

비전통적 오차 최소화 방식에 기초한 비선형 빔의 휨에 대한 혼합형 유한요소해석 모델 연구

A Study on the Mixed Finite Element Models of Nonlinear Beam Bending Based on the Unconventional Residual Minimizing Method

김우람* 최윤대*
Wooram Kim Youn Dae Choi

Abstract

In this paper, new type of finite element models for the analysis of nonlinear beam bending are developed by using unconventional residual minimizing method to increase accuracy of finite element solutions and overcome some of computational drawbacks. Developing procedures of the new models are presented along with the comparison of the numerical results of existing beam bending models.

Keywords : Finite Element Method(유한요소해석법), Beam Bending(보의 휨), Timoshenko Beam(티모셴코 빔), Euler-Bernoulli Beam(오일러-베르누이 빔), von-Karman nonlinearity(본-카르만 비선형성)

1. 서론

군사 분야에서 널리 사용되고 있는 유한요소해석법^[1]은 컴퓨터의 발전과 더불어 그 활용성이 계속 증가하고 있다. 특히 각종 무기체계의 개발에 있어서 유한요소해석법은 직접 실험을 통하여 얻을 수 없는 부분까지 시뮬레이션 할 수 있기 때문에 실험 여건이 제한되는 우리의 현실을 고려할 때 매우 매력적인 분석 방법이라 할 수 있다.

본 연구에서는 이러한 유한요소해석법의 핵심을 이루는 오차 최소화 방식에 새로운 방법을 적용하여 보

의 비선형 휨을 해석하기 위한 새로운 모델을 개발하였다.

지금까지 유한요소해석을 실시하는데 사용되는 대부분의 상용 툴에는 전통적인 갈라킨 방식(the Galerkin method) 이나 최소 자승법(the least-squares method) 또는 배열법(the collocation method) 등을 기초로 한 수치해석 모델들이 사용되고 있다^[1-3]. 이들 전통적인 모델들은 대부분 수치계산 변역 내에서 해의 추정에 의해 발생하는 미분방정식의 오차(residual)에 가중함수(weight function)를 곱하여 이를 변역 내에서 적분하는 방식으로 해의 추정에 의해 발생하는 오차를 최소화한다. 즉 가중된 오차들의 적분 함수(the integral form of weighted residual statement)를 최소화 함수로 채택하고 있다^[4].

본 연구에서는 오일러-베르누이 빔 이론(the Euler-

† 2009년 8월 14일 접수~2009년 10월 22일 게재승인

* 육군3사관학교(Korea Army Academy at Yeongcheon)

책임저자 : 김우람(c14445@naver.com)

Bernoulli beam theory)^[2]과 티모셴코 빔 이론(the Timoshenko beam theory)^[2]을 중심으로 기존의 전통적 방식이 아닌, 관련된 오차들의 곱을 최소화 시키는 비 전통적 방식으로 새로운 오차 최소화 함수를 구성하여 기존모델의 수치 해석상의 단점을 보완하였다. 또한 기존의 모델들이 변위만을 독립적 미지수로 취급한 것과 달리, 빔의 휨에 포함되는 각종 합성력과 빔 단면의 회전 역시 독립적 변수로 유한요소 해석 모델에 포함하여 혼합형 유한요소 모델(the mixed finite element model)^[5]을 개발하고 변위 이외의 다른 영역의 해들의 정확성을 증가시켰다.

본 연구에서 개발한 유한요소모델의 검증을 위하여 모델의 선형해가 알려진 참해와 비교하여 얼마나 정확한지를 확인하였다. 또한 비선형 해가 기존 방식을 통하여 개발된 모델들의 수렴해와 일치하는 지의 여부를 여러 경계조건을 통하여 확인하였다.

2. 관련 이론

가. 수학 이론^[3]

변분법을 설명하기 위해 변수 x, u, u' 의 함수 $F(x, u, u')$ 를 고려해 보자. 일반적으로 유한요소 해석을 위해서는 변수들을 추정해야하는데 u 를 추정한 값을 \bar{u} 라고 하면 다음 식 (1) 같이 u 와 추정한 \bar{u} 의 관계를 얻을 수 있다.

$$\bar{u}(x) = u(x) + \epsilon v(x) \tag{1}$$

여기서 ϵ 는 상수이고, v 는 x 에 관한 함수이다. u 의 추정에 의한 오차는 다음 식 (2)와 같이 주어진다.

$$\bar{u}(x) - u(x) = \epsilon v(x) \equiv \delta u(x) \tag{2}$$

위 식 (2)를 이용하여 u 의 추정오차로 인해 발생한 지점 x 에서의 함수 F 의 오차를 측정해 보면, 다음 식 (3)과 같이 주어진다.

$$F(x, u + \epsilon v, u' + \epsilon v') - F(x, u, u') = \Delta F \tag{3}$$

식 (3)의 오차는 테일러급수 전개를 통해서도 구해질 수 있는데 그 값은 다음 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x, u, u') + \epsilon v \frac{\partial F}{\partial u} + \epsilon v' \frac{\partial F}{\partial u'} \\ &+ \frac{(\epsilon v)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{(\epsilon v)(\epsilon v')}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} + \frac{(\epsilon v')^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} \\ &+ \dots - F(x, u, u') \\ &= \epsilon v \frac{\partial F}{\partial u} + \epsilon v' \frac{\partial F}{\partial u'} + \epsilon R_1(\epsilon) \end{aligned} \tag{4}$$

식 (3)과 (4)를 이용하여 함수 $F(x, u, u')$ 의 변분량을 계산할 수 있는데, 변분연산자를 정의하기 위해 상수 ϵ 에 대하여 극한값을 취하면 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_1(\epsilon) = 0$ 이 되며, 임의의 지점(x)에서의 특정 함수의 변분량 δF 는 아래 식 (5)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \delta F &= \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{F(x, u + \epsilon v, u' + \epsilon v') - F(x, u, u')}{\epsilon} \right] \tag{5} \\ &= \epsilon \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta F}{\epsilon} \right] \\ &= \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} (F(u + \epsilon v)) \right] \\ &= \epsilon \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \end{aligned}$$

변분법에 의하여 특정 지점에서의 함수 값의 오차는 수학적으로 정량화 될 수 있는데, 이를 기초로 최소에너지 법칙을 이용하면 고체역학 분야의 각종 지배 방정식을 쉽게 유도할 수 있다. 또한, 유한요소모델의 전개를 위해 필요한 오차함수도 변분법을 사용하여 최소화 시킬 수 있다.

