■ 論 文 ■

환승지체 및 가변수요를 고려한 대중교통 운행빈도 모형 개발

Transit Frequency Optimization with Variable Demand Considering Transfer Delay

유 경 상
(서울대학교 건설환경종합연구소 연구원)

김 동 규
(서울대학교 건설환경공학부 BK21 조교수)

전 경 수
(서울대학교 건설환경공학부 교수)

목 차

Key Words : 대중교통, 운행빈도 설계, 이중구조, 가변수요, 환승지체, 투입 차량 대수 제약, 그레디언트 투사
transit network, frequency design, bi-level, variable demand, transfer delay, fleet size constraint, gradient projection

요 약

본 논문에서는 기 운영되고 있는 도시부 대중교통을 대상으로 노선의 운행빈도 설계 문제의 모델링 및 해법 개발을 위한 방법론을 제시하였다. 개발된 운행빈도 모형은 이중구조 모형으로서 상위 운영자 모형은 이용 가능한 총 차량 대수 제약과 최소/최대 운행빈도 제약 하에 비용과 수익을 모두 포함한 순비용을 최소화하는 비선형 최적화 모형이고, 하위 사용자 모형은 가변수요와 용량제약으로 인한 노선의 혼잡, 그리고 노선 간 환승에 따른 지체를 고려한 확률적 사용자평형 수단/경로선택 모형이다. 모형의 해법으로는 상위 모형의 경우 목적함수의 그레디언트를 기반으로 하는 "그레디언트 투사 해법"을 제안하였고, 하위 모형의 경우는 기존의 "반복조정 해법"을 활용하였다. 또한, 구축된 모형과 해법을 소규모 예제네트워크에 적용하여 그 수렴성과 도출된 해를 분석하였다. 본 논문의 운행빈도 설계 방법론은 노선의 운영 효율성을 진단·평가하고, 투입 차량대수 제약 하에 대중교통 운영 효율을 개선하는 방안을 마련하는 데 있어 이론적인 토대로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

We present a methodology for modeling and solving the transit frequency design problem with variable demand. The problem is described as a bi-level model based on a non-cooperative Stackelberg game. The upper-level operator problem is formulated as a non-linear optimization model to minimize net cost, which includes operating cost, travel cost and revenue, with fleet size and frequency constraints. The lower-level user problem is formulated as a capacity-constrained stochastic user equilibrium assignment model with variable demand, considering transfer delay between transit lines. An efficient algorithm is also presented for solving the proposed model. The upper-level model is solved by a gradient projection method, and the lower-level model is solved by an existing iterative balancing method. An application of the proposed model and algorithm is presented using a small test network. The results of this application show that the proposed algorithm converges well to an optimal point. The methodology of this study is expected to contribute to form a theoretical basis for diagnosing the problems of current transit systems and for improving its operational efficiency to increase the demand as well as the level of service.

본 논문을 위해 유익하고 정성어린 논평과 지적을 해주신 익명의 심사위원님들에게 진심으로 감사드립니다. 본 연구는 서울대학교 공학연구소의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

I. 서론

1. 연구의 배경 및 목적

버스, 지하철 등의 도시 대중교통 수단은 대규모 수요 처리가 가능하며 친환경적, 비용 효율적인 특성을 지니고 있어, 그 중요성이 계속 증대되고 있다. 특히 버스의 경우 국내 대부분 지역에서 핵심적인 도시 대중교통 수단으로 기능하고 있다. 그럼에도 불구하고 지난 20여 년간 자가용 차량의 증가 및 도시철도의 건설로 버스 수요는 지속적으로 감소하고 있으며, 이러한 수요의 감소는 결국 민간 운영업체의 수익성 악화 및 서비스 질 저하로 귀결되고 있는 실정이다. 이에 정부/지자체는 민간업체에 의한 비효율적인 노선의 운영을 개선하고 대중교통 수요 진작을 위해 수익금공동관리 기반의 버스 준공영제, 노선입찰제, 수도권통합요금제 시행 등 많은 노력을 경주하고 있다.

그러나 이러한 정부/지자체의 정책 및 제도의 시행은 여론수렴, 관련법 제/개정, 당사자 간 이해 조정, 관련 인프라 정비 등 많은 시간과 비용이 소요되는 중장기 계획의 일환이므로, 이와 더불어 노선의 운행빈도 조정 등 비교적 적은 비용으로도 단기간에 시행이 용이한 운영 효율화 방안에 대한 연구도 필요할 것으로 보인다.

