

# Circle Criterion을 이용한 FLC의 안정도에 대한 고찰

## Consideration to the Stability of FLC using The Circle Criterion

이 경 응, 최 한 수\*  
(Kyoungwoong Lee and Hansoo Choi)

**Abstract:** Most of FLC received input data from error  $e$  and change-of-error  $e'$  with no relation with system complexity. Basic scheme follows typical PD and PI or PID Controller and that has been developed through fixed MF. In this paper, We studied the relationship between MF and system response and system response through changing Fuzzy variable of consequence MF and propose the simple FLC using this relationship. The response of FLC is changed according to the width of Fuzzy variable of consequence MF. As changing the Fuzzy variable of consequence MF shows various nonlinear characteristic, we studied the relation between response and MF using analytical method. We designed the effective FLC using three-variable MF and nine rules and took simulation for verification. In this study, we propose the method to design system with FLC in stability point which is an impotent characteristic of designing system. The circle criterion which is adapted to analysis the nonlinear system is put to use for proposed method. Since SISO FLC has a time-invariant and odd characteristic we can use the critical point not disk which is generally used to determine the stability in the circle criterion, to determine the stability. Using this, we can get the maximum critical point plot of SISO FLC with changing the consequence fuzzy variables. The predetermined critical point plot of FLC can be used to decide the region of the system to be stable. This method is effectively used to design the SISO FLC.

**Keywords:** fuzzy logic control, describing function, stability

### I. 서론

퍼지논리제어기(FLC) 기술은 많은 산업현장에서 효과적으로 응용되었으며 전통적인 제어기의 성능을 개선하였으나 FLC의 비선형성으로 인하여 성능 분석이 어렵다[1,2]. 선형 시스템의 성능해석은 비선형 시스템에 비하여 다양한 이론이 발표 되었으며 그 효과가 다양한 연구를 통하여 증명되었다. FLC에 대한 성능분석은 비선형성으로 인하여 시행착오법이나 시뮬레이션을 통한 분석을 시행하고 있으며 또한 FLC의 설계는 전문가의 지식에 의존하고 있다.

안정성은 제어기 설계에서 가장 우선 요구되어지는 특성으로 FLC의 안정성에 대한 해석은 비선형 시스템의 선형화를 통한 안정성 해석[3,4], Popov's hyperstability theory[5,6], Lyapunov's direct method[7,8], the circle criterion[8,9], the harmonic balance method[2,9], the describing function method[10,11], the passivity approach[12] 등 다양한 연구가 이루어졌다.

Ying, Silver와 Buckley에 의하여 PID형 퍼지제어기에 대한 괄목할 만한 연구가 이루어졌으며[13,14], Baogang Hu, Georage K. I. Mann와 Raymond G Gosine은 FLC에 대해 해석적 방법을 통하여 FLC의 비선형성 해석에 LAI (Linearity Approximation Index)와 NVI (Nonlinearity Variation Index) 이용하였으며 체계적인 설계방법을 제시하고 있다[15,16]. Šijak Tomislav, Sejid Tešnjak, Sejid와 Kuljača Ognjen은 Describing Function을 이용한 FLC의 안정성 해석에 대해 연구하였다[17].

시스템 설계에 있어 안정도는 중요한 특성이며 안정성이 확보되지 않으면 아무리 효과적인 시스템이라도 사용할 수 없을 것이다. 일반적으로 FLC 설계에서 있어 퍼지 변수 크

기는 시뮬레이션이나 시행착오를 통하여 결정 한다. 따라서 설계 후 다양한 안정도 판별법을 통하여 안정도 특성을 검토하게 된다. 본 연구에서는 FLC의 후건부 퍼지변수의 크기 변화에 따른 안정성 해석을 위하여 비선형 시스템의 안정성 해석 방법인 circle criterion을 이용하여 FLC가 안정하기 위한 후건부 퍼지변수의 범위를 제시할 수 있는 방법에 대해 제시하고자 한다. 이를 통하여 FLC의 설계단계에서 시스템이 안정할 수 있는 영역 내에서 퍼지변수를 선택하여 시스템 설계를 효과적으로 할 수 있을 것이다.

