우수 학생들을 대상으로 하는 기하 교수 · 학습 상황에 Lakatos 이론을 적용하였다. 기하의 명제에서 패러독스를 유발시키는 원인을 찾고, 그 과정에서 발견한 성질을 추측으로 삼아 정당화하고 그 정당화가 기각되면서 새로이 증명되는 과정을 Lakatos 이론의 관점에서 분석하고 교육적 시사점을 도출하였다.

I. 서 론

흔히 수학과 과학은 시공을 초월한 절대 진리를 담고 있는 학문이며, 논쟁의 여지가 없이 확실한 지식들의 순차적인 축적 과정을 통해 발전해 온 것으로 간주된다. 그러나 역사를 살펴보면 수학과 과학은 옳다고 당연시되던 지식을 의심하고 비판하는 과정을 거쳐 변증법적으로 발전해 왔음을 알 수 있다. 진리를 판정하는 항구적이고 초역사적인 기준은 존재하지 않으며, 그 어떤 이론도 비판으로부터 자유롭지 못하다는 생각은 인문과학과 사회과학뿐 아니라 수학과 과학에도 통용된다. 우리가 소유하고 있는 지식은 어느 정도 옳으면서 동시에 어느 정도 오류가 내포된, 그래서 수정과 개선의 여지가 있는 것들이다. 더불어 기존 지식을 반박하는 반례가 등장해 그 한계를 인식하는 것이 지식 성장의 원동력이 되어왔다.

아인슈타인의 상대성 이론은 근대 자연과학의 기반인 뉴턴의 절대 시간과 절대 공간의 개념을 부정했고, 하이젠베르크의 불확정성 원리는 고전 물리학의 결정론적인 사고를 무너뜨렸다. 이 이론들은 뉴턴식의 고전 물리학이 모든 현상을 설명하는 것이 불가능하다는 생각을 확산시키는데 일조했다. 그러고 보면 언제 또 어떤 이론이 등장하여 우리가 현재 진리라고 믿고 있는 이론을 반박하게 될지 모른다. 결국 진리는 절대적이고 보편적이며 영원불변한 것이 아니라 잠정적이고 오류 가능성이 있는 일종의 '믿음'에 불과하다고 볼 수 있다.

수학사를 보면 고대 그리스 시대 이래 평행

* 홍익대학교(kpark@hongik.ac.kr)
1) 이 논문은 2008학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

선 공준(postulate)이 정리(theorem)라고 생각하여 이를 증명하고자 하는 시도들이 계속되었지만, 19세기 비유클리드 기하학의 출현으로 인해 이런 시도들은 모두 오류인 것으로 드러났다. 고대 그리스의 3대 작도 문제도 마찬가지이다. 19세기 추상대수학의 발전과 더불어 작도가 불가능함이 밝혀지기 전까지 수많은 학자들이 작도를 하려고 노력하였는데, 이는 결국 모두 오류라고 할 수 있다. 그러나 이런 오류는 틀렸기 때문에 가치가 없는 것이 아니다. 평행선 공준을 정리로 증명하려는 시도와 3대 작도 문제를 해결하려는 시도는 수학의 발전을 이끄는 견인차 역할을 하였다. 다시 말해 수학은 상당 부분 오류를 극복하는 과정을 통해 발전해 왔다고 볼 수 있다. 오류가 인간의 지적 성장을 방해하는 장애물이 아니라 지적 발전을 이끄는 원동력이 될 수 있다는 점은 오류를 교육 상황에 적극적으로 활용할 수 있음을 의미한다.

수리철학에서 오류주의라고 불리는 Lakatos의 증명과 반박에 의한 교수 방법은 과학에서 추측과 반박 방법을 제안한 Popper의 영향을 강하게 받았다. Popper는 1963년의 저서 <Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge>를 통해 추측과 반박이 과학적 지식 성장의 출발점이 된다고 보았고, Lakatos는 1976년의 저서 <Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery>를 통해 수학에서의 잠정적인 증명과 반박은 수학적 지식을 발견하는 토대가 된다고 주장했다. 그런 면에서 Lakatos의 이론은 과학에 대한 Popper 이론의 수학 버전이라고도 할 수 있다.

본고에서는 Lakatos의 증명과 반박에 따른 방법을 정리하고, 중학교 수학 우수 학생들의 기하 교수·학습 상황을 Lakatos의 관점에서 분석한 후 교육적 시사점을 이끌어 내고자 한다.

II. Lakatos의 증명과 반박에 의한 교수 방법

1. Lakatos 이론의 개요

Freudenthal은 수학이 결과론적인 기성수학으로 가르쳐지는 현실에 문제의식을 느끼고, 수학이 발생하던 역동적인 과정이 수학 수업에서 재연되어야 한다는 점을 강조하였다(Freudenthal, 1983). 수학을 '발생된 것'으로 파악하고 학습자가 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하려는 생각은 '역사발생적 원리'로 이론화되었으며, 이 아이디어는 Clairaut, Klein, Poincare. Freudenthal, Polya, Toeplitz 등의 수학자와 수학교육학자들이 공통적으로 제기하였다(우정호, 2000). Lakatos는 이러한 아이디어를 상당 부분 공유한다. Lakatos에 따르면 수학의 발전은 입증된 지식이 순차적으로 축적되어가는 선형적인 과정이 아니라 원시추측에서 시작하여 소박한 증명이 제기되고 이에 대한 반례가 등장하면서 반박되고, 반례에 대처하는 과정에서 증명이 개선되는 변증법적인 과정이다. Lakatos에게 있어서 증명이란 정당화의 수단이자 추측을 진리로 확인하는 도구가 아니라, 이후 반박과 비판이 용이하도록 추측을 분해하여 보조정리들로 나타내고 이를 통해 추측과 증명을 개선하고 새로운 개념들을 발견할 수 있도록 하는 진행형의 과정이다(Lakatos, 1976).

