대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.1, 93-110. Mar. 2009

고등학생들의 정적분 개념 이해

신 보 미*

이 연구에서는 고등학생을 대상으로 정적분 개념의 이해와 관련되는 특징을 살펴보기 위해 선행연구와 국내외 교과서에서 다루고 있는 정적분의 개념 정의를 알아보았다. 이를 토대로 지필형 검사지를 개발하여 고등학교 2학년 학생 108명을 대상으로 검사를 실시한 다음 그 결과를 선행연구와 교과서 분석 결과에 비추어 기술하였다. 이 연구에서 학생들은 리만합의 극한이라는 정적분의 정의에 대한 최소 아이디어조차도 거의 기억해내지 못하였다. 또한 적지 않은 학생들이 정적분 개념이 넓이와 부정적분보다 무한급수와 관련된다고 생각하였다. 리만합의 극한으로 정적분을 정의하는 방식과 정적분을 무한급수와 관련시키는 맥락에 대한 반성적인 검토가 필요하다.

Ⅰ. 서 론

수학에서는 다른 어떤 분야의 지식보다도 초기 단계에 명시적인 정의가 도입된다. Freudenthal (2008: 26-27)에 따르면 이러한 정의를 단순히 제시하는 것은 수학적 지식을 가르치는 적당한 방법이 아니며, 그보다는 덜 형식적인 심상 (mental objects)을 통해 수학적 지식에 대한 개념 형성을 유도할 필요가 있다. Freudenthal이 말한 심상의 구성과 개념 획득은 Vinner & Dreyfus(1989)가 개념 이미지(concept image)와 개념 정의(concept definition)를 구분한 것과 유사하다. Rasslan & Tall(2002: 89)은 고등학교에서 많은 개념에 대한 정의가 소개되지만 학생들은 주어진 아이디어가 어떤 개념의 예인지 아닌지를 결정할 때 이러한 정의를 사용하지 않는다고 지적하였다. 대부분의 경우 학생들은 정신적인 표상과 같이 자신이 지니고 있는 개념 이미지에 비추어 개념을 이해한다. Moore (1994)는 개념을 이해한다는 의미에는 개념 정의를 아는 것, 올바른 개념 이미지를 갖는 것, 개념의 사용이 포함되어야 한다고 설명한 바 있다.

여러 선행 연구는 학생들이 정적분 개념의 이해에 어려움을 겪는다고 지적하였다. Bezuidenhout & Olivier(2000)는 미적분을 수강한 대학생들이 무한소를 이용하여 정적분 개념을 이해하고 있다고 하였다. Oberg(2000)에 따르면 대학생 5명을 대상으로 정적분 개념에 대한 면담 조사를 실시한 결과 정적분을 리만합의 극한이라고 성공적으로 설명한 학생은 한 학생에 불과하였다. 허학도(2006)는 예비 대학생 42명 중 11명만이 리만합의 극한인 정적분의 정의를 바르게 설명하였다고 하였다. 이상의 연구는 정적분 개념 정의에 대한 대학생들의 이해가 충분치 못함을 지적하고 있기는 하나 고등학생들의 정적분 개념에 대한 이해와 관련되는 특징은 구

* 광주광역시교육청(bomi0210@korea.kr)

체적으로 기술하고 있지 않다. 전미영(2003)과 정연준 · 강현영(2008)은 고등학생들이 곡선도형으로 둘러싸인 넓이를 무한소로 해석함을 설명하고 있기는 하나 교육과정 내에서 정적분과 관련하여 다루어지는 개념에 따른 학생들의 이해의 특징을 다루고 있지는 않다. Rasslan & Tall(2002)는 SMP교과서를 통해 정적분을 배운 고등학생들의 정적분에 대한 이해의 특징을 분석하였으나 SMP교과서와 제 7차 교육과정에서 정적분을 다루는 방식에 차이가 있을 수 있으므로 Rasslan & Tall(2002)의 연구 결과로부터 우리나라 고등학생들의 정적분 개념에 대한 이해를 유추하는 데는 충분치 못한 점이 있다.

이 연구는 제 7차 교육과정 내에서 정적분과 관련하여 다루어지는 개념에 따른 고등학생들의 이해의 특징을 살펴보는데 목적이 있다. 수학적인 개념의 지도에 있어 적절한 개념 이미지를 갖도록 하는 것이 중요한 문제임을 감안할 때, 고등학교 교육과정을 통해 처음 도입되는 정적분 개념에 대해 고등학생들이 지니고 있는 이해의 특징을 구체적으로 살펴보는 것은 이후 정적분의 개념 지도를 위한 교수학적 전략의 고안에 주요한 시사점을 줄 수 있다. 이를 위해 우선 선행연구와 국내외 교과서에서 다루고 있는 정적분의 개념 정의를 분석하여 지필형 검사지를 개발하였다. 이 검사지에는 제 7차 교육과정에서 정적분을 정의하기 앞서 도입되는 구분구적법에 대한 학생들의 이해를 살펴보기 위한 문항도 포함하였다. 검사는 **광역시 소재 4개 고등학교 2학년 학생 108명을 대상으로 진행하였으며, 학생들의 응답 결과를 선행연구와 국내외 교과서에서 다루고 있는 정적분의 개념 정의에 비추어 분석하였다.

II. 이론적 배경

1. 개념 정의와 개념 이미지

김미령(2004)에 따르면 개념 정의는 학문적, 사회적 의미의 말로 진술되어 공식적으로 사용되는 공적 차원의 개념 정의(formal concept definition)와 개인적 차원에서 재해석되고 수용된 사적 차원의 개념 정의(private concept definition)로 나눌 수 있다. 공적 차원의 개념 정의는 여러 사람과의 의사소통에서 모두 인정되어 받아들여 질 수 있으며 이를 바탕으로 연역적인 결과를 도출해 낼 수도 있고 정해진 어떤 것을 지명할 수도 있다. 이에 반해 사적 차원의 개념 정의는 공적 차원의 개념 정의를 재해석하여 개인의 인지 구조 내에 형성된 정의로서 개념 이미지보다는 언어적이면서 명시적인 특징을 지닌다.

Tall(2003)은 개념 이미지를 개념과 관련된 전체적인 인지 구조로서 모든 정신적인 그림과 그에 관련된 성질이나 과정이라고 설명하였다. 개념 이미지는 마음속에 있는 사적인 개념 정의와 결합된 비언어적인 것으로 시각적 표상, 심상, 인상 등과 관련된다. 이러한 개념 이미지는 물론 언어의 형태로 번역될 수 있지만 개념 명칭을 들었을 때 가장 먼저 떠오는 것은 언어의 형태라기보다는 그와 관련된 어떤 상인 개념 이미지이다. 사적인 개념 정의는 언어적이며 명시적인 특징을 지니기 때문에 누군가의 사적인 개념 정의를 알아보는 자연스러운 방법은 '함수란 무엇인가?', '접선이란 무엇인가?'와 같이 관련된 개념에 대해 직접 물어보는 것이다. 반면 개념 이미지는 비언어적이며 함축적이기 때문에 다른 사람의 개념 이미지를 알아보기 위해서는 간접적인 질문이 필요하다. 학생들 중에는 어떤 개념에 대해 정

확한 개념 정의를 내렸음에도 불구하고 이를 전혀 고려하지 않고 주어진 질문에 답하는 경우도 있다.