예를 들어 다음과 같은 임의의 함수의 최소값을 찾는 문제의 경우 변분법을 이용하면 함수 $I(u)$ 가 최소값을 갖게 하는 u 를 찾을 수 있다. 아래의 식 (6)과 같이 함수가 주어진다면 함수의 최소값을 구하는데 필요한 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\text{함수 : } I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx \tag{6}$$

$$\text{필요조건 : } \delta I(u) = \int_a^b \delta F(x, u(x), u'(x)) dx = 0 \tag{7}$$

$$\text{충분조건 : } \delta^2 I(u) = \int_a^b \delta^2 F(x, u(x), u'(x)) dx \geq 0$$

식 (7)에 주어진 필요조건은 새로운 유한요소 모델의 조건 오차를 최소화 하기위하여 사용될 것이다.

나. 기하학적 비선형 성을 포함하는 빔 이론

유한요소모델을 전개하기 위해 널리 알려진 오일러-베르누이 빔 이론과 티모셴코 빔 이론을 사용하였다. Fig. 1의 오일러-베르누이 빔 이론에 대하여 간단하게 알아보자. 이 빔 이론은 변형되기 전의 빔의 단면이 변형 후에도 ① 같은 단면을 유지하고, ② 면 자체의 변형이 없으며, ③ 빔의 중심선에 대하여 수직을 유지한다는 가정에 기초한다. 이 가정은 비교적 얇은 빔에 대해서는 매우 신뢰할 만한 결과 값을 제공하지만, 빔의 두께가 두꺼워지면 전단 변형에 의한 처짐을 가정 ③ 때문에 반영하지 못해서 비현실적인 결과 값을 제공한다.

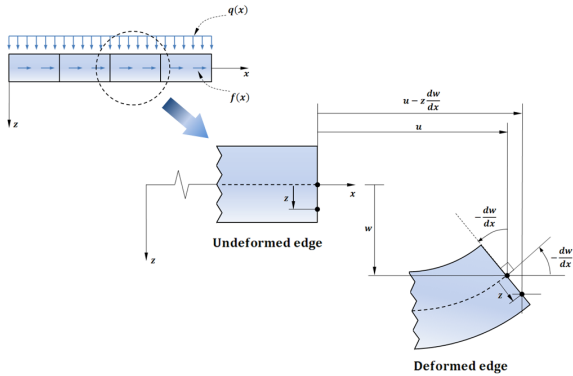


Fig. 1. 오일러 베르누이 빔 이론^[1]

오일러-베르누이 빔의 전단 변형에 대한 단점을 가장 단순한 방법으로 보완한 이론이 바로 티모셴코 빔 또는 1차 전단변형 빔으로 불리는 이론이다. 이 이론은 Fig. 2에서와 같이 중심선에 대한 수직인 단면의 회전 $-dw/dx$ 외에 단면의 전단변형 ϕ 를 추가하여 오일러 베르누이의 빔 이론을 보완한다. 앞서 언급한 오일러 베르누이 가정 중 ①, ②는 티모셴코 빔 이론에서도 유효하나, ③의 경우는 전단 변형률 γ_{xz} 에 의해 더 이상 유효하지 않음을 Fig. 2를 통해 알 수 있다.

기하학적 비선형성은 빔이 충분히 휘어서 보통의 선형 분석에서 가정하고 있는 $(dw/dx)^2 \approx 0$ 이라는 가정을 $(dw/dx)^2 \neq 0$ 이라고 보는데서 기인한다. 즉 매우 작은 dw/dx 의 제곱은 무시할 수 있을 정도로 작은데, 빔이 충분히 휘어서 빔의 중심선의 기울기인 dw/dx 값이 더 이상 무시할 수 있을 정도로 작지 않다면, 이를 모델링에 고려해야만 한다는 것이다. 이러

한 성질은 우리가 변형률을 고려할 때 간단한 가정의 형태로 포함되지만, 결과적으로 쉽게 풀리지 않는 비선형 미분방정식을 제공한다.

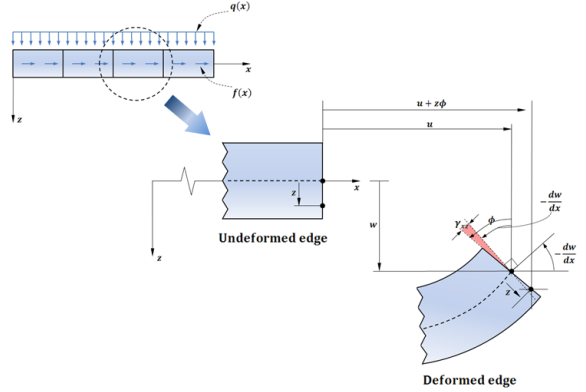


Fig. 2. 티모셴코 빔 이론^[1]

$(dw/dx)^2 \neq 0$ 이라는 동일한 가정의 비선형성을 포함하는 두 가지 이론의 지배 방정식은 빔의 자유 물체도를 활용하여 합력과 회전 모멘트의 평형상태를 고려하거나, 최소 가상 에너지의 원리를 사용하여 유도할 수 있고 그 과정은 이미 잘 알려져 있으므로 본 논문에서는 자세한 내용을 생략한다. 오일러 베르누이 빔과 티모셴코 빔 이론의 비선형 지배 방정식은 아래와 같이 주어진다.