### II. FLC의 구조

본 연구에서는 FLC를 위하여 SISO 만다니형 3개의 퍼지 변수로 이루어진 전건부와 후건부 멤버십 함수를 사용하였으며 식 (1)과 같이 3개의 Rule base를 정의하였다. 그림 1에서 FLC의 입력  $\hat{e}$  은 식 (2)와 같이 일반화 된 에러를 나타내며  $\hat{u}$  은 일반화된 비퍼지 값을 나타낸다.

$$\begin{aligned} R1: & \text{if } (\hat{e} \text{ is NB}) \text{ then } (\hat{u} \text{ is NB}) \\ R2: & \text{if } (\hat{e} \text{ is AZ}) \text{ then } (\hat{u} \text{ is AZ}) \\ R3: & \text{if } (\hat{e} \text{ is PB}) \text{ then } (\hat{u} \text{ is PB}) \end{aligned} \quad (1)$$

그림 2는 전건부(a)와 후건부(b)의 멤버십함수를 나타낸다. 전건부는 고정된 퍼지변수를 사용하였고 후건부의 멤버십함수의 퍼지변수는  $x_1$ 과  $x_2$ 를 통해 크기가 변화되어 그림 3과 같이 다양한 비선형 응답을 나타내도록 하였다. SISO FLC의 경우 시불변 이며 원점을 중심으로 대칭인 특성을 갖고 있다.

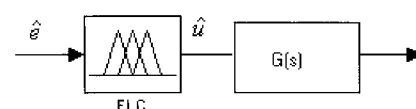


그림 1. Fuzzy control system의 구조.  
Fig. 1. Structure of fuzzy control system.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2008. 9. 8., 채택확정: 2009. 1. 25.

이경응: 조선대학교 대학원 제어계측공학과(yikw@yncc.co.kr)

최한수: 조선대학교 제어계측로봇공학과(hschoi@chosun.ac.kr)

※ 이 논문은 2004년도 조선대학교 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

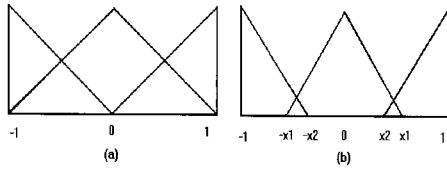


그림 2. 전건부(a)와 후건부(b) 멤버십 함수.  
Fig. 2. MF for premise(a) and consequence(b) of FLC.

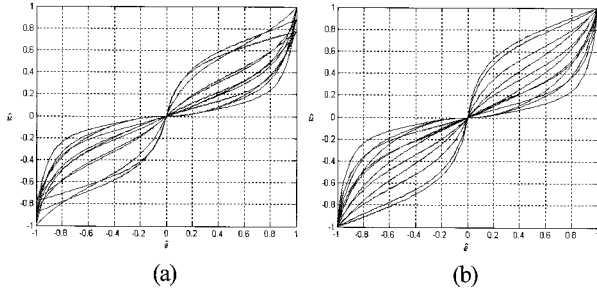


그림 3. FLC의 일반화된 출력.  
Fig. 3. Normalized output of FLC.

따라서  $x_1$ 과  $x_2$ 의 변화에 따라 일정한 응답을 보이게 됨으로 해석적 방법을 통해 식 (3)과 같이 일반화 계수 식을 얻을 수 있다. 일반화 계수는  $x_1$ 이 아닌  $x_2$ 의 함수로 표현되는데 이는 FLC의 출력의 최대 최소값이  $x_2$ 에 의해 결정되기 때문이다. FLC의 출력 값을  $\hat{u} \in [-1, 1]$ 로 하기 위해 식 (3)과 식 (4)을 이용하여 일반화 하였다. 식 (3)은  $x_1$ 과  $x_2$ 의 변화에 따른 FLC의 응답 값을 least square를 이용하여 도출하였다. 식 (3)에서 볼 수 있듯이 FLC의 1과 -1에서의 응답은  $x_2$ 에 의해 결정 된다. 그림 3에서와 같이 (a)는 일반화 전의 FLC 응답을 나타내고 있으며 (b)는 일반화 된 응답을 보여 주고 있다.