박선화(1993)에 따르면 수학교육에서 실제로 개념을 다루는데 사용되는 것은 공식적인 개념 정의라기보다는 개념 이미지이다. 공식적인 개념 정의가 개인에 의해 내면화되고 자신의 인지구조와 동화 및 조절을 거쳐 적절한 개념 이미지로 형성되지 않으면 얼마간의 시간이 흐른 후에 그 개념 정의는 잊혀지거나 일부분이 왜곡되어 부적절한 개념이미지가 되기 때문이다. 우광식(1995)에 따르면 개념을 학습한다는 것은 개념의 속성을 확인하는 것이며, 새로운 상황에서 예들을 일반화하고 예가 되는 것과 되지 않는 것을 구별할 수 있는 것을 의미한다. 따라서 어떤 개념을 학습한 후에 개개의 학생들은 개념에 의미를 부여하는 나름의 인지 구조인 개념 이미지를 형성하게 된다. 권성룡(2003)은 개념을 획득한다는 것은 개념 이미지를 형성하는 것이라고 지적하면서 개념이미지의 존재는 개념 이해의 필요조건이라고 설명하였다.

이상의 선행 연구에 따르면 학생들의 정적분 개념에 대한 이해의 특징은 학생들이 지닌 사적 차원의 개념 정의와 개념 이미지를 통해 살펴볼 수 있으며 이로부터 정적분의 개념 지도를 위한 주요한 시사점을 얻을 수 있을 것으로 보인다. 이 연구에서는 정적분에 대해 학생들이 지니고 있는 사적 차원의 개념 정의와 개념 이미지를 정적분 개념에 대한 학생들의 이해라고 하고, 정적분 개념과 관련된 공적 차원의 개념 정의를 간단하게 개념 정의라 칭하기로 한다.

2. 정적분의 개념 정의

대학수학에서 리만합의 극한으로 정의되는 정적분은 극한을 통해 넓이를 구하는 과정이 일반화된 개념이므로, 정적분 개념에 대한 이해는 극한을 이해하는 방식에 영향을 받는다 (Varberg, Purcell, & Rigdon, 2003). 정연준 · 강현영(2008)에 따르면 정적분 개념은 극한의 도달 가능성, 불가분량과 무한소 개념에 맞물려 발달하였다. '수열이 극한에 한없이 가까워짐으로써 그것에 도달 가능한가'를 고려하는 문제는 곡선 도형의 넓이를 무한히 작은 폭을 가진 직사각형들의 무한합인 불가분량으로 파악하려는 시도나 선분들의 무한합으로 생각하는 무한소 해석을 자극하였다(p.390-391).

곡선 도형의 넓이에 대한 불가분량 또는 무한소 해석은 18세기 이후 형식적인 극한 개념이 정의되면서 해결되었다. Grabiner (2005)에 따르면 Cauchy는 형식화된 극한 개념을 바탕으로 정적분을 불가분량의 합이나 무한소 곱의 합이 아니라 합의 극한으로 정의하였다. Cauchy는 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 주어진 구간 $[a, b]$ 을 n 등분하여 얻은 값 $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, $\cdots$, $b - x_{n-1}$ 을 통해 만들어진 $S = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})$ 는 분할의 횟수 n 이 충분히 크면 유일한 극한값을 가지게 됨을 증명하였으며 이를 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 으로 표기하였다. Cavalcante & Tocorov(2008)는 정적분의 개념 정의에 사용된 S 는 분할 횟수 n 에 대한 수열이기 때문에 정적분은 일종의 수열의 극한이라고 설명기도 하였다.

이상에 따르면 리만합의 극한이라는 정적분의 개념 정의는 곡선 도형의 넓이를 구하는 과정에서 대두된 불가분량과 무한소 해석을 형식적인 극한 개념에 기반하여 극복한 결과를 추상화한 수열의 극한으로 볼 수 있다.

2. 학교 수학에서 정적분의 개념 정의

가. 제 7차 교육과정

제 7차 교육과정에서는 구분구적법을 이해하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있도록 한 다음, 구분구적법을 통해 정적분을 도입하도록 한다(교육인적자원부, 2001). 정적분은 구분구적법의 아이디어를 일반화한 리만합의 극한[1]을 통해 다음과 같이 정의된다.

> 함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속일 때, a에서 b까지의 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$은 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ 이다(조태근 외, 2002: 133).

이상에 따르면 제 7차 교육과정의 정적분에 대한 개념 정의는 극한 개념을 바탕으로 한다고 볼 수 있다(정연준 · 강현영, 2008). 정적분을 리만합의 극한으로 정의한 이후에는 정적분과 원시함수의 관계가 미적분학의 기본 정리에 기초하여 다음과 같이 설명된다.

> 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면
> $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$
> 이다(우정호 외, 2002: 142).

정적분과 원시함수의 관계에 대한 설명 이후에는 미적분학의 기본정리에 대한 학생들의 이해를 깊게 하기 위한 교수학적 의도에서 '정적분과 무한급수'가 다루어진다. 신보미(2008)의 연구에 따르면 고등학교 수학Ⅱ 교과서 11종에서 모든 교과서가 정적분과 무한급수의 관계를 다루고 있으며 정적분을 통해 무한급수의 합을 간단히 구할 수 있다고 설명한다. 교과서에 따라서는 정적분을 무한급수의 다른 이름으로 설명한 경우도 있다(박배훈 외, 2002 : 155).

이상에 따르면 제 7차 교육과정에서 정적분은 리만합의 극한으로 정의된다. 이러한 개념 정의에 앞서 곡선 도형의 넓이를 구분구적법을 통해 구하는 방식이 소개되며, 개념 정의 이후에는 부정적분, 무한급수와의 관계가 설명된다. 제 7차 교육과정에서 정적분의 개념 정의는 넓이, 수열의 극한, 부정적분, 무한급수와 관련된다고 볼 수 있다.

나. 일본 교과서

일본 교육과정에서 정적분은 고등학교 2, 3학년을 대상으로 하는 수학Ⅱ와 수학Ⅲ에서 다루어진다[2]. 수학Ⅱ에서 정적분은 다음과 같이 원시함수에 대한 함수 값의 차로 정의된다.

一般に, a, bを与えられた定数として, **関数** $f(x)$ **の原始関数を** $F(x)$とするとき $F(b)-F(a)$を $f(x)$の aから bまでの **定積分** といい, 記号 $$\int_a^b f(x)\,dx$$ で表す。

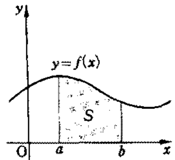
[그림 Ⅱ-1] 정적분의 정의(藤田 尤 外, 1999a: 136)

1) 고등학교 수학 Ⅱ에서 다루는 정적분은 구간 $[a, b]$을 n등분한 소구간 $[x_k, x_{k+1}]$의 양 끝점에 대한 함수값 $f(x_k)$에 의해 정의된다는 측면에서, 대학수학에서 정적분을 정의할 때 쓰이는 리만합의 극한과는 다소 차이가 있다. 그러나 주어진 함수가 연속함수인 경우에는 전자와 후자에 차이가 없으므로 여기서는 정적분 정의에 쓰인 우변의 식을 편의상 리만합의 극한이라고 부른다.