Table 1. 오일러 베르누이 빔과 티모셴코 빔의 지배 방정식

오일러-베르누이 빔 이론	티모셴코 빔 이론
$\frac{dN}{dx} + f(x) = 0$	$\frac{dN}{dx} + f(x) = 0$
$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0$	$\frac{d}{dx} \left(Q + \frac{dw}{dx} N \right) + q(x) = 0$
$\frac{dM}{dx} - V + \frac{dw}{dx} N = 0$	$\frac{dM}{dx} - Q = 0$
$\frac{N}{EA} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \theta^2 \right)$	$\frac{N}{EA} = \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]$
$Q = \alpha \left(\theta + \frac{dw}{dx} \right) = 0$	$\frac{Q}{K_s GA} = \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right)$
$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx}$	$\frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{dx}$

참고로 오일러 베르누이 빔 이론과 티모셴코 빔 이론 사이의 전단 합성력(V 와 Q) 사이에는 아래 (8)과 같은 관계가 있다. 본 연구에서는 티모셴코 빔 모델에 Q 대신 V 를 포함시켜 Q 에 대한 미분 차수를 완화시키는데 다음 식 (8)을 사용했다.

$$V = Q + \frac{dw}{dx}N \quad (8)$$

혼합형 모델에서는 미분 방정식의 경계 조건이 보의 양 끝단에서의 각각의 주어진 변수의 값으로 반영된다. 혼합형 모델의 결절점(node)은 전통적인 변위형 모델의 결절점보다 포함된 자유도의 수(degree of freedom)가 더 많으며, 각각의 자유도의 값을 직접 대입하는 방식(strong imposition of boundary conditions)으로 경계 조건을 반영한다. 반면 전통적으로 변위(u, w)만을 미지수로 취급하는 유한요소 모델의 경우의 사용되는 지배방정식과 보의 좌·우 끝단인 $x = a, x = b$ 에서의 경계조건은 아래 식 (10)와 같은 관계로 주어진다. 주어진 관계에 맞는 경계 조건은 유한요소 모델의 행렬형 방정식의 우측항의 힘 벡터에 부과되며 이러한 벡터의 형태는 부분적분(integration by parts)에 의해서 자동적으로 구해진다. 참고로 전통적인 변위형 유한요소 모델에 사용되는 오일러 베르누이 빔의 지배 방정식의 형태와 경계조건은 아래와 같이 주어진다.

<오일러 베르누이 빔>

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right\} + f(x) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left(-EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) + \frac{dw}{dx} EA \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right\} + q(x) = 0$$

오일러 베르누이 빔의 경계조건은 아래와 같다.

<오일러 베르누이 빔의 경계 조건>

$$N_a = EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]_a,$$

$$N_b = -EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]_b,$$

$$V_a = \left[-EI \frac{d^3w}{dx^3} + \frac{dw}{dx} EA \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right]_a,$$

$$V_b = - \left[-EI \frac{d^3w}{dx^3} + \frac{dw}{dx} EA \left[\frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \right]_b,$$

$$M_a = -EI \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_a,$$

$$M_b = EI \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_b. \quad (10)$$

3. 유한요소 모델의 전개

Table 1의 지배 방정식을 기본으로 유한요소 모델을 전개해 보자. 먼저 전통적인 유한 요소 해석법에 대하여 잠시 알아보면, 식 (9)에 주어진 변위(u, w)에 대한 미분방정식을 바탕으로 변위(u, w)를 추정(하여 유한요소 모델을 전개하였다. 하지만 본 연구에서는 변위에 더하여 각종 합성력(N, V, Q 및 M)과 중심선의 기울기($\theta(= -dw/dx)$ 및 ϕ)를 모두 독립적인 미지수로 간주하고 각각을 추정하여 유한요소 모델을 전개 한다. 이러한 모델을 혼합형 모델이라고 하는데 혼합형 모델에서는 각각의 변수들이 직접 결절점에서 계산되기 때문에 변위형 모델과 비교하여 변위 이외의 변수들에 대한 정확도를 향상시킬 수 있다.

유한요소해석법에서 변수는 알려진 형상함수(shape function)와 각 요소의 결절점에서의 함수의 미지수 값(nodal value)의 선형 결합으로 추정할 수 있다. 이때 사용되는 형상함수의 조건은 다음과 같이 주어진다^[1].

$$\sum_{i=1}^n \psi_i = 1, \text{ 그리고 } \begin{cases} \psi_i = 1 & \text{at } i\text{-th node} \\ \psi_i = 0 & \text{at the other nodes} \end{cases}$$

형상함수와 각각의 결절점에서의 변수들의 값들을 이용하면 변수들은 다음 Table 2와 같이 추정될 수 있다.

Table 2에서와 같이 각각의 변수의 해를 추정하고 나면, Table 1에 주어진 미분방정식의 조건들을 더 이상 정확히 만족되지 못한다. 이때의 조건 오차를 R_i 이라고 하고 이는 i 번째 미분방정식의 조건 오차를 의미한다.

각 방정식 마다 변수들의 추정으로 생기는 오차들에 대하여, 모든 지점에서 오차를 '0'으로 만들 수 있다면 주어진 경계조건에 대해서 참 해를 구할 수 있게 된다. 하지만 이것은 현실적으로 불가능하므로 유

한요소해석법은 특정 물리 현상의 수학적 조건을 적분적 관점의 조건으로 변환하여 이를 만족 시키는 해를 찾는 것을 대안으로 한다. 전통적으로 가중함수에 의한 적분형 유한요소해석 모델들은 다음과 같은 형태를 취한다^[2].

$$\int_a^b \varpi_i R_i dx = 0 \tag{11}$$

Table 2. 오일러 베르누이 빔의 변수 추정

변수 명칭	오일러-베르누이 빔 이론	
	변수	변수 별 변분량
수직변형	$w \cong \bar{w} = \sum_{j=1}^l w_j^e \psi_j^w$	$\delta w \cong \delta \bar{w} = \sum_{i=1}^l \delta w_i^e \psi_i^w$
수평변형	$u \cong \bar{u} = \sum_{j=1}^m u_j^e \psi_j^u$	$\delta u \cong \delta \bar{u} = \sum_{i=1}^m \delta u_i^e \psi_i^u$
중심선의 기울기	$\theta \cong \bar{\theta} = \sum_{j=1}^n \theta_j^e \psi_j^\theta$	$\delta \theta \cong \delta \bar{\theta} = \sum_{i=1}^n \delta \theta_i^e \psi_i^\theta$
수평방향 수직합성력	$N \cong \bar{N} = \sum_{j=1}^n N_j^e \psi_j^N$	$\delta N \cong \delta \bar{N} = \sum_{i=1}^n \delta N_i^e \psi_i^N$
수직방향 전단합성력	$V \cong \bar{V} = \sum_{j=1}^q V_j^e \psi_j^V$	$\delta V \cong \delta \bar{V} = \sum_{i=1}^q \delta V_i^e \psi_i^V$
굽힘 모멘트	$M \cong \bar{M} = \sum_{j=1}^r M_j^e \psi_j^M$	$\delta M \cong \delta \bar{M} = \sum_{i=1}^r \delta M_i^e \psi_i^M$