$$e(n) = \begin{cases} 1 & , \hat{e}(n) > 1 \\ \hat{e}(n) & , |\hat{e}(n)| \leq 1 \\ -1 & , \hat{e}(n) < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$s_u(x_2) = 0.2 \times x_2^2 - 0.6941 \times x_2 + 1.497 \quad (3)$$

$$\hat{u}(n, x_2) = s_u(x_2)u(n) \quad (4)$$

### III. CIRCLE CRITERION

Circle criterion은 Nyquist 안정도 판별법을 이용하여 도식적으로 나타낸다. 그림 4와 같은 플랜트는 선형이고 되먹임 이득이 비선형인 시스템이 주어졌을 경우 시스템의 상태방정식은 식 (5), (6)과 같다. 플랜트의 경우 (A, B)는 가제어성을 가지고 (A, C)는 가관측성을 가져야 하며 비선형 이득  $\psi(y, t)$ 는  $\psi: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  조건하에 비메모리 특성을 가져야 하며 시변일 수도 있다. Circle criterion은 안정도 판별을 위해 충분조건을 제공한다.

$$\dot{x} = Ax + be \quad (5)$$

$$y = c^T x$$

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b \quad (6)$$

비선형 이득이 그림 5와 같이 특정 범위에 있고 식 (7)을 만족할 경우 부분 비선형(sector nonlinearity)이라고 한다. 식

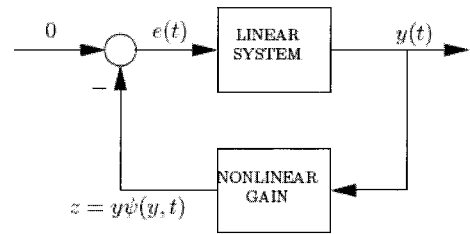


그림 4. 비선형 이득을 포함한 시스템.  
Fig. 4. Control system with nonlinear gain.

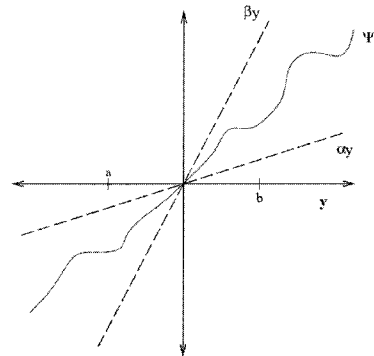


그림 5. 부분 비선형.  
Fig. 5. Sector nonlinearity.

(7)이  $y \in (-\infty, \infty)$ 을 만족하면 무한 절대 안정하다고 한다.

$$\alpha y \leq \psi(y) \leq \beta y, (\beta > \alpha, a < 0 < b) \quad (7)$$

위와 같은 비선형 이득에 대한 전체 시스템의 Nyquist 판별법을 이용하여 안정도를 판별하기 위해 중심을  $-(\alpha + \beta)/2\alpha\beta$ 으로 하고 반지름을  $|\alpha - \beta|/2|\alpha\beta|$ 으로 하는 원  $D(\alpha, \beta)$ 을 Nyquist 선도에 그려 도식적으로 안정도를 확인한다. 플랜트의 특성에 따라 안정성이 다르게 나타나기 때문에 식 (7)에서  $\alpha, \beta$  자체만으로는 안정성을 설명할 수 없고  $G(j\omega)$ 과  $\alpha, \beta$ 의 상대적 위치를 통하여 안정성을 설명할 수 있다. 부분 비선형의 경우 아래와 같은 조건 중의 하나라도 만족하면 시스템은 절대 안정하다고 할 수 있다.

1.  $0 < \alpha < \beta$ 과 같은 경우  $G(j\omega)$ 의 Nyquist 선도가  $D(\alpha, \beta)$ 가 만나지 않거나  $G(s)$ 의 우반면 근의 수만큼 시계방향으로 일주할 경우
2.  $0 = \alpha < \beta$ 과 같은 경우  $G(s)$ 의 모든 근이 좌반면에 있고  $G(j\omega)$ 의 Nyquist 선도가  $s = -1/\beta$ 의 오른쪽에 있을 경우
3.  $\alpha < 0 < \beta$ 과 같은 경우  $G(s)$ 의 모든 근이 좌반면에 있고  $G(j\omega)$ 의 Nyquist 선도가  $D(\alpha, \beta)$ 안에 있을 경우 비선형 이득이  $y \in [a, b]$  조건에서 식 (7)을 만족 할 경우 시스템이 유한 절대 안정하다고 한다.