이와 관련된 기존 연구의 대부분은 고정된 수요를 바탕으로 운영자의 총수익(이익)을 최대화하거나 총비용을 최소화하기 위한 운행빈도 설계 모형으로서 투입 차량 대수에 대한 제약을 갖지 않는 계획단계의 모형이 주를 이루고 있다. 본 논문에서는 이미 정해진 노선을 기반으로 기 운영되고 있는 도시부 대중교통 수단을 대상으로 투입 차량 대수에 대한 제약 하에 비용과 수익을 모두 고려한 순비용을 최소화하는 운영단계의 운행빈도 설계에 대한 방법론을 제시하고자 한다. 특히, 대부분의 기존 연구와는 달리 사용자가 갖는 정보의 불완전성을 고려한 확률적인 모형을 사용하며, 운행빈도에 따른 수요의 가변성과 노선 간 환승에 따른 지체를 고려하여 최적화 모형을 구축한다.

이러한 연구를 통한 대중교통 운영효율화는 운영업체의 수익성을 제고하고 사용자에 대한 서비스 질을 향상시켜 이용 수요를 진작시키는 데 있어 도움이 될 것으로 판단된다.

2. 연구의 내용 및 범위

본 논문은 대중교통 공급자인 운영자와 수요자인 사용자의 행태를 동시에 고려한 운행빈도 설계 수리모형을 제시하고, 구축된 모형의 수학적인 분석을 통해 효과적인 해법을 개발하는 것을 목적으로 한다. 세부적인 연구 내용은 다음과 같다.

첫째, 운영자는 정부 또는 지자체로 단일하다고 가정하고, 시스템 내 이용 가능한 총 차량 대수 증가 없이 즉, 투입비용 제약 하에 각 노선의 최소/최대 운행빈도에 대한 제약을 고려하여 순비용을 최소화하는 운영자 모형을 개발한다.

둘째, 사용자는 운영자의 교통공급 수준에 따라 기종점간 이용 수단과 경로를 선택한다는 것을 전제로 수요의 가변성을 모형에서 고려하고, 또한 노선의 용량제약으로 인한 정류장에서의 혼잡과 환승에 따른 지체를 반영할 수 있는 사용자 모형을 구축한다.

셋째, 구축된 모형과 해법을 소규모 네트워크에 적용하여 개발된 해법의 수렴성을 확인하고, 도출된 해를 분석한다.

본 논문은 총 6개의 장으로 구성된다. Ⅱ장에서는 운행빈도 설계 모형을 포함하는 대중교통 운영설계에 대한 선행연구를 고찰하고, Ⅲ장에서는 비협조적인(non-cooperative) Stackelberg 게임을 기반으로 하는 이중구조(bi-level)의 운행빈도 설계 수리모형을 구축하고 분석한다. Ⅳ장에서는 Ⅲ장의 모형분석 결과를 토대로 효과적인 해법을 개발하고, Ⅴ장에서는 소규모 네트워크에 개발된 모형과 해법을 적용하여 결과를 평가한다. 마지막으로 Ⅵ장에서는 본 연구의 성과 및 의의를 정리하고, 향후 추가 연구가 필요한 부분을 제시한다.

II. 선행 연구 고찰

대중교통 운행빈도 결정은 계획단계에서 노선설계와 함께 이루어지는 경우와, 정해진 노선을 기반으로 운영단계에서 이루어지는 경우로 나눌 수 있다. 전자의 경우는 노선을 먼저 설계한 후 예상되는 기종점 수요를 각 노선에 배정하고, 배정된 수요에 대응할 수 있도록 서비스 차원에서 운행빈도를 결정하는 것이고, 후자의 경우는 노선 운영효율 개선을 위해 최적의 운행빈도를 결정하는 것이다. 본 논문은 후자의 경우를 연구 대상으로 하므로, 여기에 관련된 선행 연구를 간략히 고찰하였다.