Table 3. 오일러 베르누이 빔의 변수들의 추정에 의한 조건 오차(residual) R_i

구분	오일러-베르누이 빔 이론
x -방향 합력 평형	$\frac{d\bar{N}}{dx} + f(x) = R_1$
z -방향 합력 평형	$\frac{d\bar{V}}{dx} + q(x) = R_2$
y -방향 모멘트 평형	$\frac{d\bar{M}}{dx} - \bar{V} + \frac{d\bar{w}}{dx} \bar{N} = R_3$
x -방향 수직 합성력	$\frac{\bar{N}}{EA} - \frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{1}{2} \bar{\theta}^2 = R_4$
z -방향 전단 합성력	$\bar{\theta} + \frac{d\bar{w}}{dx} = R_5$
y -방향 모멘트 합성력	$\frac{\bar{M}}{EI} - \frac{d\bar{\theta}}{dx} = R_6$

여기서 ϖ_i 는 가중치 함수이며, R_i 에 대하여 주된 영향을 미치는 변수에 대해서 사용된 형상함수와 같은 형태를 취한 유한요소 모델을 갈라진 유한요소 모델이라고 한다.

한편 최근에 들어서 고체역학 분야와 유체역학분야에서 널리 시도되고 있는 방식 중 하나로 최소 자승법에 기초한 유한요소 모델이 있다. 이 모델의 경우 다음과 같이 각 오차들의 자승을 적분하는 함수를 최소화 함수의 형태로 취한다^[6].

$$I^e = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n R_i^2 \right) dx \neq 0 \tag{12}$$

그러므로 최소자승법의 유한요소 해석 모델은 변분법을 사용하여 다음의 식의 형태를 취한다.

$$\delta I^e = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \delta R_i R_i \right) dx = 0 \tag{13}$$

다른 관점에서 최소 자승법은 특정 식으로 주어진 조건 미분방정식의 변분량을 가중함수로 사용한다고 할 수 있다. 이러한 최소 자승법에 의하여 전개된 유한요소 모델의 계수 행렬은 대칭을 이루고 양의 절대치 행렬(the positive definite matrix)을 갖는다. 이는 여러 가지 수치해석 상의 여러 장점을 제공하며 주어진 조건에 대하여 특정 가중함수가 이미 정해져 있기 때문에 특정 조건을 제약 없이 수학적으로 포함시킬 수 있다. 하지만 최소자승법 역시 혼합형 모델에 사용하기 위해서는 각 오차의 가중치를 동일하게 반영시키기 위한 조정이 필요하며, 고체역학 분야의 비선형 분석을 위해서는 무차원화와 같은 부가적인 과정을 필요로 한다.

이와 달리, 본 연구를 통하여 새롭게 제안하는 모델은 기존 방식들과 확연히 다른 특징을 가지고 있다. 가장 큰 특징은 다음과 같이 최소화 함수에서 찾아볼 수 있다. Table 3에 주어진 오차들에 대하여 다음과 같은 조건들을 유도해 낼 수 있다.

$$R_1 \neq 0 \text{ 그리고 } R_4 \neq 0 \rightarrow R_1 R_4 \neq 0$$

$$R_2 \neq 0 \text{ 그리고 } R_5 \neq 0 \rightarrow R_2 R_5 \neq 0$$

$$R_3 \neq 0 \text{ 그리고 } R_6 \neq 0 \rightarrow R_3 R_6 \neq 0$$

서로 관련이 있는 두 개의 방정식 끼리 그 오차의

곱을 적분하는 함수를 최소화하면, 결국 두 가지 조건을 동시에 만족 시킬 수 있는 최소화 함수를 구성할 수 있다. 만약 위에 주어진 짝이 아닌 다른 짝을 이용하여 유한요소 모델을 전개 시킬 경우 예상하지 못한 부정확성을 내포할 수 있다. 빔 모델의 경우 두 방정식 사이의 관련성은 이미 잘 알려진 가상일의 원리(the virtual work statement)와 라그랑지 함수법(the Lagrange function method)을 이용하여 찾을 수 있는데, 일반적으로는 평형 방정식과 이에 대한 물리적 특성을 반영하는 구성 관계식으로 관계가 정해질 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} I_1^e &= \int_a^b (R_1 R_4) dx, \\ I_2^e &= \int_a^b (R_2 R_5) dx, \\ I_3^e &= \int_a^b (R_3 R_6) dx \end{aligned} \quad (14)$$

이러면, 각각은 수평방향 에너지, 수직방향 에너지 그리고 굽힘 에너지와 관련된 오차의 곱을 의미한다.

Table 4. 가상변위 및 가상합성력과 관련 미분방정식

오일러-베르누이 빔 이론	
관련 가상변위 및 가상합성력	관련 지배 방정식
δu	$\frac{dN}{dx} + f(x) = 0$
δw	$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0$
$\delta \theta$	$\frac{dM}{dx} - V + \frac{dw}{dx}N = 0$
δN	$\frac{N}{EA} - \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\theta^2\right) = 0$
δV	$\theta + \frac{dw}{dx} = 0$
δM	$\frac{M}{EI} - \frac{d\theta}{dx} = 0$

이들 오차들의 곱을 최소화 시키는 것은 결국 전체 시스템과 관련된 오차를 최소화 시키는 것과 같다. 위에 주어진 3개의 식들의 항은 각각 독립적으로 조건을 충족시키기 때문에 결국 다음 식 (15)와 같은 단일 식으로 표현할 수 있다.

$$I_T^e = \int_a^b (R_1 R_4 + R_2 R_5 + R_3 R_6) dx \quad (15)$$

앞에서 언급한 바와 같이 위 식 (15)를 최소화 하기 위한 조건은 식 (7)을 이용한다.