### IV. CIRCLE CRITERION FOR FLC

FLC의 응답은 멤버십 함수와 rule base을 통하여 다양한 특성을 보이는데 본 연구에서는 FLC의 응답을 후건부 퍼지 변수의 크기를 변화 시켜 응답 특성을 변화 시켰으며 II 장의

표 1. 후건부 퍼지변수 크기에 따른  $-1/\beta$ .

Table 1.  $-1/\beta$  according to the size of fuzzy variable.

$X_1 \backslash X_2$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	-0.028	-0.019	-0.016	-0.015	-0.016	-0.100
0.2	-0.395	-0.396	-0.448	-0.582	-1.023	-1.003
0.4	-0.877	-0.877	-0.882	-1.152	-1.071	-1.003
0.6	-1.499	-1.363	-1.25	-1.153	-1.071	-1.003
0.8	-1.499	-1.363	-1.25	-1.153	-1.071	-1.003
1.0	-1.499	-1.363	-1.25	-1.153	-1.071	-1.003

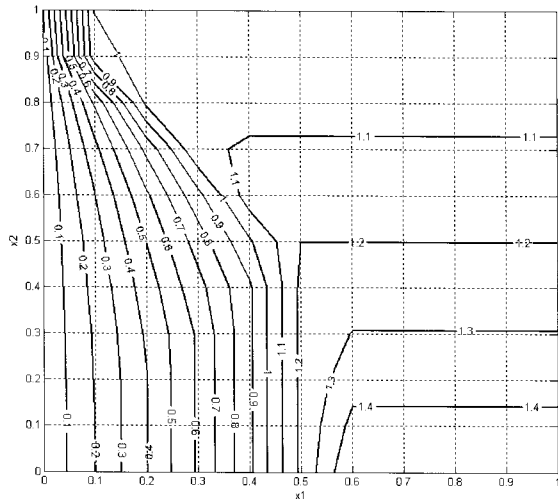


그림 6.  $\psi(y)$ 의 임계점 선도( $x_1, x_2$ 에 대한  $1/\beta$ 의 값).

Fig. 6. Critical point plot of  $\psi(y)$ .

두 번째 안정조건을 이용하여 시스템의 안정도를 평가하였다.  $\psi(t, y)$  이 시간  $t$ 에 독립적이고  $\psi(-y) = -\psi(y)$ ,  $\alpha \leq \psi(y) \leq \beta$  이면  $\psi(\cdot)$  은 실수축에만 존재하게 된다. SISO FLC의 경우 위의 조건을 만족함으로써 실수축에만 존재하게 된다. 따라서  $-1/\beta$ 을 축으로 하는 좌반면에 대해서가 아닌 실수축에서 점( $-1/\beta, 0j$ )의 오른쪽에  $G(s)$ 의 Nyquist 선도가 존재하는지를 통해 안정도를 판별할 수 있다.

표 1은 퍼지변수의 크기의 변화에 따른 Circle Criterion의 임계값인  $-1/\beta$ 을 나타내고 있다.  $G(s)$ 의 실수축과의 교차점이 위의 임계점의 오른쪽에 위치하면 시스템은 안정하다 할 수 있겠다.

본 연구에서는  $x_1$ 과  $x_2$ 를 변화 시켜 그 응답에 대한  $1/\beta$  값을 구하여  $x_1$ 과  $x_2$ 에 따른 임계점의 궤적을 그림 6과 같이 도식적으로 표현하였다.  $x$ 축과  $y$ 축은 각각  $x_1, x_2$ 의 값을 나타내며 각 선은  $1/\beta$ 을 나타내고 있다. 시스템이 안정하기 위해서는 FLC의  $1/\beta$ 이 Nyquist 임계점보다 큰값을 갖도록  $x_1, x_2$ 을 조정하여 한다. 따라서 Nyquist 선도의 실수축과의 교차점을 임계점 선도에 표시하여 후건부 퍼지변수의 안정 영역을 구할 수 있다. 임계점 선도에서 볼 수 있듯이 임계점이 1보다 작을 경우에는 후건부 MF의 두 번째 퍼지 변수에 크게 의존하고 1보다 클 경우에는 첫 번째와 세 번째 변수에 크게 의존함을 알 수 있다.