Lakatos의 증명과 반박에 의한 교수 방법은 대체적으로 네 단계로 진행된다. 1단계에서는 원시추측이 제기되고, 2단계에서는 증명이 시도되는데 이 때 사고실험을 통해 원시추측은 여러 개의 부분추측 혹은 보조정리들로 세분화된다. 3단계에서는 전면적 반례가 등장하고, 4단계에서는 증명 분석을 통해 2단계에서 제기된 부분추측 혹은 보조정리 중 반례를 유발시

킨 부분을 찾아 수정한다. 이러한 4단계를 거치면서 원시추측은 보다 세련되고 완성도가 높아진 추측으로 업그레이드 되며, 개선된 추측 역시 위와 같은 4단계를 다시 거치게 되면서 끊임없이 개선되는 순환 과정이 이루어진다.

2. Lakatos의 이론에서 반례에 대응하는 방법

Lakatos는 원시추측에 대한 반례가 등장했을 때 다음과 같은 방법으로 대처할 수 있다고 보았다(Lakatos, 1976; 강문봉, 1993). 첫째, 가장 간단한 대응 방법은 반례가 나타났으므로 추측을 기각하는 것이다. 둘째, 괴물배제법(monster-barring method)[2)]은 추측을 만족시키지 않는, 즉 괴물에 해당하는 예를 배제시킴으로써 반례를 거부하는 방법이다. 예를 들어 바이어슈트라스 함수와 같이 모든 점에서 연속이지만 미분불가능한 pathological function이 처음 등장하였을 때 이는 함수가 아닌 것으로 제외시키는 경우이다. 괴물배제법은 반례에 대처하는 초보적인 수준의 대응으로, 해당 개념(위의 예의 경우는 함수)의 외연이 축소된다는 단점이 있다.

셋째, 예외배제법(exception-barring method)은 추측을 만족시키지 않는 예를 그 개념의 범주에 속하는 것으로 여전히 인정하되 추측을 진술할 때 그것을 배제시킨다는 점을 명시함으로써 전략적으로 후퇴하는 방법이다. 예를 들어 괴물배제법에서는 바이어슈트라스 함수는 함수가 아니라고 규정하는 반면, 예외배제법에서는 바이어슈트라스 함수를 여전히 함수의 예로 취급하지만 '바이어슈트라스 함수를 제외한 함수'와 같은 부연조항을 추측에 삽입하게 된다. 예외배제법에서는 괴물배제법과 달리 개념의 외연이 축소되지는 않지만, 예외적인 경우들을 모두 열거하여 제외시키는 데 한계가 있을 수 있다.

넷째, 보조정리합체법(lemma-incorporation method)은 증명 분석을 통해 반례를 유발시킨 부분추측 혹은 보조정리를 찾고 수정하여 증명에 합체시키고 원시추측에 조건을 추가하는 방법이다. 평등수렴의 경우 Seidel은 Cauchy의 증명에 이미 전제되어 있는 평등수렴의 아이디어가 반례를 유발시킨 것이라고 보고 추측을 '(점별)수렴'에서 '평등수렴'으로 수정함으로써 개선하였다.

위의 방법 중 추측의 기각이나 괴물조정법은 활용도가 그리 높지 않고, 나머지 세 가지 방법에서 분석하는 대상이 무엇이며 그 결과는 어떻게 나타나는지 정리하면 <표 II-1>과 같다(Larsen & Zandieh, 2008).

3. 평등수렴 개념의 정립 과정

Lakatos의 저서에 소개된 증명과 반박 방법

<표 II-1> Lakatos의 이론에서 반례에 대처하는 방법

방법	분석의 대상	결과
괴물배제법	반례, 개념의 정의	개념의 재정의와 수정
예외배제법	반례, 추측	추측의 재진술
보조정리합체법	반례, 추측, 증명	추측의 재진술과 증명의 개선

2) Lakatos는 괴물배제법과 더불어 괴물조정법(monster-adjustment method)도 제시하였다. 반례는 왜곡된 관점으로 인해 도출된 것이므로 이 관점을 시정하여 반례를 예로 전환시키는 방법이다.

의 예 중에서 다면체에 대한 오일러의 정리는 광범위하게 알려져 있기 때문에, 상대적으로 덜 조명된 평등수렴의 예를 구체적으로 살펴보고자 한다.

1821년 Cauchy는 '연속함수열이 어떤 함수에 수렴할 때 그 극한함수는 연속'이라는 추측을 제기하고 이 추측을 증명하였으며, 이 증명은 1847년 오류가 발견될 때까지 참으로 인정되었다. 실제 이 정리가 증명되기 전인 1812년, 푸리에의 연구에 의해 연속함수열이 수렴하는 함수가 연속이 아닌, 즉 추측에 대한 반례가 존재하였다. 하지만 당시 함수, 극한, 연속성 등의 개념이 엄밀하게 정의되어 있지 않았기 때문에 푸리에 급수를 반례로 인식하지 못하였다. 결국 1847년 Seidel은 푸리에 급수가 Cauchy의 추측에 대한 전면적인 반례가 된다는 점을 발견하고는 추측을 개선하게 된다.

Cauchy의 원시추측을 좀 더 정확히 진술하면 다음과 같다.

> 집합 E 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 함수 f 에 점별수렴(pointwise convergence)하면 f는 E 위에서 연속이다.

그러나 f_n이 점별수렴하는 경우는 반례가 발생한다. 예를 들어 함수열 $<f_n>$을 $f_n(x)=x^n$으로 정의하면 $<f_n>$은 [0, 1] 위에서 다음 함수에 수렴하지만, 이 극한함수가 연속이 아님은 자명하다.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

수학자들이 수렴을 조건의 강도에 따라 두 가지로 구분하자는 생각을 처음부터 한 것은 아니다. Cauchy 원시추측에 대한 반례가 등장하고 그 증명을 분석하던 Seidel은 Cauchy의 증명의 이면에는 평등수렴의 아이디어가 전제되어 있음을 발견하였다. 그 결과 일반적인 수렴의 조건을 강화하여 평등수렴의 개념을 정의하고 원래의 수렴을 평등수렴과 구별하기 위해 점별수렴이라고 명명하였다. 그리고 그 결과 원시추측은 다음과 같이 개선된다.

> 집합 E 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 함수 f 에 평등수렴(uniform convergence)하면 f는 E 위에서 연속이다.