위 식 (15)의 각각의 오차 항을 Table 2 및 Table 3을 이용하여 치환한 후 정리하면 식 (16)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta I_T^e &= \int_a^b \left[\frac{d\delta N}{dx} \left(\frac{N}{EA} - \frac{du}{dx} - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\delta N}{EA} - \frac{d\delta u}{dx} - \theta\delta\theta \right) \left(\frac{dN}{dx} + f(x) \right) \\ &\quad + \left(\frac{d\delta V}{dx} \right) \left(\theta + \frac{dw}{dx} \right) \\ &\quad + \left(\delta\theta + \frac{d\delta w}{dx} \right) \left(\frac{dV}{dx} + q(x) \right) \\ &\quad + \left(\frac{d\delta M}{dx} - \delta V + \frac{dw}{dx}\delta N \right) \left(\frac{M}{EI} - \frac{d\theta}{dx} \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{\delta M}{EI} - \frac{d\delta\theta}{dx} \right) \left(\frac{dM}{dx} - V + \frac{dw}{dx}N \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

위 식 (16)에 나타난 변수들을 유한요소 해석을 위해 추정된 변수들로 치환하면 간단한 형태의 행렬 형식의 방정식을 얻을 수 있는데 그 과정을 모두 보이는 것은 지면상 제약이 크므로 δN 에 관한 항들만 예로 설명하도록 하겠다.

$$\begin{aligned} \delta N: \int_a^b \left[\frac{d\delta N}{dx} \left(\frac{N}{EA} - \frac{du}{dx} - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right. \\ + \left(\frac{\delta N}{EA} \right) \left(\frac{dN}{dx} + f(x) \right) \\ \left. + \left(\frac{dw}{dx}\delta N \right) \left(\frac{M}{EI} - \frac{d\theta}{dx} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Table 2에 주어진 추정 값들로 u, N, w, V, θ, M 과 이들의 변분 값을 식 (16)의 변수들과 치환하면 각각의 변수들의 변분값에 대한 항등식을 얻게 된다. 그 중 δN_i^e 에 대하여 살펴보면 아래 식 (18)과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \delta N_i^e \left\{ \int_a^b \left[\frac{d\psi_i^N}{dx} \left(\frac{1}{EA} \sum_{j=1}^p N_j^e \psi_j^N - \sum_{j=1}^m \frac{d\psi_j^u}{dx} u_j^e \right) \right. \right. \\ - \frac{\theta}{2} \sum_{j=1}^n \psi_j^\theta \theta_j^e \left. \right] + \frac{\psi_i^N}{EA} \left(\sum_{j=1}^p \frac{d\psi_j^N}{dx} N_j^e + f(x) \right) \\ \left. + \frac{dw}{dx} \psi_i^N \left(\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^r M_j^e \psi_j^M - \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^\theta}{dx} \theta_j^e \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)의 dw/dx 와 $-\theta/2$ 은 비선형 항으로 이들의 값은 반복법에 의하여 구해진다. 그러므로 이들 항에 대해서는 추정을 하지 않고 한 단계 전의 반복법에서 구해진 해를 이용하여 그 수치를 구한다. 즉, 비선형 항에 대해서는 유한요소 모델 전개 시에 상수와 같이 취급하도록 한다. $\delta N_i^c \neq 0$ 이므로 위 항등식 (18)을 만족시키기 위해서는 이항의 계수가 '0'이어야 한다. 그러므로 위식은 아래와 식 (19)와 같이 단순화 될 수 있다.

$$\int_a^b \left[\frac{d\psi_i^N}{dx} \left(\frac{1}{EA} \sum_{j=1}^p N_j^c \psi_j^N - \sum_{j=1}^m \frac{d\psi_j^u}{dx} u_j^c - \frac{\theta}{2} \sum_{j=1}^n \psi_j^\theta \theta_j^c \right) + \frac{\psi_i^N}{EA} \left(\sum_{j=1}^p \frac{d\psi_j^N}{dx} N_j^c + f(x) \right) + \frac{dw}{dx} \psi_i^N \left(\frac{1}{EI} \sum_{j=1}^r M_j^c \psi_j^M - \sum_{j=1}^n \frac{d\psi_j^\theta}{dx} \theta_j^c \right) \right] = 0 \quad (19)$$

위에 주어진 식만을 살펴보면 시그마 연산의 정의와 지수 기수법(index notation)의 성질에 의하여 아래와 같은 행렬형태의 방정식으로 나타내어질 수 있다.

$$[[K^{Nu}], [K^{N\theta}], [K^{NN}], [K^{NM}]] \begin{Bmatrix} \{u^c\} \\ \{\theta^c\} \\ \{N^c\} \\ \{M^c\} \end{Bmatrix} = \{F^N\} \quad (20)$$

여기서 각각의 하위 행렬들과 벡터들의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$K_{ij}^{Nu} = \int_a^b \left(-\frac{d\psi_i^N}{dx} \frac{d\psi_j^u}{dx} \right) dx$$

$$K_{ij}^{N\theta} = \int_a^b \left(-\frac{\theta}{2} \frac{d\psi_i^N}{dx} \psi_j^\theta - \frac{dw}{dx} \psi_i^N \frac{d\psi_j^\theta}{dx} \right) dx,$$

$$K_{ij}^{NN} = \int_a^b \left(\frac{1}{EA} \frac{d\psi_i^N}{dx} \psi_j^N + \frac{1}{EA} \psi_i^N \frac{d\psi_j^N}{dx} \right) dx,$$

$$K_{ij}^{NM} = \int_a^b \left(\frac{dw}{dx} \psi_i^N \psi_j^M \right) dx,$$

$$F_i^N = \int_a^b \left(-\frac{\psi_i^N}{EA} f(x) \right) dx.$$

위에 주어진 하위 행렬의 값은 이미 알려진 형상 함

수와 그 미분계수로 구성되므로 이를 구분구적법으로 쉽게 구할 수 있다. 마찬가지로 아래의 δu , δw , δV , $\delta \theta$, δM 에 대해서도 같은 과정을 거치야 하지만 구체적인 과정은 생략한다.