V. 시뮬레이션

후건부 퍼지 변수의 크기에 따른 시스템의 안정도에 대한 기여도를 알아보기 위한 시뮬레이션을 위해 모든 근이 좌반면에 위치하는 임의의 안정한 플랜트를 식 (8)과 같이 정의하였다.

$$G(s) = \frac{20}{3s^3 + 10s^2 + 9s + 2} \tag{8}$$

본 연구에서는 P형 FLC를 사용함으로써 정상상태 오차에 대해 취약하다. 이에 대한 보안을 위해 그림 7과 같이 FLC의 출력에 [18]에서 제안된 시스템 응답의 정상상태 오차를 통해 구해진 이득  $C_g$ 를 추가하였다.

FLC는 시간 독립이므로  $\psi(\cdot)$ 로 하고  $C_g$ 를  $W(s)$ 로 나타낼 수 있으며 되먹임 시스템으로 구성 하였을 경우 출력은 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(s) = \frac{\psi \cdot G(s)}{1 + \psi \cdot G(s)} + \frac{W(s) \cdot G(s)}{1 + \psi \cdot G(s)} \tag{9}$$

최종값의 정리  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = S.P.$ 에 의해  $C_g$ 는 [18]에 의해 식 (10)과 같이 구할 수 있으며 S.P. (Set Point)는 설정 값을 나타낸다. 식 (9)에서와 같이 FLC는  $C_g$ 와 무관해진다.

$$c_g = \frac{S.P.}{G(0)} \tag{10}$$

식 (8)의  $G(0)$ 은 10이고 S.P.는 1이므로  $C_g$ 는 0.1이 된다.

$G(s)$ 의 Nyquist 선도를 나타내며 실수축과의 교차점은 (0.7, 0j)이다. 시스템이 안정하기 위해서는 이교차점의 왼쪽에 FLC의  $-1/\beta$ 이 위치하여야 한다. 그림 8은 식 (8)에 대한

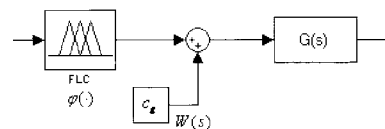


그림 7. 이득을 포함한 FLC.

Fig. 7. FLC with constant gain.

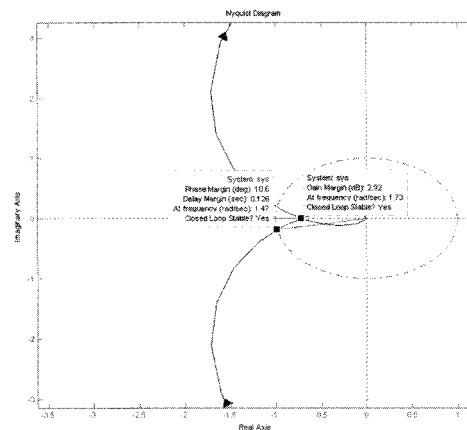


그림 8.  $G(s)$ 의 nyquist 선도.

Fig. 8. The nyquist plot of  $G(s)$ .

Nyquist 선도로써 위상 여유와 이득 여유등을 보여 주고 있다. 그림 9는 제안된 임계점 선도를 통하여 시스템이 안정화 될 수 있는  $x_1$ 과  $x_2$ 의 영역을 나타내고 있다. 그림에서 색깔 된 부분이 시스템이 불안정한 영역을 나타내고 있다.