실제 점별수렴을 평등수렴으로 대체함에 따라 Cauchy의 추측은 부분적인 수정을 거치면서 존속할 수 있었으며, 이는 해석학의 중요한 정리로 다음 두 가지 측면에서 의의를 갖는다. 첫째, 연속함수공간은 점별수렴에 관해서는 닫혀있지 않으나 평등수렴에 대해서는 닫혀있다. 즉 연속함수공간이 모종의 수렴에 대해 닫혀있다는 성질을 말할 수 있게 되었다. 둘째, 위의 추측에서 c∈E에 대해 $\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x)$ 가 성립함으로써 두 개의 극한 과정이 서로 교환가능해진다. 이 정리를 통해 해석학에서 다루는 중요한 문제 중의 하나인 극한 과정의 교환가능성을 보장하게 되었다(정동명, 조승제, 2004).

4. Lakatos의 이론을 적용한 선행 연구

강문봉(1993)은 Lakatos의 이론을 국내에 소개한 선구자적인 연구를 통해 Lakatos의 수리철학에 대한 분석적 고찰을 바탕으로 수학교육론의 구성을 시도하였다. 그리고 Lakatos의 수리철학을 수업에 적용한 세 가지(삼각형의 중점연결 정리, 극대와 극소, 피타고라스의 수) 가상적인 교수·학습 상황을 제시하였다.

Larsen과 Zandieh(2008)는 Lakatos의 이론에 근거하여 대학교의 추상(현대)대수학 수업을 진

행하였다. 추상대수학의 기본적인 개념인 부분군을 다루는 수업에서 강사는 학생들에게 부분군(subgroup)이 되기 위한 최소 조건에 대해 질문을 한다. 학생들은 다음과 같은 소박한 원시추측을 제안한다.

군의 부분집합이 부분군이 될 필요충분조건은 부분집합이 군과 동일한 연산에 대해 닫혀있는 것이다

이에 대해 교사는 덧셈에 대해 군을 이루는 실수의 부분집합으로 양의 실수의 집합을 제시한다. 양의 실수의 집합은 덧셈에 대해 닫혀있지만 항등원과 역원을 포함하지 않기 때문에 군이 아니다. 이러한 반례의 등장에 따라 학생들은 괴물배제법과 예외배제법으로 이 예를 제외시키려고 하였고, 이어 원시추측을 세 단계로 구분하여 증명하였다. 증명의 첫 단계는 군을 이루는 집합의 원소들에 연산을 시행한 결과를 표로 나타내면 각 행에는 각 원소들이 한 번씩만 나오며, 군의 부분집합은 동일한 연산에 대해 닫혀 있으므로 부분집합의 원소들에 연산을 시행한 결과를 표로 나타내어도 각 원소들은 한 번씩만 나온다는 것이다. 그런데 무한집합에서는 이런 성질이 성립하지 않는다. 즉 이미 첫 단계에서 유한부분집합이라는 점을 가정하고 있는 것이며, 이것이 반례를 유발시킨 원인이 된다.

학생들은 결국 증명 분석을 통해 다음과 같이 원시추측을 개선한다.

군의 공집합이 아닌 유한부분집합이 부분군이 될 필요충분조건은 유한부분집합이 군과 동일한 연산에 대해 닫혀있는 것이다

위의 연구 이외에도 Lakatos의 증명과 반박 방법을 연구의 주제로 삼은 경우가 다수 존재한다. Zandie와 Rasmussen(2007)은 Lakatos의 증명과 반박 방법을 통해 수학 수업에서 정의가 형식화되는 과정을 연구하였으며, Lampert(1990)는 5학년 학생들의 수학 활동을 Lakatos의 관점에서 분석하였다. Reid(2002)는 초등학교 5학년 수업에서 수학적 추론에 초점을 맞추고, 일반적인 원리를 추측하고 이를 테스트한 후 이 원리를 받아들이면서 추가의 탐구를 하거나 원리를 거부하거나 혹은 수정 보완하는 패턴을 연구하였다. 또한 Nunokawa(1996)는 수학 문제해결론과 Lakatos 이론 사이의 관련성을 탐구하였다.

III. Lakatos의 증명과 반박을 이용한 중학교 수학 우수 학생들의 기하 교수 · 학습 상황 분석

1. 연구의 대상 및 과정

Lakatos의 증명과 반박 방법을 수학 수업에 적용하는 데에는 몇 가지 제한점이 따른다. 첫째, 수학자들이 추측을 내놓고 증명하고 반례가 등장하고 재증명하는 과정에서는 지식이 이미 존재하는 것이 아니라 형성 과정에 있지만, 수학 수업에서는 확립된 지식의 존재를 가정한다. 또한 수학 교과서와 교사는 전문가로서의 권위(authority)를 지니고 있기 때문에 수학사에 나타난 역동적인 증명과 반박의 과정을 찾아보기 어렵다. 둘째, 한국적 상황에서는 대부분의 학생들이 선행 학습을 하기 때문에 Lakatos의 증명과 반박 방법을 통해 발견하고자 하는 결과론적인 수학 지식을 피상적인 수준에서라도 기억하고 있으며, 따라서 의미있는 증명과 반박 과정을 기대하기 어렵다. 셋째, 한국 학생들은 수학 교수 · 학습 상황에서 주로 설명을 듣고 문제 푸는 것을 경험하기 때문에 토론 문화

에 익숙하지 않다. 그런 연유로 학생들 사이에 활발한 토론이 이루어지기 어렵다.

따라서 본 연구에서는 학생들이 수업이나 선행학습을 통해 접해보지 않은 내용이면서 학생들의 토론을 유발시키기에 용이한 주제나 문제를 제시할 필요가 있었고, 여러 주제와 문제들을 검토한 후 패러독스를 포함하는 기하 문제를 선택하였다. 학생들의 활발한 의견 개진과 토론은 다인수 학급 환경인 학교의 일반 수업에서는 일어나기 어렵기 때문에, 소규모 토론이 이루어질 수 있는 상황이 보장되어야 한다. 뿐만 아니라 Lakatos식의 증명과 반박 방법에서는 학생들의 적극적인 참여가 필수적이기 때문에 수학 우수 학생들을 대상으로 실험 대상을 선정할 필요가 있다. 이런 조건을 비교적 충실하게 만족시키는 실험 대상으로, 방학 중에 실시된 서울시 주관의 특별 프로그램에 참여하는 학생들을 선택하였다. 이 프로그램에 참여하는 학생들은 서울시의 각 중학교에서 1-2명씩 추천받은 수학과 과학 우수 학생들로, 그 중 자원자 9명[3]을 선정하고 연구자가 진행하는 수학 수업 후에 실험을 하였다.