$$\delta u: \int_a^b \left[-\frac{d\delta u}{dx} \left(\frac{dN}{dx} + f(x) \right) \right] = 0,$$

$$\delta w: \int_a^b \left[\frac{d\delta w}{dx} \left(\frac{dV}{dx} + q(x) \right) \right] = 0,$$

$$\delta V: \int_a^b \left[\frac{d\delta V}{dx} \left(\theta + \frac{dw}{dx} \right) - \delta V \left(\frac{M}{EI} - \frac{d\theta}{dx} \right) \right] = 0,$$

$$\delta \theta: \int_a^b \left[-\theta \delta \theta \left(\frac{dN}{dx} + f(x) \right) + \delta \theta \left(\frac{dV}{dx} + q(x) \right) - \frac{d\delta \theta}{dx} \left(\frac{dM}{dx} - V + \frac{dw}{dx} N \right) \right] = 0,$$

$$\delta M: \int_a^b \left[\frac{d\delta M}{dx} \left(\frac{M}{EI} - \frac{d\theta}{dx} \right) + \frac{\delta M}{EI} \left(\frac{dM}{dx} - V + \frac{dw}{dx} N \right) \right] = 0.$$

모든 과정을 거치면 우리가 유한요소법을 위하여 최소화할 위해 사용했던 미분함수는 다음 식 (21)과 같은 행렬형태의 대수방정식으로 변환된다.

$$[K] \{\Delta^e\} = \{F\} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} [K^{uu}] & [K^{u\theta}] & [K^{uN}] & [K^{uM}] \\ [K^{\theta u}] & [K^{\theta\theta}] & [K^{\theta N}] & [K^{\theta M}] \\ [K^{Nu}] & [K^{N\theta}] & [K^{NN}] & [K^{NM}] \\ [K^{Mu}] & [K^{M\theta}] & [K^{MN}] & [K^{MM}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{\theta^e\} \\ \{N^e\} \\ \{M^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^u\} \\ \{F^\theta\} \\ \{F^N\} \\ \{F^M\} \end{Bmatrix}$$

본 연구를 통해서 제시된 모델의 수치해석상의 이점은 위의 식 (21)의 계수 행렬이 언제나 대칭이라는 것이다. 이는 반드시 가우스 소거법을 사용하지 않아도 되는 이점을 제공하여 수치해석 시 속도를 향상시켜준다. 위의 계수 행렬들의 각 항별 수치는 구분구적법을 이용하여 쉽게 구할 수 있으므로 유한요소 해석을 위하여 매쉬(mesh)를 정하고 아래의 $[K]$ 를 사용하여 글로벌 계수 행렬인 $[GLK]$ 를 조립하고 경계조건을 부여한 글로벌 계수행렬의 역행렬을 구함으로써 우리가 알고하는 미지수를 구하게 된다. 티모셴코 빔 모델의 경우도 모델 전개를 위한 과정은 오일러 베르누이 모델과 정확히 일치하므로 생략하겠다.

4. 비선형 방정식 풀이 과정

유한요소 해석법은 ① 물리적 현상을 묘사하는 미분 방정식과, ② 모델을 전개하기 위한 수학적 이론 그리고 ③ 전개된 모델의 수치해석을 위한 컴퓨터 프로그램으로 이루어진다. 지금까지 살펴본 내용 중 오일러-베르누이 및 티모셴코 빔 이론은 물리적 현상을 묘사하는 미분방정식이고, 유한요소 모델을 전개하기 위하여 사용한 오차 최소화 함수 및 과정은 본 연구를 통해서 제안된 것이다. 마지막으로 컴퓨터 프로그래밍을 통하여 실제 수치 시뮬레이션을 실시하게 되는데, 현재의 연구 주제가 기하학적인 비선형성을 포함하므로 이미 잘 알려진 비선형 방정식 풀이과정을 maple 9.5를 이용하여 컴퓨터 프로그램으로 작성하였다.

가. 직접 반복법⁽⁷⁾

고체역학에서 직접반복법을 사용하는 경우 최초의 모든 추정해를 '0'으로 설정하며, 이 과정에 의해서 비선형 항은 모두 '0'으로 처리된다. 자연스럽게 최초의 반복법에 의한 결과 값은 비선형 성을 내포하지 않는 선형 분석과 같은 값을 얻게 되는 것이다.

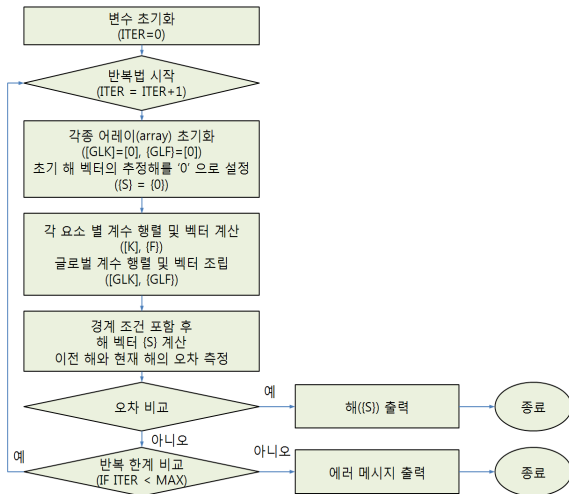


Fig. 3. 직접 반복법에 의한 비선형 방정식 풀이 과정

첫 번째 반복법에 의하여 구해진 해를 다음번 반복법의 비선형 항들을 계산하기 위해서 사용하고, 각각의 반복법마다 비선형 해의 수렴여부를 판단하기 위하여 현재의 반복법으로 구한 해를 전번 반복법으로 구한 해의 값과 비교하여 다음과 같은 식 (22)을 만족

시키는지 여부를 판단하여 수렴여부를 판정한다.

$$\sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N (S_I^{(r)} - S_I^{(r-1)})^2}{\sum_{I=1}^N (S_I^{(r)})^2}} < \epsilon \quad (22)$$

여기서 $S_I^{(r)}$ 은 r 번째 반복법에서 구해진 해이고, $S_I^{(r-1)}$ 은 $r-1$ 번째 반복법에서 구해진 해를 나타내며, N 은 유한요소 해석에 의하여 얻어진 모든 결점에서의 미지수들의 총 개수를 나타낸다. 일반적으로 ϵ 의 값은 0.01~0.001 정도의 값을 취하며, 너무 작은 값을 취하면 수치해석의 특성 상 무한히 프로그램이 반복될 수도 있다. 이러한 반복을 막기 위해서 최대한으로 허용하는 반복법의 횟수를 $MAX \leq 30$ 으로 정했다.