2) 우리나라 고등학교 1학년에 해당하는 10단계 수학은 일본의 기본 선택 과목인 수학Ⅰ에 해당하며, 우리나라 고등학교 2학년의 기본 선택 과목인 수학Ⅰ은 일본의 기본 선택 과목인 수학Ⅱ에, 우리나라 고등학교 3학년의 기본 선택 과목인 수학Ⅱ는 일본의 기본 선택 과목인 수학Ⅲ에 해당한다. 수학Ⅱ와 수학Ⅲ을 이수하는 경우에는 원칙적으로 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 수학Ⅲ의 순서를 따르도록 한다(나귀수 · 황혜정 · 임재훈, 2003: 421).

정적분과 넓이의 관계는 정적분을 정의한 이후 다음 단원에서 다루어진다. 연속함수 $y=f(x)$ 가 구간 $a \le x \le b$ 에서 $f(x) \ge 0$ 일 때, x축, 직선 $x=a$, 직선 $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S을 구하기 위해 우선 $y=f(x)$, x축, 직선 $x=a$, 직선 $x=t$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$ 라고 정의한다. 이로부터 함수 $y=S(x)$ 가 $y=f(x)$ 의 원시함수 중 하나임은 우리나라 교육과정에서와 같은 방법으로 설명된다. $y=S(x)$ 이 $y=f(x)$ 의 원시함수이므로 정적분의 정의에 의해 구하는 영역의 넓이 $S=S(b)$ 는 다음과 같이 정의된다.

同様に考えれば,
区間 $a \leqq x \leqq b$ において, $f(x) \geqq 0$ であるとき, 曲線 $y=f(x)$ と x軸および2直線 $x=a$, $x=b$ とで囲まれた図形の面積 S は次のようになる。



面積

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

[그림 II-2] 정적분과 넓이의 관계(藤田 尤 外, 1999a: 139)

일본 교과서에서 정적분과 구분구적법의 관계는 수학III에 와서야 설명된다. 우선 넓이를 구하는 새로운 방식으로서 구분구적법을 정의한다. 구분구적법에 의해서 구한 영역의 넓이와 정적분에 의해서 구한 영역의 넓이가 같음을 확인함으로써 정적분의 정의를 다음과 같이 음미한다.

上の公式において, 区間を[0, 1]とし, c_k を各小区間のすべての右端にとれば, 次の等式が得られる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

また, c_k を各小区間のすべての左端にとれば, 次の等式が得られる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

[그림 II-3] 구분구적법과 정적분(藤田 尤 外, 1999b: 144)

정적분과 구분구적법의 관계를 살핀 이후에는 제 7차 교육과정의 '정적분과 무한급수'에서 다루는 비슷한 성격의 문제가 제시된다. 그러나 일본 교과서에서는 제 7차 교육과정과는 달리 '무한급수'라는 용어 대신 '극한값'이라는 용어를 사용한다.

例題1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$ を求めよ。

解 $\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$

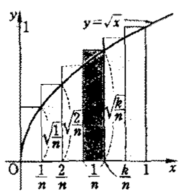
$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

であるから, $f(x)=\sqrt{x}$ とおけば,
求める極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots[答]$$



[그림 II-4] 정적분과 극한값(藤田 尤 外, 1999b: 144)

이상에 따르면 일본 교과서에서 정적분은 원시함수 값의 차로 정의된다. 이후 정적분과 넓이의 관계가 별도의 단원을 통해 설명되며, 1년 뒤의 상급과정에서 구분구적법과 정적분의 관계가 제시된다. 이후 특수한 형태의 수열의 극한값을 정적분을 통해 구해보는 문제가 다루어진다. 일본 교과서에서 정적분의 개념 정의는 원시함수인 부정적분, 넓이, 수열의 극한과 관련된다고 볼 수 있는데 이때 넓이에는 극한의 개념이 포함되어 있지 않다. 일본 교과서에서는 곡선 도형의 넓이를 초기에는 직관적으로 다루다가 상급 과정인 수학III에 가서야 구분구적법을 통해 설명한다.

곧, 정적분 개념은 수학III에 와서야 비로소 극한 개념과 관련된다. 일본 교과서에서는 제 7차 교육과정에서 다루어지는 정적분과 무한급수의 관계를 정적분과 극한값의 관계로 설명한다.

다. SMP 교과서

영국에서 16-18세 학생을 대상으로 사용되는 SMP교과서(SMP, 1997)에서 적분(integration)은 그래프 아래 영역의 넓이로 정의된다.

The symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ denotes the *precise* value of the area under the graph of f between $x=a$ and $x=b$.
It is known as the integral of y with respect to x over the interval from a to b.
The integral can be found *approximately* by various numerical methods.

[그림 Ⅱ-5] 정적분의 정의(SMP, 1999: 143)

이 정의에서 눈에 띄는 사항은 넓이를 정의할 때, '정확한(precise)'이라는 용어가 포함되며 이것이 이탤릭체로 강조되었다는 점이다. 이후 문제에도 '적분에 의해 표현되는 정확한(exact) 넓이를 계산하여라'와 같이 '정확한(exact)'이라는 용어가 항상 포함된다.

이 교과서는 넓이로 적분을 정의한 이후 '음의 넓이'라는 단원을 두어 x축 아래에 있는 영역의 넓이에 대해서 설명한다. 이후 함수 $y=f(x)$, x축, 직선 $x=a$, 직선 $x=b$로 둘러싸인 영역의 넓이 A가 $y=f(x)$의 원시함수임을 설명함으로써 미적분학의 기본정리가 성립함을 보인다. 미적분학의 기본 정리에 대해 지도한 이후에는 어떤 함수의 원시함수들은 그 차이가 상수만큼 생김을 설명함으로써 부정적분을 정의하고, 이에 대비되는 개념으로 적분을 통해 하나의 정해진 값을 얻도록 하는 넓이와 같은 적분을 정적분이라고 정의한다.

이상에 따르면 SMP교과서에서 정적분은 넓이로 정의된다. 이후 단원에서 정적분과 부정적분의 관계가 설명된다. 제 7차 교육과정에서 다루어지는 무한급수나 일본 교과서에서 언급되는 극한값과의 관계는 제시되지 않는다. SMP교과서에서 정적분의 개념 정의는 넓이, 부정적분과 관련된다. 이 교과서에서 정적분의 개념 정의와 넓이에는 극한의 개념이 포함되지 않는다. 곡선 도형의 넓이는 일본 교과서와 같이 직관적 수준에서 설명되는데 특이한 점은 넓이를 다룰 때 항상 '정확한(precise)'이라는 용어를 사용한다는 점이다. 이는 제 7차 교육과정, 일본교과서와 비교하여 고유한 특징이라고 볼 수 있다.

제 7차 교육과정, 일본 교과서, SMP교과서에서 다루는 정적분의 개념 정의에는 다소 차이가 있다. 제 7차 교육과정에서 정적분의 개념 정의는 넓이, 수열의 극한, 부정적분, 무한급수와 관련되는 반면 일본 교과서에서 정적분은 부정적분, 넓이, 수열의 극한, SMP교과서에서 정적분은 넓이, 부정적분과 관련된다. 제 7차 교육과정의 경우 정적분은 도입단계에서부터 극한과 관련되어 다루어지는 반면 일본 교과서는 도입 단계가 아닌 상급과정에서 정적분과 극한의 관계가 설명된다. SMP교과서에서 정적분과 극한 사이의 관계는 명시적으로 드러나지 않는다. 이는 학교 수학에서 정적분의 개념 정의와 극한 개념과의 관계가 필수적이지 않을 수도 있음을 시사한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 검사지 개발[3)]

앞 장에서 살펴본 바에 따르면 대학수학에서 정적분이 리만합의 극한으로 정의되는 것과는 달리 학교 수학에서 정적분은 나라마다 그 정의 방식에 차이가 있다. 이 연구에서는 제 7차 교육과정을 통해 정적분을 학습한 고등학생들이 지닌 이해의 특징을 살펴보는데 목적이 있

3) 조사 문항의 구체적인 내용은 <부록>을 참조하기 바란다.