학생들에게 '임의의 삼각형은 이등변삼각형이다'라는 증명이 담긴, <부록 1>을 배포하였다. 패러독스가 발생한 원인을 밝히고 그 과정에서 제기된 추측을 증명하는 토론 과정 전체를 녹취하여 분석하였다. 연구자가 문제를 제기한 후 학생들의 활발한 토론을 이끌어내기 위해 연구자의 개입을 최소화 하고자 하였으며, 연구자 외에 연구조원을 두어 학생들의 개별적인 대화를 기록하였다. 또한 증명과 반박에 따른 수업에 대한 학생들의 반응과 호응도를 알아보기 위해 수업의 소감을 적는 간단한 설문조사를 실시하였다.

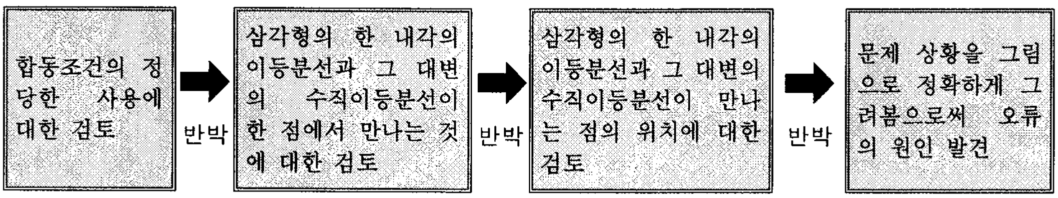
2. 패러독스의 원인을 발견하는 과정의 분석

학생들은 임의의 삼각형은 이등변삼각형이라는, 명백하게 거짓인 명제의 증명에 대해 큰 관심을 보였다. 증명 과정에 들어 있는 오류의 발견은 다음 네 단계를 통해 이루어졌다.

<부록 1>의 증명에서 삼각형의 합동조건 ASA, SAS, RHS가 순서대로 사용되었는데, 다음에서 보듯이 합동조건들의 사용이 정확한 것인지에 대한 의구심이 첫 단계에서 제기되었다.

> 학생(L): ... 트릭은 SAS 합동조건 아니에요? 예전에 두 변과 끼인각이 아니라 두 변과 다른 각이 되면서 합동이 아닌 삼각형이 되는 거에 낚였거든요.

학생(L)은 두 변과 그 끼인각이 아닌, 두 변과 제3의 각의 크기가 같은 삼각형 중 합동이



[그림 III-1] 패러독스의 원인을 발견하는 과정

3) 원래는 10명의 학생을 선정하였으나 그 중 한 명의 학생은 KMO를 준비하는 학원에서 유사한 문제를 본 적이 있다고 하여 제외시켰다.

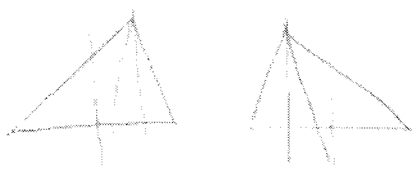
되지 않는 경우를 떠올리고는, 삼각형의 합동을 증명한 <부록 1>의 세 가지 경우 중에서 두 번째인 △OBE≡△OCE를 이끌어내는 과정이 오류의 원인이라고 주장했다. 그러나 학생들은 다시 증명 과정을 점검하고는 SAS 합동 뿐 아니라 ASA와 RHS의 합동조건들도 정당하게 사용되었으며, 증명에는 하자가 없다는 방향으로 의견이 모아졌다. 그러나 증명으로부터 거짓인 성질이 도출된 이상, 분명 오류를 포함하기 때문에 계속 오류의 원인을 찾아나갔다.

두 번째 단계에서는 삼각형의 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 반드시 만나는지의 여부에 대한 검토가 이루어졌다. 그렇지만 다음에서 보듯이 그리 길지 않은 토론을 통해 한 점에서 만나는 것이 맞다는 결론으로 이어졌다.

학생(J): ... 그러니까 그 두 선분이 꼭 한 점에서 만나라는 보장이 없잖아요. 두 직선은 일치하거나 평행하거나 한 점에서 만나지요. 맞죠? 근데 일치하려면, (각의)[4] 이등분선이 수직이등분선과 일치해야 하니까. [각의이등분선이 대변에 수직이 되도록 그림을 그려본다.] 아... 이등변삼각형이 벌써 되버리네.

연구자: 혹시 평행할 수도 있지 않을까?

학생(P): [각의 이등분선이 대변의 수직이등분선과 평행하도록 그림을 그린다.]
평행할 수는 없을 것 같아요. [삼각형을 가리키며] 여기 (삼각형의) 두 변의 길이가 같으면 일치하고 다르면 평행하게 그려지지 않는데요.



세 번째 단계에서는 삼각형의 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 만나는 점의 위치에 대한 검토가 이루어졌다.

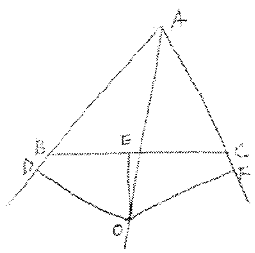
학생(A): ... 이 점 O가 꼭 삼각형의 내부에 있으라는 법이 없잖아요. 변 위에 있거나 바깥에 올 수도 있지 않을까요?.

학생(M): 변 위에 있는 거는 아까 일치하는 거에서 했잖아... 이등변삼각형이 되는 거... 그러니까 그건 괜찮은거 아니에요?

학생(A): 그럼 점은 내부에 있거나 외부에 있어야 하는데, ... 외부에 있지 않나요?

연구자: 그러면 삼각형의 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 주어진 그림과 다르게, 삼각형의 외부에서 만나도록 그려볼까요? 나를 보지 말고... 각자 여러분이 해보세요.

[학생들은 삼각형의 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 삼각형의 외부에서 만나도록 그림을 그리고, 내부에서 만나는 경우와 비교하면서 동일한 방식으로 꼭짓점에 알파벳을 부여했다.]



학생들은 토론을 거쳐 점 O가 삼각형의 외부에 존재하는 경우에도 내부에 존재하는 경우의 증명이 거의 그대로 적용됨을 알아냈다. 단, 다음 설명에서 보듯이 증명의 마지막 부분에서만 약간의 수정이 필요하게 된다.