제안된 방법을 검증하기 위해 FLC의 후건부 퍼지변수의 크기를  $(x_1=0.3, x_2=0.4)$ ,  $(x_1=0.3, x_2=0.6)$ 로 하여 시스템의 응답을 확인하였다.  $(x_1=0.3, x_2=0.4)$ 의 경우에는 그림 9에서 보듯이 불안정 하고  $(x_1=0.3, x_2=0.6)$ 은 안정 영역에 있음을 알 수 있다. 그림 10 은  $(x_1=0.3, x_2=0.4)$ 일 경우 시스템 응답을 나타내

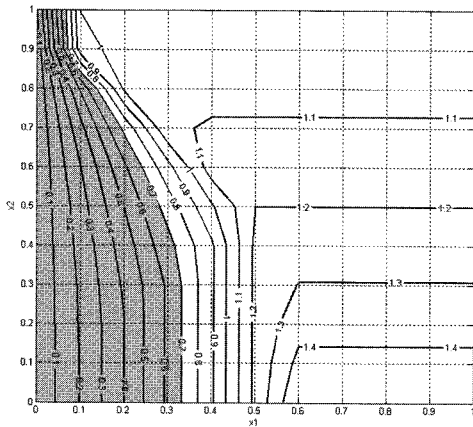


그림 9. 임계점  $(-0.7, 0j)$ 에서의 불안정 영역.  
Fig. 9. The unstable area at critical point  $(-0.7, 0j)$ .

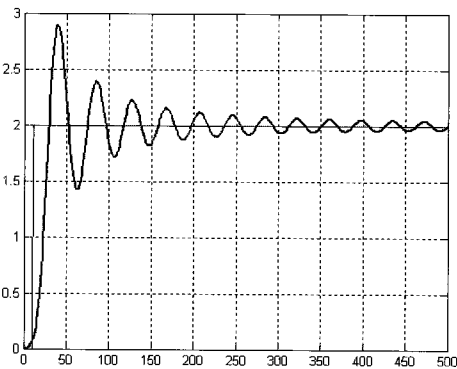


그림 10. 시스템 응답  $(x_1=0.3, x_2=0.4)$ .  
Fig. 10. System response at  $(x_1=0.3, x_2=0.4)$ .

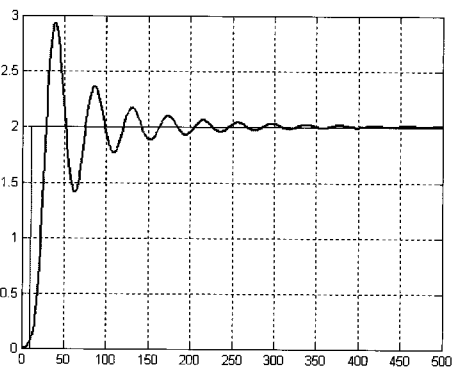


그림 11. 시스템 응답  $(x_1=0.3, x_2=0.6)$ .  
Fig. 11. System response at  $(x_1=0.3, x_2=0.6)$ .

는 것으로 비선형 시스템의 특성 중의 하나인 진동이 발생하고 있으며 그림 11은  $(x_1=0.3, x_2=0.6)$ 일 경우의 시스템 응답으로 정상상태에서 진동이 사라짐을 알 수 있다.

### VI. 결론

만다니 형 FLC의 경우 후건부 퍼지변수의 크기에 따라 다양한 비선형 응답을 보이며 이를 이용해 시스템을 제어할 수 있으나 시스템의 안정도에 대한 해석을 위해서는 전문가의 경험이나 시행착오 법을 통해 퍼지변수의 크기를 결정해야 한다. 본 연구에서는 SISO 만다니 형 FLC의 안정성 판단을 위한 방법으로 비선형 시스템의 안정도 해석에 이용되는 circle criterion을 이용하여 퍼지 변수의 안정 영역을 해석할 수 있는 임계점 선도를 제안 하였으며 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법이 효과적으로 적용 되어짐을 검증 하였다.

Circle criterion의 일반적인 해석에서는  $(-1/\beta, 0j)$ 을 축을 중심으로 안정도를 판별하였으나 SISO FLC는 시간 독립적이기 때문에 실수축에만 존재하게 된다. 따라서  $(-1/\beta, 0j)$ 의 오른쪽에 Nyquist 선도가 존재하지 여부를 통하여 안정도를 판별할 수 있었다. 그러나 circle criterion은 안정하기 위한 충분조건을 제시하기 때문에 임계점 선도에서는 불안정하나 실제로 안정할 수도 있다.