으므로 정적분과 관련되는 개념을 넓이, 수열의 극한, 부정적분, 무한급수로 설정한 다음 각각의 개념과 관련된 조사 문항을 개발하였다. 여기서 넓이는 곡선 도형의 넓이를 구분구적법을 통해 구하는 맥락과 관련되므로 검사지에는 구분구적법에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보는 조사 문항도 포함하였다.

조사 문항 1은 곡선 도형의 넓이를 구하는 방식인 구분구적법에 대한 학생들의 이해를 알아보기 위해 작성된 것으로 Orton(1983:13-15)의 연구에서 활용된 과제 B3, B4, B6을 간략화한 것이다. 1의 (1)과 (2)는 1의 (3)에 대해 학생들이 응답하는데 다소간의 실마리가 될 수 있다. 1의 (4)는 구분구적법을 통해 구한 넓이를 학생들이 정확한 값으로 파악하는지 근사값으로 파악하는지를 알아보기 위한 것으로, Akkoç, Yesildere, & özmantar(2007)는 학생들이 구분구적법을 통해서 구한 결과가 넓이의 근사값이 아니고 정확한 결과 값임을 인식하여야 한다고 주장한 바 있다.

조사 문항 4와 5는 정적분에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보기 위한 문항이다. 문항 4는 Rasslan & Tall(2002)이 사용한 문항 6번을 발췌한 것이다. 조사 문항 1이후 조사 문항 4가 바로 제시되었을 때 학생들이 정적분을 대부분 넓이와 관련시켜 설명할 수 있음을 감안하여 조사 문항 1과 4사이에 조사 문항 2와 3을 추가하였다. 조사 문항 2는 정적분과 무한급수, 조사 문항 3은 정적분과 부정적분의 관계에 기초한 문항이다. 조사 문항 5를 통해서는 넓이, 수열의 극한, 무한급수, 부정적분 중 조사 문항 4에서 기술한 정적분의 정의와 가장 관련이 깊은 개념을 순서대로 나열하도록 함으로써 정적분에 대한 학생의 개념 이미지를 간접적으로 살펴볼 수 있다.

2. 연구 대상과 자료 수집

자료 수집을 위한 검사는 **광역시 소재 네 개의 고등학교에서 2학년 4개 학급 학생 108명을 대상으로 2009년 1월에 약 20여분에 걸쳐 진행하였다. 108명의 학생 중 20명은 과학고등학교 1개 학급 학생이며, 나머지 88명은 인문계고등학교 3개 학교에서 각각 자연계열 1개씩의 학급에 재학하고 있다[4]. Vinner(2003)와 이경화 · 신보미(2005)의 연구에 따르면 어떤 수학적 개념을 다룰 때 상위 집단 학생들은 일반 집단 학생들에 비해 공적 차원의 개념 정의에 보다 의존하는 경향이 있다. 이 연구에서는 지필 검사 결과를 분석함에 있어 두 집단의 정적분 개념에 대한 이해의 특징을 간접적으로 비교하여 살펴보기 위해 연구 대상에 과학고 학생 20명을 포함시켰다. 연구 대상은 모두 2008년 하반기에 수학II의 정적분과 정적분의 활용 단원을 모두 학습한 바 있다.

Ⅳ. 연구결과

1. 구분구적법에 대한 학생들의 이해

곡선 도형의 넓이를 구하는 구분구적법에 대한 학생들의 이해를 알아보기 위한 조사 문항 1의 (3), (4)에 대한 응답 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다. 1의 (3)에서는 곡선 도형의 넓이를 구하는 구분구적법을 식으로 표현한 경우뿐만 아니라 그 아이디어를 글로 기술한 것도 정답으로 간주하였다.

이상의 검사 결과에 따르면 1의 (3)에서 곡선 도형의 넓이를 직사각형 유한개의 넓이의 합으로 구한다고 답한 학생이 21명이었다. 이

4) 이하에서는 과학고등학교 학생 20명을 A그룹, 인문계고등학교 자연계열 학생 88명을 B그룹으로 칭한다.

들은 넓이 S를 간단한 도형으로 쪼개어 구할 수 있다고 생각하는 학생들로 곡선 도형의 넓이를 극한을 통해 새롭게 정의할 수 있다는 구분구적법의 핵심 아이디어를 적절히 이해하고 있지 못한 것으로 볼 수 있다. 신보미(2008)에 의하면 제 7차 교육과정에서 넓이 개념은 덮을 수 있는 단위 정사각형의 개수, 분할된 기본도형의 넓이의 합, 구분구적법을 통해서 구한 극한값으로 확장되는 바, 이러한 검사 결과는 구분구적법을 학습한 이후에도 적지 않은 학생이 넓이를 여전히 분할된 기본 도형의 넓이의 합으로 간주하고 있음을 보여준다.

연구 대상 중에서 36명은 주어진 구간을 무한 분할함으로써 작은 직사각형을 얻을 수 있으며 이 작은 직사각형의 넓이를 합하여 넓이 S를 구할 수 있다고 답하였다. 또한 3명은 구간을 무한 분할하면 만들어지는 직사각형이 선분과 같이 될 것이므로 구하는 넓이 S는 이러한 선분을 합하여 구할 수 있다고 하였다. 이들은 정연준 · 강현영(2008)이 지적한 바대로 구분구적법을 통해 구한 곡선 도형의 넓이를 각각 불가분량과 무한소량으로 해석하여 이해한 것으로 볼 수 있다. 이 연구에서는 선분의 합보다는 아주 작은 직사각형들의 넓이의 합으로 곡선 도형의 넓이를 해석하는 학생이 많았으며 이는 김현정(1990)과 전미영(2003)의 연구 결과와 일치하는 대목이다.

한편, 구분구적법에 의해 구한 넓이를 불가분량으로 해석한 학생들 모두(A그룹 7명, B그룹 29명)가 1의 (3)에서 구한 값은 정확한 값이 아니라 근사값이라고 답하였다. 학생들은 그 이유를 아주 작은 직사각형이라고 하더라도 구하고자 하는 곡선 도형을 정확하게 채울 수는 없기 때문이라고 하였다.