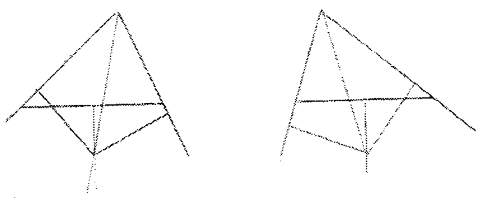
학생(K1): ... 그러니까 다 그대로 되고 $\overline{AB}$가

4) 학생들의 대화 중 ( ) 안의 단어나 구절은 연구자가 추가한 것이며, [ ]는 수업 상황에서의 행동을 묘사한다.

$\overline{AD}$ 더하기 $\overline{DB}$였는데, 이번에는 $\overline{AD}$ 빼기 $\overline{DB}$.. 다른 쪽도 마찬가지니까... 양쪽 모두 똑같은 거에서 똑같은걸 빼니까... 여기서도 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$는 같아져요.

이제 학생들은 의심할 수 있는 모든 측면들을 검토했으나 이상이 없음을 알았다. 그런데 점 O가 삼각형의 외부에 위치하는 경우를 그려보는 과정에서 그림에 대한 의구심이 생기게 되었다. 학생들 사이에 그림을 정확하게 다시 그려보자는 의견이 대두되면서 마지막 단계로 넘어가게 되었다.

학생(S): 아무래도 그림이 이상한 것 같아요.
연구자: 그래요? 선생님은 별로 이상해 보이지 않는데... 정 의심되면 한번 정확하게, 뭐 자나 각도기가 있으면, 그런 것을 써서 그려보세요.
[학생들은 자를 사용하여 신중하게 그림을 그려본다.]
학생(S): ... 자로 그려보니까 아까랑 다르게 수선이 한 번은 변과 만나고 한 번은 변과 바깥('변의 연장선'을 의미함)에서 만나요.
연구자: 다른 학생들은 어떤 결과가 나왔어요?
[다음과 같이 다양한 모양의 삼각형을 그리고 교점의 위치를 비교해본다.]



학생(C): 그런거 같아요. 이렇게 삼각형 모양을 바꾸면서 몇 개 해보니까 그래요. ... 삼각형의 왼쪽 변이 길 때는 변의 내부에서 만나고 (수선의 발이 변 위에 있음을 의미함) 오른쪽은 바깥에서 만나요 (수선의 발이 변의 연장선 위에 있음을 의미함). 반대로 오른쪽 변이 길 때는 거꾸로이고.

마지막 단계에서 학생들은 오류의 원인을 밝혀냈다. 여러 가지 모양의 삼각형을 그려본 학생들은 삼각형의 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 만나는 점에서 삼각형의 두 변에 수선을 내릴 때, 수선의 발 중 하나는 변 위에, 또 다른 하나는 변의 연장선 위에 있음을 알아냈다. 즉 학생들은 임의의 삼각형이 이등변삼각형이라는 패러독스의 원인은 증명과정에 있는 것이 아니라, 자연스럽게 보이기는 하지만 잘못 그려진 그림에서 연유했음을 이해하게 되었다. 뿐만 아니라 학생들은 몇 가지 삼각형을 그려봄으로써 부등변삼각형의 변의 길이의 대소에 따라 교점의 위치가 바뀐다는 사실까지 알아냈다.

3. 새로운 추측의 제기와 이에 대한 증명의 분석

학생들은 임의의 삼각형이 이등변삼각형이라는 패러독스의 원인을 발견한 것에서 한 걸음 더 나아가 다음 추측이 항상 성립하는지에 대해 탐구하기 시작했다.

원시추측: 삼각형의 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 만나는 점에서 삼각형의 두 변에 내린 수선의 발 중 하나는 변 위에 있고, 또 다른 하나는 변의 연장선 위에 있다.

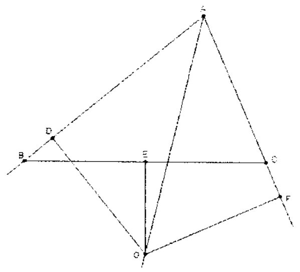
연구자는 이 추측이 항상 성립하는지 확증하기 위해서는 여러 가지 모양의 삼각형을 그려보고 이 추측이 성립하는 것을 확인하는 차원이 아닌, 연역적인 증명이 필요하다고 언급했다. 그러나 학생의 다음 발언에서 보듯이 중학

교 기하에서 주로 변과 각의 크기가 같거나, 합동과 닮음 등의 성질을 주로 증명하는 경험을 해왔기 때문에, 위의 추측을 증명하기 어렵다는 의견을 피력했다.

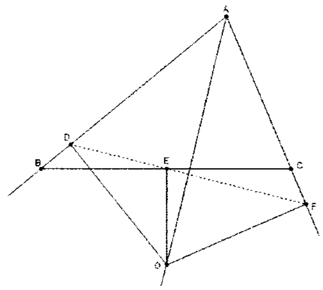
연구자: 이제 우리가 오류의 원인을 밝혔고 수선의 발이 각각 다른 곳에 위치한다는 성질도 알아냈어요. 그런데 혹시 이 성질을 증명할 수 있을까요? 아까 증명에서도 보았지만 그림을 그렸더니 그렇더라 하는 것은 수학에서 통하지 않아요.

학생(K2): ... 변이 같거나 각이 같거나 합동이나 그런 거는 증명하기 쉬운데... 이런 걸 증명하는 거는 어디서부터 시작해야 하는지도 모르겠고...

정확하게 그린 다음 그림을 보면 최초의 증명 과정에서 밝힌, $\overline{BD}$과 $\overline{CF}$의 길이가 같다는 점을 시각적으로 확인할 수 있다.



학생들은 백판에 그린 정확한 그림을 토대로 D와 E와 F가 한 직선 위에 있다는 주장을 제기하였다[5]. D, E, F가 일직선 위에 있다는 성질에 대한 정당화는 두 가지 방법으로 이루어졌으나 모두 토론 끝에 반박되었다.



D, E, F가 한 직선 위에 있다는 첫 번째 주장의 근거는 점 D와 F가 각각 꼭짓점 B와 C로부터 같은 거리에 있다는, 즉 $\overline{BD}=\overline{CF}$라는 점이다.