LeBlanc(1988)은 노선의 최소 운행빈도에 대한 제약 하에서 대중교통 차량을 포함한 도로의 차량통행량을 최소화하기 위한 이중구조(bi-level) 운행빈도 모형과

해법을 개발하였다. 이 연구에서는 도로교통과 대중교통을 동시에 고려함으로써 대중교통 수요의 가변성을 반영하였다. 변동부등식 형태의 결정적 사용자평형 통행배정 모형(이하 DUE 모형)을 사용자의 경로선택 모형으로 이용하였고, Hooke-Jeeves의 단순패턴탐색 알고리즘을 해법으로 제시하였다.

Fernández & Marcotte(1992)는 대중교통 시스템 내 다수의 운영자 간 평형상태를 총이익 최대화 측면에서 변동부등식으로 표현하였다. 즉, 운영자가 특정 노선의 운행차량을 다른 노선에 변경 투입하여 이익을 증가시킬 수 없는 상태를 운영자 평형상태로 정의하여 각 노선에 투입되는 차량 수를 결정하고자 하였다. 구축된 모형의 해법으로는 Block-Jacobi 방법을 제안하였다.

Constantin & Florian(1995)은 Spiess & Florian (1989)의 최적전략 통행배정모형을 기반으로 사용자의 총통행시간을 최소화하는 운행빈도 결정 문제를 Min-Min 최적화 모형으로 구축하고, 그레디언트 투사 방법을 이용한 해법을 제시하였다. 그러나 이 모형은 노선의 혼잡과 환승을 고려하지 못하고 있으며, 노선의 운영과 관련된 차량 운행비용이나 운영수익 등이 모형에 반영되어 있지 않은 단점이 있다.

Gao, Sun & Shan(2004)은 De Cea & Fernández (1993)의 경로구간 네트워크 표현 방법과 BPR 형태의 통행시간함수, 변동부등식 형태의 DUE 모형을 이용하여 운행빈도를 최적화하는 문제를 이중구조 모형으로 구축하였다. 이 연구에서는 최소 운행빈도 제약 하에 사용자의 총통행시간과 운영자의 총차량운행비용의 합을 최소화하는 운영자 모형을 제시하였고, 해법으로는 모형의 민감도 분석 및 선형근사를 통한 휴리스틱 알고리즘을 제시하였다.

Zhou, Lam & Heydecker(2005)는 내쉬평형이론을 기반으로 다수의 운영자간 노선의 요금 평형상태에 대해 연구하였으며, Lam & Zhou(2000)의 확률적 사용자평형 통행배정모형(이하 SUE 모형)을 이용하여 사용자의 경로선택을 모사하였다.

Monyrath(2006)는 개인차량, 버스, 자전거 등 다수단을 고려하여 총통행시간과 총차량운행비용의 합을 최소화하는 이중구조 운행빈도 모형을 구축하고, 해법으로는 Hooke-Jeeves 단순패턴탐색 알고리즘을 제시하였다.

Fernández, De Cea & Malbran(2008)은 최소 운행빈도 제약 하에 총사회적 비용[1)]을 최소화하는 운영자 모형과 변동부등식 형태의 DUE 모형으로 구성된 이중구조 운행빈도 모형을 구축하고, Hooke- Jeeves 알고리즘을 이용한 해법을 제안하였다.

지금까지 살펴본 대부분의 선행 연구는 운영자와 사용자 모형을 모두 포함하는 이중구조 모형의 형태로 운행빈도 설계 모형을 구축하였다. 운영자 모형은 대부분 최소 운행빈도를 제약조건으로 설정하였으며, 목적함수는 연구자 및 연구 목적에 따라 다양한 형태로 구축하였다. 또한, 사용자 모형의 경우 대부분 노선의 혼잡을 고려한 BPR 통행시간함수와 변동부등식 형태의 DUE 모형을 활용하고 있으나, 환승으로 인한 지체 효과는 모형에서 고려하지 못하고 있다. 나아가 이중구조 모형의 특성 상 해를 구하는 과정이 매우 복잡하고 어려워 정형화된 해법이 존재하지 않고, 모형의 민감도 분석을 수행하거나 단순패턴탐색 등 휴리스틱한 방법에 대부분 의존하였으며, 도출된 해 또한 유일 전역성이 보장되지 않는 지역 최적해였다.

전술한 선행연구 고찰 결과와 본 연구의 목적을 토대로 본 논문의 운행빈도 모형과 해법을 다음과 같이 개발하고자 한다.