이는 극한의 도달 가능성과 관련된 오해를 뛰어 넘어 곡선 도형의 넓이를 근사값이 아닌 정확한 값으로 정당화하려는 인지적인 노력의 결과, 학생들이 구분구적법으로 구한 값을 무한히 작은 정사각형들의 넓이를 합한 것으로 간주하려는 경향이 있다고 설명한 정연준 · 강

<표 Ⅳ-1> 문항 1의 (3), (4)에 대한 응답 인원수 및 백분율

조사문항	응답 분류	A그룹	1의 (4)		B그룹	1의 (4)		
			정확	근사		정확	근사	무응답
1(3)	구분구적법(정답)	6(30%)	4	2	17(19%)	5	12	0
	직사각형 n개의 합	6(30%)	0	6	15(17%)	0	15	0
	불가분량(작은 직사각형의 합)	7(35%)	0	7	29(33%)	0	29	0
	무한소량(선분의 합)	1(5%)	1	0	2(2%)	0	2	0
	$\int_0^{12} x^2 dx = 576$	0	0	0	2(2%)	1	0	1
	무응답	0	0	0	23(27%)	0	9	14

근사값이다. 유한하게 등분하더라도 직사각형이 곡선에 의해 잘린 부분이 항상 존재한다. 무한히 등분하는 것은 이 잘려나간 부분의 크기를 점점 작아지게하여 넓이 S의 정확한 값에 근사시키는 과정이다

[그림 Ⅳ-1] 학생 검사지 1

현영(2008)의 주장과는 다소 거리가 있는 대목이다. 이 검사 결과에 따르면 곡선 도형의 넓이를 근사값이 아닌 정확한 값으로 파악한 학생은 구하는 넓이 S를 구분구적법을 통해서 구할 수 있다고 답한 학생들 중의 일부뿐으로 곡선 도형의 넓이를 근사값이 아닌 정확한 값으로 파악하는 바람직한 이해를 위해서는 구분구적법의 아이디어가 필수적임을 보여준다.

구분구적법의 아이디어를 바탕으로 곡선 도형의 넓이를 적절하게 정의한 23명의 학생 중에도 구한 값이 S의 근사값이라고 설명한 학생들은 14명이나 되었다. 이들이 곡선 도형의 넓이를 근사값이라고 설명한 이유에는 크게 두 가지가 있다. 7명은 구한 값이 극한값이기 때문이라고 설명하였으며 2명은 곡선 도형의 넓이라는 참값을 모르기 때문에 구분구적법을 통해 구한 넓이는 근사값일 수밖에 없다고 답하였다[5].

근사값 극한값이기 때문에 정확한 값이 아니다.

[그림 Ⅳ-2] 학생 검사지2

근사값.
이론은 맞으나 실제로 맞는지 확인해볼수 없기때문에
곡선이그리는 도형의 넓이를 정확히구하는것은 불가능하다고생각.

[그림 Ⅳ-3] 학생 검사지3

이는 구분구적법의 공식적인 개념 정의를 알고 있는 학생조차도 구분구적법을 통해 구한 값이 근사값이라고 이해하는 경우가 있음을 보여준다. 구한 값이 극한값이기 때문에 근사값이라고 답한 학생은 극한의 도달 가능성에 집착하고 있다고 볼 수 있다. 이러한 학생들은 구분구적법에 대한 적절한 이해를 위해서는 극한 개념에 대한 바람직한 이해가 선행되어야 함을 보여준다. 한편 곡선 도형의 넓이에 대한 참값을 모르기 때문에 구한 값이 근사값이라고 답한 학생들은 구분구적법의 공식적인 개념 정의를 알고 있으면서도 그 정의가 지닌 이면의 의미를 충분히 이해하지 못하였다고 볼 수 있다. 이 학생들은 구분구적법이 곡선 도형의 넓이를 새롭게 '정의'하는 맥락으로 자신들이 구한 값이 곡선 도형의 넓이에 대한 참값 자체임에도 불구하고 이를 인식하지 못하고 있다.

이상의 결과에 따르면 곡선 도형의 넓이를 유한개의 직사각형으로 쪼개어 구하는 학생은 그 넓이를 근사값으로만 다루는 경향이 있다. 때문에 곡선 도형의 넓이를 정확한 결과 값으로 설명하기 위해서는 극한 과정이 필수적이다. 그러나 극한을 통해 구한 넓이를 불가분량으로 해석한 학생들 역시 이를 근사값이라고 설명하는 모습을 보여주었다. 구분구적법의 아이디어를 활용한 학생들 중 일부만이 곡선 도형의 넓이를 정확한 결과 값으로 파악한 점에 비추어 볼 때, 곡선 도형의 넓이는 구분구적법을 통해서만 충분히 설명될 수 있다. 구분구적법의 아이디어를 이해하는 데는 극한 개념에 대한 이해가 필수적으로 요구되며, 구분구적법이 넓이를 새롭게 '정의'하는 맥락임을 의식적으로 지도할 필요가 있다. 신보미(2008)는 구분구적법이 극한 개념을 통해 넓이를 새롭게 정의하는 방법임을 지도하기 위해 이전 학교 급에서 다루어 오던 넓이의 개념을 재음미해 볼 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다고 지적한 바 있다. 이상의 논의에 따르면 곡선 도형의 넓이를 정확한 결과 값으로 적절히 지도하기 위해서는 극한 과정에 대한 고려, 불가분량에 대한 오해의 해결, 극한의 도달 가능성에 대한 바람직한 이해, 이전 학교 급에서 다루어오던

5) 이외 5명은 그렇게 생각하는 이유를 설명하지 않았다.

넓이 개념에 대한 재음미 등이 필요하다. 곡선 도형의 넓이 지도에 드는 이러한 교수학적 부담을 최소화하는 대안으로 SMP교과서는 곡선 도형의 넓이를 정의할 때 극한 과정을 다루지 않는 대신 '정확한(precise)'이라는 용어를 명기하는 교수학적 전략을 도입하였다고도 볼 수 있다.

2. 정적분에 대한 학생들의 이해

이 연구에서는 정적분에 대한 학생들의 이해를 학생들이 기술한 사적 차원의 개념 정의와 개념 이미지를 통해 살펴보기 위하여 조사 문항 4와 5를 제시하였다. 조사 문항 4에서는 학생들에게 정적분의 정의를 직접 써보도록 하였으며 그 응답 결과는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

위 검사 결과는 제 7차 교육과정을 통해 정적분의 개념 정의가 리만합의 극한으로 도입되지만 정적분에 대한 학생들의 이해는 이와 거의 관련되지 않음을 보여준다. 상위 집단인 A그룹 학생들의 경우 13명이 리만합의 극한으로 정적분의 정의를 시도하기는 하였으나 그 정확한 관계식을 기술한 학생은 2명에 불과하였다. B그룹 학생들은 88명중 8명만이 리만합의 극한이라는 정적분의 정의를 기술하려고 시도하였다. 이는 정적분에 대한 정의를 기술함에 있어 상위 집단인 A그룹은 일반 집단인 B그룹에 비해 공적 차원의 정의에 보다 기초하고 있음을 보여준다[6]. 그러나 상위 집단 학생들조차도 리만합의 극한에 대한 관계식을 거의 기술하지 못하였으며, 일반 학생의 경우 90%이상의 학생이 그 정의의 최소 아이디어에 대해서도 설명하지 못하였다. 이는 리만합의 극한이라는 정적분의 정의가 정적분 개념 자체를 처음 배우는 고등학생들에게 충분히 이해되는 데는 무리가 있음을 암시한다. 제 7차 교육과정에서 다루어지는 정적분 정의와 그 지도 방식에 대한 반성적인 검토가 필요하다고 볼 수 있다.