나. 뉴턴 래프슨 반복법⁽⁸⁾

뉴턴-래프슨 반복법의 경우 직접반복법과는 달리 비선형해에 대한 수렴 방향을 탄젠트 행렬($[GLT]$)의 형태로 제공하여 직접 반복법 보다 더 빠른 수렴 속도를 나타낸다. 하지만 탄젠트 행렬의 계산과 이를 위한 컴퓨터 메모리 할당은 부수적 희생 요소이다.

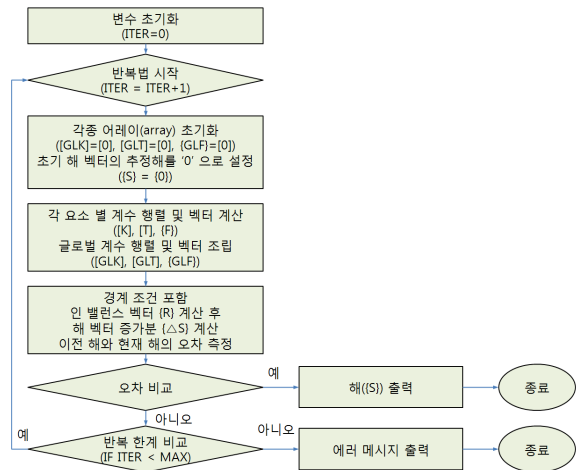


Fig. 4. 뉴턴 래프슨 반복법에 의한 비선형 방정식 풀이 과정

본 연구에서는 새로운 모델의 수렴해의 비교를 위해 기존 모델들의 비선형해를 제시하고, 두 가지 비선형방정식 풀이법으로 해를 구하여 결과를 비교하였다.

5. 수치해석

새로운 빔 모델이 제대로 작동하는 알아보기 위해 다음 Fig. 5의 형상의 빔으로 수치해석을 하였다^[2]. 재료의 탄성계수, 포아송비와 분포하중은 아래와 같다.

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}, \nu = 0.25, q(x) = 1.0 \sim 10.0 \text{ psi/in.}$$

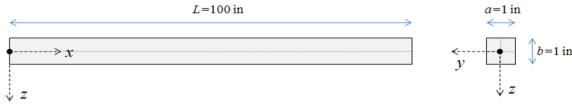


Fig. 5. 연구에 사용된 빔의 형상^[2]

Fig. 6의 경계 조건으로 빔의 양단이 롤러(roller)의 형태로 지탱된 경우를 살펴보자. 먼저 해의 정확성을 알아보기 위하여 새로운 모델과 기존 모델의 선형해(비선형성을 가정하지 않은 경우)를 하나의 요소로 구성된 매쉬(mesh)로 분석해보면, 새로운 모델의 해가 더 정확함을 알 수 있다. 또한 양단이 롤러로 고정되어 있으므로 빔은 순수하게 휨만을 경험해야 하며 x-방향으로의 변형률은 없어야 한다. 즉, 수학적으로 다음 식 (23)을 만족해야 한다.

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \cong 0 \tag{23}$$

하지만 기존의 모델의 경우 이 조건을 만족시키기 위해 $(dw/dx)^2$ 항에 대하여 감소된 적분(reduced integral)을 실시하며, 정확한 적분을 실시할 경우 요소의 잠김(locking)현상이 발생한다. 현재의 모델에서는 이와 같은 부수적인 작업 없이 위 조건이 만족되었다. 또한 혼합형 모델을 위해 포함된 기울기의 관한 조건 역시 비슷한 종류의 잠김을 유발한다.

$$\frac{dw}{dx} + \theta = 0 \tag{24}$$

식 (24)의 조건은 보다 직접적으로 잠김을 유발하는데 Table 5에 주어진 정확한 적분에 의한 혼합형 갈라킨 모델의 변위 값을 살펴보면, 참해인 0.52083333과 비교하여 0.53750000의 값을 나타내어 매우 부정확한 결과를 나타냄을 알 수 있다. 반면 현재의 모델은 0.520833334로 거의 참해와 같은 값을 제공한다. 우리가 수학적으로 미분방정식을 풀어서 얻을 수 있는 선

형해의 경우 현재의 유한요소 모델이 더 정확한 해를 제공함을 아래의 Table 5와 Table 6을 통해서 알 수 있다.

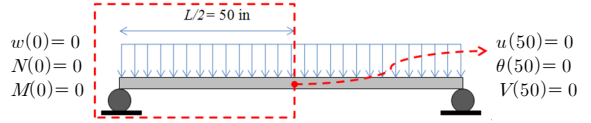


Fig. 6. 양단이 롤러로 고정된 빔의 경계 조건

Table 5. 각 모델별 오일러-베르누이 빔의 선형 해 비교(1조각 매쉬, 2차 형상함수)

모델명 변수	★참해	현재	최소자승	갈라킨 (혼합형)
변위	0.520833333	0.520833334	0.520833337	0.537500000
굽힘 모멘트	1250.00000	1250.00000	1250.00000	1250.00000
전단력	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000
중심 기울기	-0.016666666	-0.016666667	-0.016666668	-0.017500000

Table 6. 각 모델별 티모셴코 빔의 선형 해 비교(1조각 매쉬, 2차 형상함수)

모델명 변수	★참해	현재	최소자승	갈라킨 (혼합형)
변위	0.520958333	0.520958334	0.520958336	0.537625000
굽힘 모멘트	1250.00000	1250.00000	1250.00000	1250.00000
전단력	50.0000000	50.0000000	50.0000000	50.0000000
중심 기울기	-0.016666666	-0.016666667	-0.016666668	-0.017500000

다음과 같은 양단이 힌지로 고정된 경우(Fig. 7)와 완전히 고정된 경우(Fig. 8)에 대하여 비선형 분석을 실시해 보자.