학생(P): ... 세 점이 한 직선 위에 있는 것처럼 보여요.

연구자: 앞의 증명에서도 보았지만 시각적 정보는 정확하지 않을 때도 있어요. 일직선상에 있는 것 같아 보이는 것으로는 안되고, 증명을 해야 됩니다. 그럼 D, E, F가 일직선상에 있다는 것을 어떻게 보일 수 있을까요?

원시 추측의 등장 → $\overline{BD}$과 $\overline{CF}$의 길이가 같다는 점으로부터 D, E, F가 일직선에 있음을 주장 → 반박 → 맞꼭지각의 크기가 같다는 사실로부터 D, E, F가 일직선에 있음을 주장 → 반박 → 구체화된 추측의 등장 → 반박과 증명의 과정 → 순회사변형의 성질을 이용하여 구체화된 추측의 증명

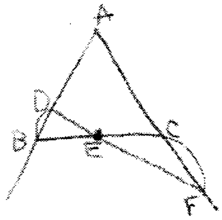
[그림 III-2] 원시추측에 대한 증명의 과정

5) D와 E와 F가 한 직선 위에 있다는 것은 원시추측으로부터 출발하여 내놓게 될 개선된 추측이다. 이 단계에서 학생들은 그런 사실을 명시적으로 인식하지 못한 채 직관적으로 직선으로 보인다는 점으로부터 이 성질을 탐구하기 시작했다.

학생(P): $\overline{BD}=\overline{CF}$이니까, 일직선상에 있지 않나요?

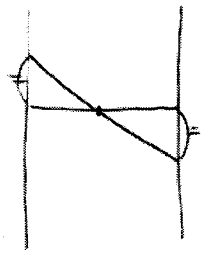
연구자: 반드시 그럴까요?

학생(J): 꼭 그럴 것 같지 않은데요.
[반례가 되는 다음 그림을 그린다.]



[$\overline{BD}$, $\overline{CF}$, 그리고 점 D, E, F를 가리키며]
거리가 같지 않아도 중점과 나머지 두 점을 이으면 직선이 되는데요.

학생(K1): [특수한 경우에 해당하는 다음 그림을 그린다.]



이렇게 두 변이 평행하다면 거리가 같은 점을 이으면... 직선이 되지만... 그러니까 될 때도 있고 아닐 때도 있고요.

$\overline{BD}$과 $\overline{CF}$의 길이가 같기 때문이라는 이유는 기각되었고, D, E, F가 한 직선 위에 있다는 두 번째 주장은 맞꼭지각이 같다는 점을 근거로 한다.

학생(L): ∠DEB와 ∠CEF가 맞꼭지각으로 같으니까... 그리고 $\overline{BC}$가 일직선이니까... 거기에 동일한 (각의) 크기 만큼 더하고 빼도 일직선이 되는거 아닐까요?

연구자: 이 의견에 대해서는 어떻게 생각해요?
$\overline{BC}$가 직선을 이루니까, 180°이고, 이 각에 동일한 크기의 각을 더하고 빼면, ... $\overline{DF}$가 이루는 각도 180°가 되어서 직선이 된다는 거죠.

학생(A): 맞는거 같아요. 맞꼭지각이 같다는 성질을 이용하면 간단히 되네요.

연구자: 그런데 맞꼭지각은 어떻게 만들어지나요?

학생(A): 두 직선이 만날 때 서로 마주보는 거... 어! 그럼 맞꼭지각은... 두 직선으로 이루어진 각을 말하는 거니까... 이미 직선이어야 하는 거 아닌가요? 우리는 직선인지 아닌지 아직 모르는 거지요?

결국 두 번째 주장도 토론 과정에서 기각되었다. 세 점이 일직선상에 있는지의 여부가 계속 논의되었고, 연구자는 세 점이 일직선상에 있다는 것이 원시추측을 증명하는 것과 어떤 관련이 있는지를 질문하였다. 이에 대해 한 학생이 다음과 같이 언급함으로써 세 점이 직선을 이룬다는 성질이 원시추측과 동일함을 지적하였다.

연구자: 우리는 지금 D, E, F가 한 직선 위에 있는지를 계속 논의하고 있는데, 원래 우리가 관심을 두었던 것은 수선의 발인 E와 F가 각각 변과 변의 연장선 위에 있다는 점이거든요. 일직선상에 있다는 것과 우리가 증명하려고 하는 것은 어떤 연관성이 있지요?

학생(P): 그거 두 개가 관련되는 거에요? ... 몰랐는데... 우리는 그냥 직선 같아 보여서 시작한건데.

학생(M): [$\overline{DF}$를 가리키며] 만약 여기가 직선이 되면... 삼각형의 두 변과 다르게 ('한 번은 변과, 또 한 번은 변의 연장선과'를 의미함) 만날 수밖에 없어요. 점 E를 지나면서 내부만 혹은 외부만 지날 수는 없잖아. 그러니까 일직선만 밝히면 모든 게 해결돼요.

이제 학생들이 제기한 추측은 좀 더 증명하

기 쉬운 다음과 같은 형태로 변화되었다.[6]

> 구체화된 추측: 삼각형의 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선이 만나는 점에서 삼각형의 두 변이나 그 연장선에 내린 수선의 발과 대변의 중점은 한 직선 위에 있다.

D, E, F가 한 직선 위에 있기 위한 조건은 $\angle DEO + \angle OEF = 180°$가 되는 것이다. 이를 증명하기 까지는 상당히 오랜 시간에 걸친 토론이 필요했다. 학생들이 개인적으로 증명을 시도한 후, 공동 토론을 통해 산출해 낸 증명은 <부록 2>와 같다. 이 증명을 하는데 핵심적인 역할을 하는 것은 세 개의 순회사변형(cyclic quadrilateral, 네 꼭짓점이 원주 위에 있는 사각형)이다. 첫 번째 순회사변형은 내대각의 합이 180°라는 성질을, 두 번째 순회사변형은 원주각이 같다는 사실을 이용하며, 여기까지는 순조롭게 진행되었다. 세 번째는 앞의 두 가지 경우와 달리 원에 내접하는 사각형의 대표적인 성질을 이용하여 증명이 되지 않기 때문에 학생들은 난관에 봉착했다. 이 단계에서는 연구자는 사고의 전환이 필요함을 언급했다. 예를 들어 두 직선이 한 점에서 만나는 것을 보이기 위해 역으로 한 직선 위에 어떤 점이 있고 그 점을 다른 직선이 지난다는 것을 보이는 것도 가능하다고 설명했다. 결국 학생들은 이런 간접적인 도움말을 통해 삼각형의 외접원을 그리고 삼각형의 한 변의 수직이등분선과 외접원이 만나는 점을 먼저 잡은 후, 그 점이 수직이등분선을 그은 변에 대한 대각의 이등분선 위에 있다는 것을 보이는 방식으로 세 번째 순회사변형을 증명했다. 이러한 증명을 완성하기까지 학생들은 여러 가지 추측을 제기하고 이에 대한 반례가 등장하여 기각되고 새롭게 추측과 증명을 시도하는 과정이 반복되었다.