앞장에서 살펴보았듯이 학교 수학에서 정적분을 정의하는 방식에는 여러 형태가 존재할 수 있다. 리만합의 극한이라는 대학수학의 정의 방식에 최소한의 교수학적 변환을 가한 제 7차 교육과정의 정의 방식이 있을 수 있다. 일본 교과서에서와 같이 정적분을 원시함수 값의 차로 정의한 다음 넓이와의 관계를 설명하고 이후 상급단계에서 구분구적법과의 관계를 다루는 접근 방식이 있을 수 있다. SMP교과서에서와 같이 정적분을 넓이로 정의한 다음 이를 부정적분과 관련시킴으로써 미적분학의 기본정리를 지도하는 방식도 존재할 수 있다. 이 세 가지 접근 방식에서 극한의 개념은 제 7차 교육과정에서는 도입 초기부터 관련되는 반면 일

<표 Ⅳ-2> 문항 4에 대한 응답 인원수 및 백분율

조사문항	응답분류	A그룹	B그룹
4	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$ (정답)	2(10%)	6(7%)
	정답에서 수치계산 오류	11(55%)	2(2%)
	부정적분의 차($F(b)-F(a)$)	2(10%)	10(11%)
	곡선 도형의 넓이	5(25%)	42(48%)
	무응답	0	28(32%)

6) 이는 Vinner(2003)와 이경화 · 신보미(2005)의 연구 결과와 일치한다.

본 교과서에서 상급 단계에서, SMP교과서에서는 전혀 논의되지 않는다. 이외에도 학교 수학에서 정적분을 정의하는 방식에 대한 다양한 논의가 있을 수 있다.

88명중 47명의 학생(B그룹 42명, A그룹 5명)이 정적분의 정의를 곡선 도형의 넓이로 접근하였다. 이는 대학생을 대상으로 한 허학도(2006)의 연구에서 응답자 42명중 30명이 정적분을 넓이와 관련하여 설명한 것과 일치되는 결과인 반면, Rasslan & Tall(2002: 89)의 연구대상 41명중 4명만이 정적분을 넓이와 관련지어 설명한 것과는 대조를 이룬다. 정적분의 정의에 대해 이 연구에 참여한 학생들이 보여준 응답 결과와 Rasslan & Tall의 연구대상이 보여준 응답 결과에서 특기할 만한 사실은 각각의 연구 대상이 알고 있는 정적분의 정의와 학교 수학을 통해 배운 정적분의 개념 정의가 일관되지 않는다는 사실이다. 이 연구 대상인 학생들은 제 7차 교육과정을 통해 정적분의 개념 정의를 리만합의 극한으로 학습하였음에도 불구하고 대부분 정적분의 정의가 곡선 도형의 넓이라고 설명하였다. Rasslan & Tall의 연구대상은 SMP교과서를 통해 정적분의 개념 정의를 곡선 도형의 넓이로 학습하였음에도 정적분의 정의와 관련하여 의미있는 응답을 한 10명 중 6명이 정적분의 정의는 부정적분이라고 설명하였다. 학교 수학에서 다루어지는 정적분에 대한 공적 차원의 개념 정의와 실제 학생들이 알고 있는 사적 차원의 개념 정의 사이의 이러한 차이가 발생한 이유를 각각의 연구대상이 지니고 있을 것으로 예측되는 정적분의 개념 이미지와 관련하여 설명해 볼 수 있다.

Vinner(2003)에 따르면 개념의 명칭을 보거나 들었을 때, 가장 먼저 떠오는 것은 사적인 개념 정의가 아니라 개념 이미지이다. Rasslan & Tall(2002)에 따르면 학생들은 주어진 아이디어가 어떤 개념의 예인지 아닌지를 결정할 때 주로 개념 이미지를 사용한다. 즉, 개념 이미지는 개념과 관련하여 이를 실제 활용하는 맥락과 관련된다고 볼 수 있다. 제 7차 교육과정에서 정적분의 개념 정의인 리만합의 극한은 실제 활용의 맥락에서는 그리 필수적이지 않다. 오히려 정적분의 활용과 관련해서는 곡선 도형의 넓이가 정적분과 보다 빈번하게 관련된다. SMP교과서에서 정적분은 넓이로 정의되지만 이후 대부분의 활동은 미적분학의 기본 정리를 설명하기 전까지 다항함수의 정적분을 부정적분을 통해 다음과 같이 계산해보는 내용으로 진행된다(Rasslan & Tall, 2002)

A polynomial function of the form $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ has integral function $A(x) = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}dx^4$.

[그림 Ⅳ-4] 다항함수의 정적분(SMP, 1999: 153)

이상에 따르면 공적 차원의 개념 정의와 사적 차원의 개념 정의 사이의 일치 정도는 개념 이미지에 영향을 받을 가능성이 있으며 개념 이미지는 실제 개념을 활용하는 맥락을 통해 형성되는 경향이 있다고 볼 수 있다. 공적 차원의 개념 정의, 사적 차원의 개념 정의, 개념 이미지 사이의 관계에 대한 보다 심도 깊은 후속 연구가 필요하다.

다음은 교육과정 내에서 정적분과 관련하여 다루어지는 개념에 따른 학생들의 개념 이미지를 알아보기 위한 조사 문항 5의 응답 결과에 대해 기술한다. 앞서 살펴본 바에 따르면 제 7차 교육과정에서 정적분 개념은 넓이, 수열의 극한, 부정적분, 무한급수와 관련된다. 문항 5에서는 정적분과 관련된 이러한 개념 중 어느 것이 정적분과 보다 깊게 연관된다고 생각하는지를 학생들에게 질문하였으며 그 응답 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

이 검사 결과에 따르면 A그룹에서 11명, B그룹에서 40명이 정적분 개념은 넓이, 수열의 극한, 부정적분, 무한급수 중에서 넓이와 가장 관련이 깊다고 생각하였다. 이는 문항 4에서 대부분의 학생이 정적분의 정의를 곡선 도형의 넓이라고 응답한 결과와 일관된다. 다음으로 A그룹 학생 중에서 8명은 수열의 극한 또는 무한급수가 넓이보다 정적분 개념과 더욱 가깝다고 보았으며, B그룹 학생 중에서 24명은 부정적분이, 20명은 수열의 극한이나 무한급수가 넓이보다 정적분 개념과 보다 관련 깊다고 보았다.

상위 집단 학생들은 정적분과 수열의 극한의 관련성을 보다 깊게 파악한 반면, 부정적분과의 관계는 상대적으로 약하게 생각하였다. 일반 학생들은 정적분과 수열의 극한보다 정적분과 부정적분이 보다 깊게 관련된다고 생각하였다. 이는 상위 집단 학생들이 정적분의 개념 정의인 리만합의 극한을 일반 학생들보다 의미있게 간주하고 있음을 보여준다. 또한, 일반학생 중에는 정적분을 부정적분과 관련하여 이해하는 경우가 상위 집단 학생들에 비해 상대적으로 많음을 알 수 있다. 수열의 극한이 정적분의 공적인 개념 정의와 보다 관련되고 (Varberg et al, 2003), 부정적분이 정적분의 활