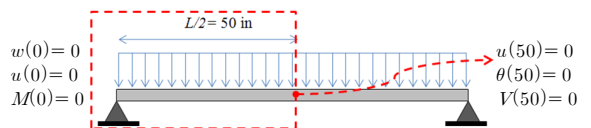


Fig. 7. 양단이 힌지로 고정된 빔의 경계 조건

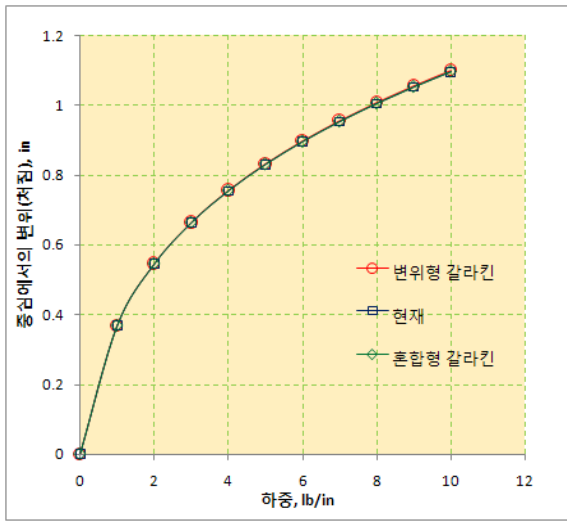


Fig. 8. 양단이 힌지로 고정된 오일러 빔의 유한요소 모델별 비선형 분석 결과(w , 직접 반복법, 2차 형상함수 \times 5조각 매쉬 사용)

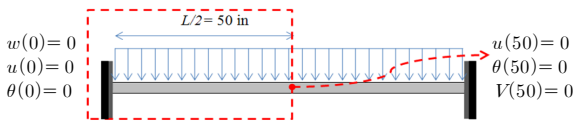


Fig. 9. 양단이 완전히 고정된 빔의 경계 조건

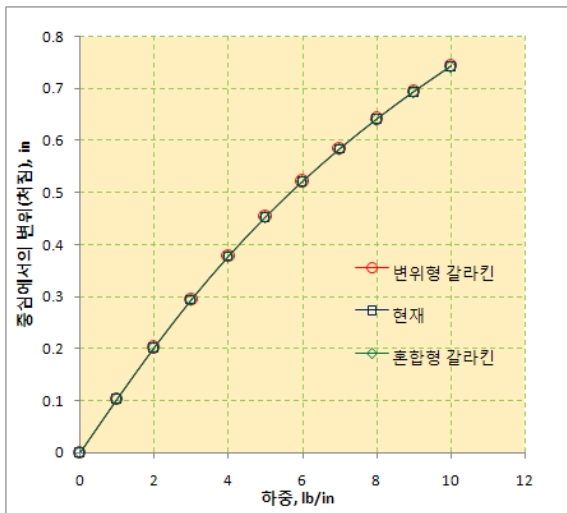


Fig. 10. 양단이 완전히 고정된 티모셴코 빔의 유한요소 모델별 비선형 분석 결과(w , 뉴턴 반복법, 2차 형상함수 \times 5조각 매쉬 사용)

비선형 분석의 경우 기존의 알려진 해와 비교하여 Fig. 8과 Fig. 10에 나타난 바와 같이 현재 모델의 해가 근사한 값들을 나타내고 있으므로 비선형해에 수렴했다고 판단 할 수 있다.

6. 결론

본 연구를 통하여 새로운 오차최소화 방식에 기초한 빔의 휨에 대한 유한요소모델을 제시하였다. 새로운 오차 최소화 방식을 통하여 개발된 모델의 장점은 다음과 같이 요약된다.

- ① 대칭계수행렬을 제공하여 역행렬 계산 시에 더 높은 효율성을 제공한다.
- ② 유한요소모델에서 나타나는 요소의 각종 잠김(locking)현상을 해소할 수 있다.
- ③ 혼합형 모델을 사용하여 변위뿐만 아니라, 합성력과 빔의 기울기에 대해서도 더 정확한 해를 제공한다.

위의 세 가지 장점들은 컴퓨터를 이용한 수치해석시 많은 이점을 제공할 뿐 아니라, 기존 모델로는 얻기 힘든 수준의 정확한 유한요소 해를 제공한다. 하지만 현재의 모델은 혼합형 모델에만 적용이 가능하고, 빔의 휨 이론을 기본으로 개발되었으며, 1차원 해석에만 적용되었기 때문에 다른 물리적 현상에 대한 확장을 위해서는 더 많은 연구가 필요할 것으로 판단된다.

Reference

- [1] J. N. Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2006.
- [2] J. N. Reddy, An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [3] J. N. Reddy, Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, J. Wiley, New York, 2002.
- [4] H. V. Smith, Numerical Methods of Integration, Studentlitteratur, Chartwell-Bratt, England, 1993.

- [5] N. S. Pucha, "A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element for the Nonlinear Analysis of Laminated Plates", *Comput. Struct.*(22), pp. 529~538, 1986.
- [6] F. Moleiro, C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares, "Mixed Least-squares Finite Element Model for the Static Analysis of Laminated Composite Plates", *Comput. Struct.* 86, 826~838, 2008.
- [7] J. L. Batoz, G. Dhatt, "Incremental Displacement Algorithms for Non-linear Problems", *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 14, 1262~1267, 1979.
- [8] E. Riks, "The Application of Newton's Method to Problem of Elastic Stability", *J. Appl. Mech.* 39, 1060~1066, 1972.