IV. 결 론

Lakatos의 증명과 반박 방법의 관점에서 중학교 수학 우수 학생들의 기하 교수·학습 상황을 분석한 본 연구로부터 다음과 같은 세 가지 결론을 이끌어 낼 수 있다.

첫째, 소규모의 수학 우수 학생을 대상으로 하는 본 연구의 교수·학습 상황에서 Lakatos의 이론에서 제안한 증명과 반박 과정을 관찰할 수 있었다. 학생들은 패러독스가 발생한 원인을 찾는 과정에서 하나의 해석과 설명이 등장하고 이에 대한 반박이 제기되면서 새로운 해석과 설명이 나타나고 궁극적으로는 오류의 원인을 밝힐 수 있었다. 또한 이 과정에서 도출된 성질을 원시추측으로 삼고 이 추측에 대한 정당화 논리가 등장하고 이것이 반박되는 과정을 거치게 되면서 원시추측을 보다 구체화하였으며, 증명의 아이디어가 제기되고 반박되는 과정을 지속적으로 반복하면서 궁극적으로는 추측을 증명하게 되었다. Lakatos의 이론이 의도하는 바와 같이 추측에 대한 증명이 시도되면서 부분추측이나 보조정리로 분해되고 오류의 원인을 제공한 부분추측과 보조정리가 발견되어 증명이 개선되는 보조정리합체법은 본 연구의 실험을 통해 찾아볼 수 없었지만, 계속적으로 아이디어가 제기되고 반박되는 과정을 거치면서 아이디어가 세련화되고 완성도가 높아진다는 측면에서는 Lakatos의 이론과 부합된다

6) 심슨의 정리(Simson's theorem)에 따르면 삼각형의 외접원 위의 임의의 한 점에서 삼각형의 세 변 또는 그 연장선에 내린 수선의 발은 일직선 위에 있다. 위의 추측에서는 각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선의 교점이 삼각형의 외접원 위에 있다는 점을 명시하지는 않았지만, 그 점이 외접원 위에 있다는 점을 고려하면 위의 추측은 심슨의 정리의 특수한 경우라고 할 수 있다.

고 볼 수 있다.

둘째, 본 연구에서의 교수·학습 상황은 교사가 순차적으로 내용을 설명하고 학생들이 새로운 내용을 기존의 지식 체계에 접합시켜 가는 정적인 수업에 비해 역동적이고 학생들의 참여도가 높았다. 수업 후에 실시된 설문조사 결과 모든 학생들이 수업을 호의적으로 평가했으며 수업 만족도가 높았다. 한 학생은 설문조사지에 '단서를 찾고 실마리를 풀어가는게 마치 CSI를 보는 것과 같았다'라고 적어냄으로써 본 수업의 특성과 만족도를 표현했다. 또한 본 연구의 교수·학습 상황에서는 삼각형의 합동조건, 연역적 증명의 의미, 도형에 대한 시각적 표현이 갖는 한계, 호의 길이와 원주각의 크기의 관계, 원에 내접하는 사각형의 성질 등 다양한 기하의 성질들이 다루어졌다.

셋째, 토론 문화에 익숙하지 않은 학생들로부터 토론을 유도하는 것은 쉽지 않으므로 본 연구와 같이 패러독스가 포함된 주제와 문제를 제시하는 것은 토론을 활성화시키는데 도움이 될 수 있다. 연구자가 진행한 서울시 주관 특별 프로그램에서는 학생들이 수용자적 입장을 취하였으나, 그 프로그램 직후에 진행된 본 연구의 수업에서는 상당히 적극적인 태도로 토론에 임했다. 서울시 주관 특별 프로그램의 수업에서보다 토론이 용이하도록 소집단이 구성되었다는 점도 한 이유이지만, 다루는 주제와 문제의 성격에서도 기인한 것으로 보인다.

본 연구는 새로이 수학적 지식을 창안하는 수학자의 연구 과정 주로 찾아볼 수 있는 Lakatos의 증명과 반박 방법이 중등학교 수업에서도 적용될 수 있는지 그 가능성을 탐색하기 위한 기초연구의 성격을 띤다. 다인수 학급에서 진행되는 일반 학생 대상의 수업에서도 이런 역동적인 토론이 가능한지, 또 패러독스를 포함하지 않는 평이한 수학 내용에서도 증명과 반박을 유도할 수 있는지 등에 대한 연구가 후속되어야 할 것이다.

참고문헌

강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

이한구(2001). 추측과 논박. 서울: 민음사.

정동명·조승제(2004). 실해석학 개론. 서울: 경문사.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press, Cambridge.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29-63.

Larson, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 205-216.