<표 Ⅳ-3> 문항 5에 대한 응답 인원수 및 백분율

조사문항	응답분류	A그룹	B그룹
5	넓이-무한급수-수열의 극한-부정적분	5(25%)	9(10%)
	넓이-무한급수-부정적분-수열의 극한	0	3(3%)
	넓이-부정적분-무한급수-수열의 극한	2(10%)	9(10%)
	넓이-부정적분-수열의 극한-무한급수	1(5%)	10(11%)
	넓이-수열의 극한-무한급수-부정적분	2(10%)	7(8%)
	넓이-수열의 극한-부정적분-무한급수	1(5%)	2(2%)
	수열의 극한-무한급수-넓이-부정적분	3(15%)	4(5%)
	수열의 극한-무한급수-부정적분-넓이	0	4(5%)
	수열의 극한-부정적분-무한급수-넓이	1(5%)	1(1%)
	수열의 극한-부정적분-넓이-무한급수	0	1(1%)
	무한급수-수열의 극한-부정적분-넓이	1(5%)	4(5%)
	무한급수-수열의 극한-넓이-부정적분	3(15%)	3(3%)
	무한급수-넓이-수열의 극한-부정적분	0	2(2%)
	무한급수-부정적분-수열의 극한-넓이	0	1(1%)
	부정적분-무한급수-수열의 극한-넓이	1(5%)	4(5%)
	부정적분-무한급수-넓이-수열의 극한	0	2(2%)
	부정적분-수열의 극한-무한급수-넓이	0	5(6%)
	부정적분-수열의 극한-넓이-무한급수	0	1(1%)
	부정적분-넓이-수열의 극한-무한급수	0	5(6%)
	부정적분-넓이-무한급수-수열의 극한	0	7(8%)
	무응답	0	4(5%)

용 맥락과 관련하여 정적분의 개념 이미지와 보다 관련된다고 볼 때(Rasslan & Tall, 2002), 상위 집단 학생 중에는 정적분의 공적인 개념 정의에 의존하는 학생이 일반학생에 비해 상대적으로 많으며, 일반 학생들 중에는 부정적분을 정적분의 개념이미지로 지니고 있는 학생이 상위 집단 학생에 비해 많다.

이상에 따르면 연구대상의 대부분인 47%는 넓이가 정적분과 가장 관련 깊은 개념이라고 답하였다. 또한 A그룹 학생 중에서 각각 20%는 정적분을 수열의 극한 또는 무한급수와 가장 관련이 깊다고 생각하였으며, 10%만이 정적분과 부정적분이 가장 관련성이 깊다고 보았다. 반면 B그룹에서는 각각 12%와 11%가 정적분을 수열의 극한 또는 무한급수와 가장 관련이 깊다고 응답하였으며, 28%는 정적분이 부정적분과 가장 관련이 깊다고 답하였다. 문항 5에 대한 응답 결과에 비추어 볼 때, 연구대상 중 상위집단 학생들의 정적분에 대한 개념 이미지는 넓이, 수열의 극한, 무한급수, 부정적분의 순서로 많으며, 일반 학생들의 정적분에 대한 개념이미지는 넓이, 부정적분, 수열의 극한, 무한급수의 순서로 많음을 알 수 있다.

한편, 무한급수가 정적분과 가장 관련이 깊다고 생각한 학생은 14명(A그룹 4명, B그룹 10명)으로 전체 연구 대상의 약 13%를 차지하였다. 정적분과 무한급수의 관계는 일본교과서나 SMP 교과서에서는 다루어지지 않으며 제 7차 교육과정에서만 언급되는 내용이다. 특히 일본교과서에서는 제 7차 교육과정에서 정적분과 무한급수의 관계를 설명하는 부분에서 다루어지는 예제[7]에서 구한 값을 '무한급수'의 합이 아닌 '극한값'으로 부르고 있다[8]. 넓이는 정적분 개념의 역사 발달 과정에서 주요하게 다루어져왔으며 (Varberg et al, 2003; 정연준 · 강현영, 2008), 제 7차 교육과정에서도 정적분 개념 도입의 주요한 실마리가 된다. 부정적분은 미적분학의 기본정리를 통해 정적분의 계산 맥락을 습득하는데 있어 주요한 개념이다. 넓이와 부정적분이 정적분 개념과 관련하여 차지하는 주요한 위치를 생각할 때, 정적분을 넓이나 부정적분보다 무한급수와 보다 깊게 관련시켜 생각하는 학생들이 정적분 개념을 적절하게 이해하였다고 평가할 수 있을지에 대해서는 의문스러운 점이 있다.

Ⅳ. 결 론

이 연구의 목적은 고등학생의 정적분 개념에 대한 이해의 특징을 살펴보는데 있다. 이를 위해 선행연구와 제 7차 교육과정, 일본 교과서, SMP 교과서에서 다루는 정적분의 개념 정의를 분석하여 조사 문항을 개발하였다. 교과서 분석 결과 정적분을 정의하는 방식에 다소간의 차이가 있음을 발견할 수 있었다. 검사는 고등학교 2학년 학생 108명을 대상으로 진행하였으며 그 결과는 선행연구와 교과서 분석 결과에 비추어 그 시사점을 기술하였다. 이를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 곡선 도형의 넓이를 근사값이 아닌 정확한 값으로 적절히 이해하는데 구분구적법의 아이디어를 제대로 이해하는 것이 필수적이다. 선행연구와 달리 이 연구에 참여한 학생들은 정적분을 불가분량으로 해석하면서도 곡선 도형의 넓이는 정확한 값이 아니라 구하고자 하는 값의 근사값이라고 설명하였다. 곡선 도형

7) [그림 II-4]를 참조하기 바란다.
8) 부분합의 극한인 무한급수와 리만합의 극한인 정적분은 모두 일종의 수열의 극한으로 볼 수 있지만, 이로부터 정적분이 무한급수와 밀접한 관련이 있는 것으로 간주하는 것에는 재론의 여지가 있다(신보미, 2008).

의 넓이를 정확한 값으로 바르게 이해한 학생은 구분구적법의 아이디어를 이해하고 있는 학생 중 일부뿐이었다.

둘째, 구분구적법의 아이디어를 바탕으로 곡선 도형의 넓이를 설명할 수 있는 학생들 중에도 곡선 도형의 넓이는 근사값이라고 응답한 학생이 있었다. 이들 검사 결과는 구분구적법의 아이디어를 알고 있는 학생들이라고 하더라도 곡선 도형의 넓이를 근사값이 아닌 정확한 값으로 이해하기 위해서는 극한 개념에 대한 충분한 이해와 구분구적법을 통해 넓이를 새롭게 '정의'하는 맥락에 대한 명시적인 접근이 전제되어야 함을 보여주었다.

셋째, 제 7차 교육과정에서 정적분의 개념 정의는 리만합의 극한이지만 연구대상 대부분은 정적분의 정의가 넓이라고 응답하였다. 개념의 명칭이 제기되었을 때, 개념 정의보다는 활용의 맥락과 보다 관련되는 개념 이미지가 떠오른다는 Vinner(2003)의 견해에 비추어 볼 때, 이러한 현상은 정적분이 곡선 도형의 넓이를 구하는 과정에서 주로 활용되기 때문으로 설명할 수 있다. 또한 연구대상 중 상위집단 학생들은 정적분이 넓이, 수열의 극한, 무한급수, 부정적분의 순서로 깊게 관련된다고 보았으며, 일반 학생들은 넓이, 부정적분, 수열의 극한, 무한급수의 순서로 정적분과 관련된다고 설명하였다.

넷째, 연구대상 중에는 정적분이 넓이나 부정적분보다 무한급수와 더 관련이 깊다고 생각하는 학생이 적지 않았다. 넓이와 부정적분이 정적분의 개념 정의와 관련하여 지니는 위치를 고려할 때 정적분과 무한급수의 관계를 정적분과 넓이, 정적분과 부정적분의 관계보다 우선시 하는 학생들의 이해수준의 적절성에 대해 생각해 볼 필요가 있다.