첫째, 선행연구에서와 같이 운영자와 사용자의 행태를 동시에 고려한 이중구조(bi-level) 형태의 운행빈도 설계모형을 구축한다. 둘째, 운영자 모형은 사용자의 통행비용과 운영자의 운영비용 및 수익을 모두 고려하여 순비용 최소화를 목적함수로 설정한다. 제약식으로는 일반적으로 기존 연구에서 고려되었던 최소 운행빈도 제약뿐만 아니라 시스템 내 이용 가능한 총 차량 대수 제약(비용제약)과 물리적인 배차간격을 고려한 최대 운행빈도 제약을 함께 고려한다. 셋째, 사용자 모형은 기종점 수요를 가변적인 변수로 취급하고, 네트워크의 통행시간/노선에 대한 사용자 정보의 불완전성을 가정한 SUE 모형을 사용하되, 혼잡 및 환승을 고려할 수 있도록 확장한다. 마지막으로, 모형의 수리적인 분석을 통해 목적함수의 그레디언트를 기반으로 하는 효과적인 해법을 개발하고, 예제 네트워크 적용을 통해 해법의 수렴성과 도출된 해의 특성을 분석한다.

이와 같이 구축된 본 논문의 모형 및 해법과 선행 연구들과의 차이점은 <표 1>에서 보는 바와 같다.

1) 총사회적 비용은 차량운행거리에 비례하는 서비스 생산비용과 사용자가 인지하는 통행비용 및 혼잡으로 인한 지체비용으로 구성됨.

<표 1> 선행연구 및 본 논문 모형 비교

기존 연구	운영자모형			사용자 모형	혼잡	수요	환승	해법
	변수	목적 함수	제약식					
LeBlanc(1988)	f	Min(tcf)	mf	DUE	○	Vd	○	HJ
Fernández et al.(1992)	fs	Max(tb)	-	DUE	○	Fd	n/a	BJ
Constantin et al.(1995)	f	Min(ttc)	mf & tfs	최적 전략	X	Fd	X	GP
Gao et al.(2004)	f	Min(ttc+toc)	mf	DUE	○	Fd	X	SnA/LA
Zhou et al.(2005)	F	Max(tb)	-	SUE	○	Vd	X	SnA/MSA/IB
Monyrath(2006)	f	Min(ttc+toc)	mf	DUE	○	Vd	X	HJ
Fernández et al.(2008)	f	Min(tsc)	mf	DUE	○	Fd	X	HJ
본 논문 모형	f	Min(nc)	mf & Mf & Tfs	SUE	○	Vd	○	GP/IB

f : 운행빈도, fs : 차량대수(fleet size), F : 요금, tcf : 도로 차량통행량, tb : 총이익, ttc : 총통행비용, toc : 총차량운행비, tsc : 총사회적비용, nc : 순비용, mf : 최소운행빈도, Mf : 최대운행빈도, tfs : 총차량대수, Fd : 고정수요, Vd : 가변수요, HJ : Hooke-Jeeves, BJ : Block-Jacobi, GP : Gradient Projection, SnA : 민감도분석, LA : 선형근사, MSA : 이동평균법, IB : 반복조정법

III. 운행빈도 모형

일반적으로 대중교통에서 운영자가 정한 각 노선의 운행빈도는 사용자의 수단/경로선택에 영향을 주며, 또한 사용자의 수단/경로선택은 운영자의 운영비용과 수익에 영향을 주는 상호작용 관계에 있다. 따라서 운영자의 운행빈도 결정 문제는 일반적으로 사용자의 행태를 동시에 고려하는 운영자/사용자간 비협조적인 Stackelberg 게임으로 모사될 수 있다(Fisk(1984), Fernández et al.(2008)).