Nunokawa, K. (1996). Applying Lakatos' theory to the theory of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 31*, 269-293.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Zandieh, M. & Rasmussen, C. (2007). A case study of defining: Creating a new mathematical reality. Mathematical Thinking and Learning. *Technical report.*

A Research on the Teaching and Learning of Geometry Based on the Lakatos Proofs and Refutation Method

Park, Kyung Mee (Hongik University)

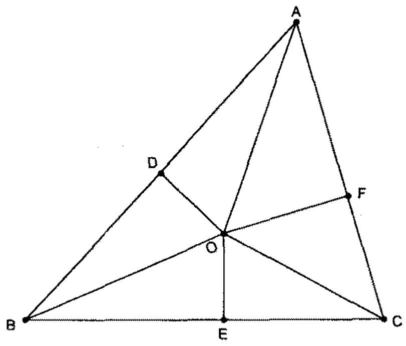
The purpose of this study is to implement Lakatos method in the teaching and learning of geometry for middle school students. In his landmark book <Proofs and Refutations>, Lakatos suggested the following instructional approach: an initial conjecture was produced, attempts were made to prove the conjecture, the proofs were repeatedly refuted by counterexamples, and finally more improved conjectures and refined proofs were suggested. In the study, students were selected from the high achieving students who participated in the special mathematics and science program offered by the city council of Seoul. The students were given a contradictory geometric proposition, and expected to find the cause of the fallacy. The students successfully identified the fallacy following the Lakatos method. In this process they also set up a primitive conjecture and this conjecture was justified by the proof and refutation method. Some implications were drawn from the result of the study.

* key words : Lakatos(라카토스), Proofs and Refutation Method(증명과 반박 방법), paradox (패러독스), justification(정당화)

논문접수 : 2009. 1. 29
논문수정 : 2009. 3. 2
심사완료 : 2009. 3. 11

<부록 1>

주장: 임의의 삼각형은 이등변삼각형이다



임의의 부등변삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 $\overline{BC}$의 수직이등분선이 만나는 점을 O라고 하자. 그리고 O에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.

△ADO와 △AFO에서 ∠DAO=∠FAO이고 ∠ADO=∠AFO=90°이므로, ∠AOD=∠AOF이다. 또한 $\overline{AO}$는 공통이므로, ASA 합동조건에 의해 △ADO≡△AFO이다. 따라서 $\overline{DO}=\overline{FO}$이며, $\overline{AD}=\overline{AF}$이다. ---①

한편 △OBE와 △OCE에서 $\overline{BE}=\overline{CE}$이고 $\overline{OE}$는 공통이며 ∠OEB=∠OEC=90°이므로 SAS 합동조건에 의해 △OBE≡△OCE이다. 따라서 $\overline{BO}=\overline{CO}$이다.

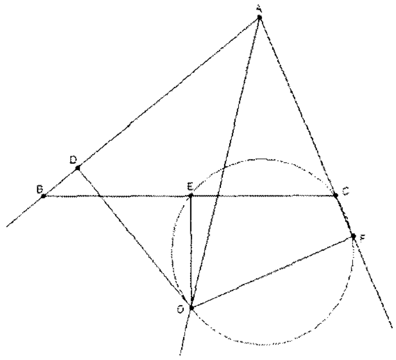
이제 △BOD와 △COF에서 ∠BDO=∠CFO=90°이고 $\overline{BO}=\overline{CO}$이며 $\overline{DO}=\overline{FO}$이므로 RHS 합동조건에 의해 △BOD≡△COF이다. 따라서 $\overline{BD}=\overline{CF}$이다. ---②

①과 ②에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

<부록 2>

D, E, F가 한 직선 위에 있음을, 즉 $\angle DEO + \angle OEF = 180°$임을 증명하기 위해 다음과 같이 세 개의 사각형이 각각 원에 내접함을 보여야 한다.

1) 점 E, O, F, C가 한 원 위에 있음

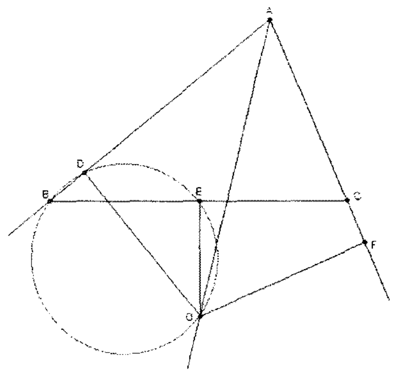


(증명)

원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.

$\angle OEC + \angle CFO = 90° + 90° = 180°$이므로 사각형 EOFC는 원에 내접한다.

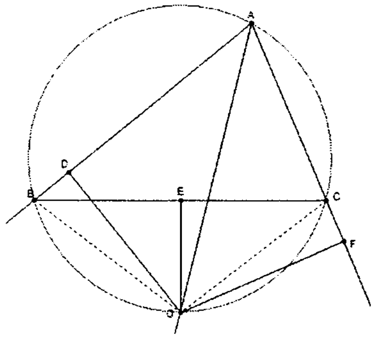
2) 사각형 DBOE가 원에 내접



(증명)

$\angle BDO = \angle BEO = 90°$으로 원주각이 같으므로 사각형 DBOE는 원에 내접한다.

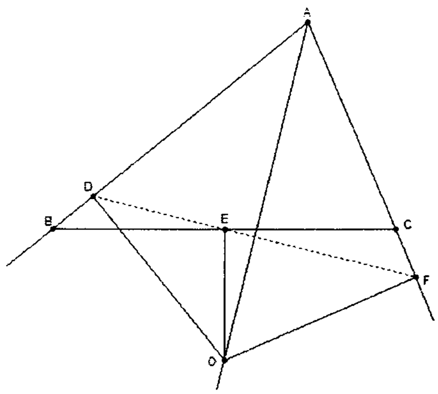
3) 점 A, B, O, C가 한 원 위에 있음



(증명)

삼각형 ABC의 외접원을 그리고, 점 E에서 그은 수선이 외접원과 만나는 점을 O라고 하자. 증명 과정에서 $\overline{BO}=\overline{CO}$이므로 $\overset{\frown}{BO}=\overset{\frown}{CO}$이고, 동일한 크기의 호에 대응되는 원주각의 크기가 같으므로, $\angle BAO = \angle CAO$이다. 즉 $\overline{AO}$는 $\angle A$의 이등분선이고, 점 O는 각의 이등분선 위에 있다. 다시 말해 한 내각의 이등분선과 그 대변의 수직이등분선의 교점은 외접원 위에 있다.

이제 $\angle DEO + \angle OEF = 180°$임을 보이기 위해 전제되어야 하는 성질들이 모두 증명되었다.



$\angle DEO + \angle OEF = 180° - \angle DBO + \angle OCF$ (D, B, O, E가 한 원 위에 있으므로)

$= 180° - \angle DBO + \angle OCF$ (E, O, F, C가 한 원 위에 있으므로)

$= 180° - \angle DBO + \angle ABO$ (A, B, O, C가 한 원 위에 있으므로)

$= 180°$