이상의 연구 결과는 **광역시 소재 자연계열 고등학생 108명을 대상으로 한 것으로 이를 전체 고등학생들의 정적분 개념 이해의 특징으로 일반화하는 데는 한계가 있다. 그러나 이 연구는 교육과정 내에서 정적분과 관련하여 다루어지는 개념에 따른 고등학생들의 이해의 일면을 기술함으로써 이후 정적분의 개념 지도를 위한 교수학적 전략의 고안을 위한 후속 연구 등에 기여할 수 있다.

참고문헌

교육인적자원부(2001). **고등학교 교육과정 해설-수학.** 서울 : (주)대한교과서.

권성룡(2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. **학교수학, 5**(2), 259-273.

김미령(2004). **초등수학에서 학생이 갖고 있는 개념 이미지 유형 분석.** 서울대학교대학원 석사학위 논문.

나귀수 · 황혜정 · 임재훈(2003). 수학과 교육과정에서의 내용 연구. **수학교육학연구, 13**(3), 403-428.

김현정(1990). **무한 개념의 수학 교육적 고찰.** 서울대학교대학원 석사학위 논문.

박배훈 외(2002). **고등학교 수학Ⅱ.** 서울 : 법문사.

박선화(1993). 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 3**(1), 185-194.

우광식(1995). 문제해결을 통한 개념과 절차 지도, **청람수학교육, 5**, 87-102.

우정호 외(2002). **고등학교 수학 Ⅱ.** 서울 : (주)대한교과서.

이경화 · 신보미(2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. **수학교육학연구, 15**(1), 39-56.

신보미(2008). 구분구적법과 정적분의 개념 분

석. **한국학교수학회논문집, 11**(3), 421-438.
전미영(2003). **고등학교 학생과 수학교사의 무한 개념 이해에 관한 연구.** 고려대학교대학원 석사학위 논문.
정연준 · 강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰. **학교수학, 10**(3), 375-399.
조태근 외(2002). **고등학교 수학 Ⅱ.** 서울 : (주)금성출판사.
허학도(2006). **직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.
藤田 外(1999a). **高等學校 數學 Ⅱ.** 東京: 東京書籍.
藤田 外(1999b). **高等學校 數學 Ⅲ.** 東京: 東京書籍.
Akkoç H., Yesildere, S., & özmantar, F. (2007). Prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of definite integral: the problem of limit process. *Proceddings of the Roceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 7-12. Great Britain; British Society for Research into Learning Mathematics.
Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000). Student's Conception of the Integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education, 2,* 73-80.
Cavalcante, R., & Todorov, D. T. (2008). A Lost Theorem: Definite Integrals in Asymptotic Setting. *The American Mathematical Monthly, 2008, January,* 1-13.
Foley, M. E. F. (1992). *Assessment of higher-order thinking in mathematics: The definite Integral.* PhD thesis, Texas A&M University.
Freudenthal, H. (2008). **수학교육론.** (우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화 역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).
Grabiner, J. (2005). The Origins of Cauch's Rigorous Calculus, Dover Publication Inc. USA: New York.
Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249-266.
Oberg, T. (2000). *An investigation of undergraduate calculus student's conceptual understanding of the definite integral.* Doctoral Dissertation, The University of Montana.
Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics 14,* 1-18.
Resslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education, 4,* 89-96.
SMP. (2003). *Pure Mathematics.* UK: Cambridge University Press.
Tall, D. (2003). **고등수학적 사고.** (류희찬 · 조완영 · 김인수, 역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1991년 출판)
Varberg, D., Purcell, J. E., & Rigdon, E. S. (2003). *Calculus.* NY: Prentice Hall.
Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

High School Students' Understanding of Definite Integral

Shin, Bo Mi (Gwangju Metropolitan Office of Education)

This paper provides an analysis of a survey on high school students' understanding of definite integral. The purposes of this survey were to identify high school students' private concept definitiones and concept images on definite integral. Definitions and images, as well as the relation between them of the definite integral concept, were examined in 108 high school students. A questionnaire was designed to explore the cognitive schemes for the definite integral concept that evoked by the students. The students' individual answers were collected through written environment. Four types of the private concept definitiones and concept images were identified in the analysis.

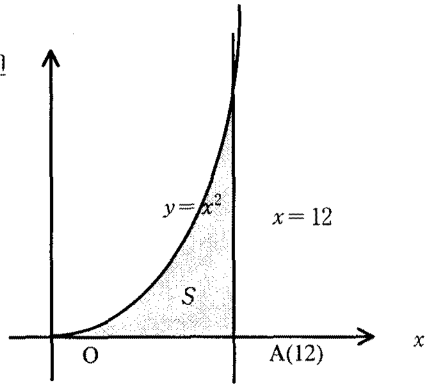
* key words : definite integral(정적분), concept definition(개념 정의), concept image(개념 이미지)

논문접수 : 2009. 1. 31
논문수정 : 2009. 3. 5
심사완료 : 2009. 3. 12

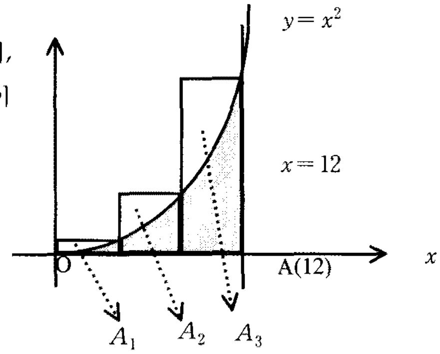
<부록> 검사지

다음 물음에 답하고 그렇게 생각한 이유를 가능한 자세하게 설명하여라.

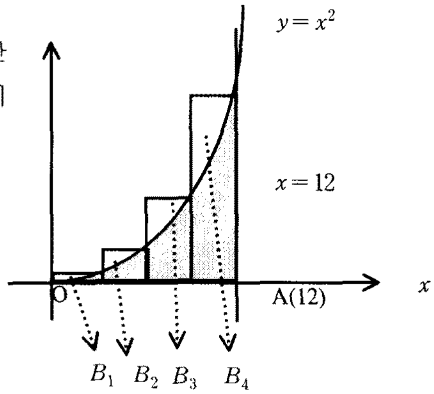
1. 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=12$로 둘러싸인 영역의 넓이 S를 구하고자 한다.



(1) 그림과 같이 선분 OA 를 3등분하였을 때, 만들어지는 직사각형 A_1, A_2, A_3의 넓이의 합을 구하여라.



(2) 그림과 같이 선분 OA 를 4등분하였을 때, 만들어지는 직사각형 B_1, B_2, B_3, B_4의 넓이의 합을 구하여라.



(3) 위와 같이 선분 OA 를 등분하여 만들어지는 직사각형들의 넓이를 합하여 넓이 S를 구하는 방법을 설명해 보아라.

(4) (3)에서 구한 값은 넓이 S의 정확한 값인가? 근사값인가? 그렇게 생각하는 이유는 무엇인가?

2. 정적분을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} 1\mathit{overn}^5(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)$의 값을 구하여라.

3. $\int (x^2+2x)\,dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$ 을 이용하여 정적분 $\int_0^2 (x^2+2x)\,dx$ 의 값을 구하여라.

4. 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 의 정의를 써보아라.

5. 다음 중 정적분의 정의와 가장 관련 깊다고 생각되는 것부터 순서대로 나열하여라.

Ⅰ. 넓이

Ⅱ. 수열의 극한

Ⅲ. 무한급수

Ⅳ. 부정적분