본 논문에서도 이를 기반으로 운영자/사용자의 이중구조 모형을 구성하여 최적의 운행빈도를 결정하고자 하며, 상위레벨에서는 운영자의 운행빈도 설계 모형, 하위레벨에서는 상위레벨에서 결정된 운행빈도를 기반으로 사용자의 수단선택과 경로선택을 각각 최적화하는 모형으로 구축하였다. 모형에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

[사용 기호][2)3)]

$G(N,E)$: 노선구간 네트워크
$G(N,S)$: 경로구간 네트워크
N : 노드 집합($\equiv\{n\}$)
E : 노선구간 집합($\equiv\{e\}$)
S : 경로구간(링크) 집합($\equiv\{s\}$)
L : 노선 집합($\equiv\{l\}$)
R : 기종점쌍 집합($\equiv\{r\}$)
P_r : 기종점쌍 r에 대한 경로 집합
B : 이용 가능한 총 차량 대수
f_l, $\mathbf{f}$: 노선 l의 운행빈도(frequency)
$\underline{f_l}$: 노선 l의 최소 운행빈도
$\overline{f_l}$: 노선 l의 최대 운행빈도
T_l : 노선 l 차량의 1회 총운행시간
k_e, $\mathbf{k_e}$: 노선구간 e의 용량
t_l^s : 경로구간 s에 포함된 노선 l의 차내통행시간
c_s, $\mathbf{c}$: 경로구간 s의 기대 총통행비용
t_s : 경로구간 s의 기대 차내통행시간
w_s : 경로구간 s에 포함된 노선의 기대 대기시간
q_s, $\mathbf{q}$: 혼잡으로 인한 경로구간 s의 지체
q_e : 혼잡으로 인한 노선구간 e의 지체
η_p^r : 기종점쌍 r, 경로 p상의 기대 환승 횟수
τ : 환승에 따른 지체 시간
ρ : 차내통행시간에 대한 대기시간 가중치
c_p^r : 기종점쌍 r, 경로 p의 기대 총통행시간
w_p^r : 기종점쌍 r, 경로 p의 기대 총대기시간
t_p^r : 기종점쌍 r, 경로 p의 기대 총차내통행시간
q_p^r : 기종점쌍 r, 경로 p의 총지체
v_s, $\mathbf{v}$: 경로구간 s의 승객통행량
v_e, $\mathbf{v_e}$: 노선구간 e의 승객통행량($=\sum_r\sum_p\sum_s \gamma'_{es}\delta_{sp}^r h_p^r$)
h_p^r, $\mathbf{h}$: 기종점쌍 r, 경로 p의 승객통행량
d_r, $\mathbf{d}$: 기종점쌍 r의 승객통행량
u_r, $\mathbf{u}$: 기종점쌍 r의 대중교통 기대 비효용

2) 기호 우측의 굵은 글자는 좌측 값을 원소로 하는 벡터나 행렬임.
3) 본 논문에서는 $\sum_l \equiv \sum_{l\in L}$, $\sum_r \equiv \sum_{r\in R}$, $\sum_p \equiv \sum_{p\in P_r}$, $\sum_s \equiv \sum_{s\in S}$, $\sum_e \equiv \sum_{e\in E}$, $\forall l \equiv \forall l\in L$, $\forall r \equiv \forall r\in R$, $\forall p \equiv \forall p\in P_r$, $\forall s \equiv \forall s\in S$, $\forall e \equiv \forall e\in E$로 정의함.

u_r^{car} : 기종점쌍 r의 개인교통 기대 비효용
x_s^l : 경로구간 s, 노선 l의 선택확률 $(\equiv f_l / \sum_{l'} \delta_{l',s} f_{l'})$
γ_{es} : 노선구간 e가 경로구간 s에 포함되면 1, 아니면 0
$\gamma_{es}^{'}$, Γ' : 경로구간 s, 노선 l의 노선구간 e 선택확률 $(\equiv \gamma_{es} x_s^l)$
δ_{sp}^r, Δ : 경로구간 s가 기종점쌍 r의 경로 p에 포함되면 1, 아니면 0
$\delta_{l,s}$: 노선 l이 경로구간 s에 포함되면 1, 아니면 0
$D_r(u_r)$: 기종점 r의 통행수요 함수
$D_r^{-1}(d_r)$: $D_r(u_r)$의 역함수
$D_r^{\max}$: 기종점쌍 r의 총통행수요
O_l : 노선 l 차량의 운행비용
F_r : 기종점쌍 r의 통행요금
π : 시간의 비용 환산 계수
Ψ : 상위레벨 모형의 가능해영역
Ω : 하위레벨 모형의 가능해영역

1. 네트워크 표현 및 통행비용 함수

본 논문의 운행빈도 모형 구축을 위해 사용된 네트워크 표현방법은 De Cea & Fernández(1993)의 경로구간(route-section)을 기반으로 한다. 경로구간 네트워크는 <그림 1>에서 보는 바와 같이 노선구간 기반 네트워크에서 환승이 가능한 정류장만을 노드로 하고 이들 노드를 연결하는 링크인 경로구간으로 구성된다.