본 연구에서 제시한 임계점 선도를 통하여 시스템 설계 시에 시스템이 안정할 수 있는 조건을 제시함으로써 설계 단계에서 시스템의 안정도를 고려할 수 있게 되어 기존의 설계 방식에 비해 효율적이라 할 수 있겠다.

### 참고문헌

- [1] C. W. de Silva, *Intelligent Control: Fuzzy Logic Applications*. Boca Ration, FL: CRC, 1995.
- [2] D. Driankov, H. Hellendoorn, and M. Reinfrank, *An Introduction to Fuzzy Control*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1996.
- [3] J. Aracil, A. Ollero, and A. Garcia-Cerezo "Stability indices for the global analysis of expert control systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 19, pp. 998-1007, 1989.
- [4] R.-E. Precup, S. Doboli, and S. Preitl "Stability analysis and development of a class of fuzzy control systems," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 13, pp. 237-247, 2000.
- [5] H.-P. Opitz, "Fuzzy control and stability criteria," *Proceedings of First EUFIT'93 European Congress*, Aachen, Germany, vol. 1, pp. 130-136, 1993.
- [6] R.-E. Precup and S. Preitl "Popov-type stability analysis method for fuzzy control systems," *Proceedings of Fifth EUFIT'97 European Congress*, Aachen, Germany vol. 2, pp. 1306-1310, 1997.
- [7] M. Sugeno, "On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, pp. 201-224, 1999.
- [8] K. M. Passino and S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, Addison Wesley Longman, Inc., Menlo Park, CA, 1998.
- [9] H. Kiendl, "Harmonic balance for fuzzy control systems," *Proceedings of First EUFIT'93 European Congress*, Aachen, Germany, vol. 1, pp. 137-141, 1993.
- [10] H. Ying, "Analytical structure of a two-input two-output fuzzy

controller and its relation to PI and multilevel relay controllers," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 63, pp. 21-33, 1994.

[11] F. Gordillo, J. Aracil, and T. Alamo "Determining limit cycles in fuzzy control systems," *Proceedings of FUZZ-IEEE '97 Conference*, Barcelona, Spain, pp. 193-198, 1997.

[12] G. Calcev, "Some remarks on the stability of Mam-dani fuzzy control systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, pp. 436-442, 1998.

[13] W. Silver and H. Ying, "Fuzzy control theory: The linear case," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 33, pp. 275-290, 1989.

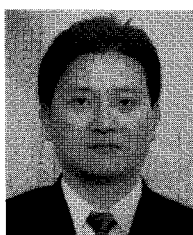
[14] H. Ying, W. Silver, and J. J. Buckley, "Fuzzy control theory: A nonlinear case," *Automatica*, vol. 26, pp. 513-520, 1990.

[15] B. Hu, G. K. I. Mann, and R. G. Gosine, "New methodology for analytical and optimal design of fuzzy PID controllers," *IEEE Trans. on Fuzzy Syst.*, vol. 7, no. 5, pp. 521-539, 1999.

[16] B. Hu, G. K. I. Mann, and R. G. Gosine, "A systematic study of fuzzy PID controllers-function-based evaluation approach," *IEEE Trans. on Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 5, pp. 699-712, 2001.

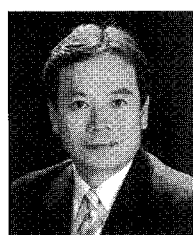
[17] Š. Tomislav, S. Tešnjak, S. Kuljača Og-njen, "Stability analysis of fuzzy control system using describing function method," *Proceedings of 9th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Dubrovnik, Croatia, 2001.

[18] C.-T. Chao and C.-C. Teng "A PD-like self-tuning fuzzy controller without steady-state error," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 87, no. 2, pp. 141-154, 1997.



**이 경 응**

1998년 조선대학교 제어계측공학과 졸업. 2003년 동 대학원 제어계측공학과 석사. 현재 동 대학원 제어계측 공학과 박사과정. 관심분야는 자동제어 및 네트워크시스템.



**최 한 수**

1980년 조선대학교 전기공학과 졸업. 1982년 동 대학원 전기공학과 석사. 1994년 전북대학교 전기공학과 박사. 1984년~현재 조선대학교 교수. 관심분야는 퍼지이론, 뉴럴네트워크, 인공지능.