각 경로구간에는 여러 개의 노선이 존재할 수 있으며, 정류장 도착승객은 일반적으로 이들 노선 중에서 먼저 도착하는 차량을 이용한다고 가정한다. 이러한 경로구간 네트워크에서 정류장으로의 차량 도착간격이 지수분포를 따르고 승객이 균일분포로부터 무작위로 도착(random arrival)한다고 가정할 때, 각 경로구간의 기대 총통행시간은 식(1)과 같다.

$$c_s = \rho w_s + t_s + q_s = \frac{\rho}{\sum_l \delta_{l,s} f_l} + \frac{\sum_l \delta_{l,s} f_l t_l^s}{\sum_l \delta_{l,s} f_l} + q_s,\ \forall s \quad (1)$$

식(1)의 경로구간 기대 총통행시간과 환승에 따른 지체 시간을 고려하여 기종점쌍 r상의 경로 p에 대한 기대 경로통행시간을 나타내면 식(2)와 같다.

$$\begin{aligned} c_p^r &= w_p^r + t_p^r + q_p^r + \eta_p^r \tau = \sum_s \delta_{sp}^r c_s + \eta_p^r \tau \quad (2) \\ &= \sum_s \delta_{sp}^r (\rho w_s + t_s + q_s) + (\sum_s \delta_{sp}^r - 1)\tau \\ &= \sum_s \delta_{sp}^r (\rho w_s + t_s + q_s + \tau) - \tau, \quad \forall p, \forall r \end{aligned}$$

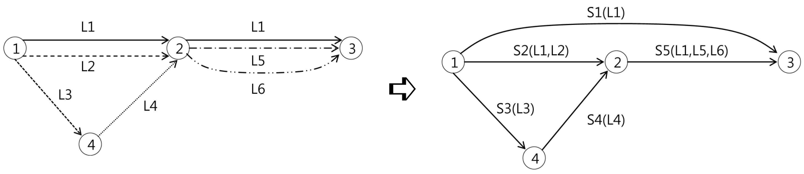
2. 기종점 수요함수

노선의 운행빈도에 따른 기종점간 대중교통 수요의 가변성을 모형에서 고려하기 위해 본 논문에서는 식(3)과 같이 개인교통과 대중교통의 2개 수단을 포함한 이항 로짓 형태의 수요함수를 사용하였다. 여기서, 개인교통 수단의 기대 비효용은 노선 운행빈도와 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것으로 가정하였다 (즉, 도로의 혼잡은 항상 일정하다고 가정함).

$$\begin{aligned} d_r = D(u_r) &\equiv D_r^{\max} \frac{1}{1+\exp(-\beta_r(u_r^{car} - u_r))} \quad (3) \\ &= D_r^{\max} \frac{1}{1 + a_r \exp(\beta_r u_r)},\ \forall r \in R \end{aligned}$$

3. 이중구조(bi-level) 모형

대중교통 각 노선의 최소/최대 운행빈도에 대한 제약과 총 투입 차량 대수에 대한 제약을 갖는 순비용 최소화 운영자 모형과, Lam et al.(1999, 2000)의 가변수요 SUE 모형을 기반으로 정류장에서의 환승을 고려하여 확장한 사용자 모형을 각각 상/하위레벨로 하는 운행빈



<그림 1> 경로구간 네트워크 표현

도 이중구조 모형을 수식으로 나타내면 식(4)~식(12)와 같다.

[상위레벨(UP): 운영자 모형]

$$Min_{\{\mathrm{f}\}}\ Z_1 = \sum_l f_l O_l + \pi \sum_s c_s(\mathrm{f}, \mathrm{q}^*) v_s^* - \sum_r D_r(u_r(\mathrm{f}, \mathrm{q}^*)) F_r \quad (4)$$

$$s.t \quad \sum_l f_l T_l \leqq B \quad (5)$$

$$-f_l \leqq -\underline{f_l},\ \forall l \quad (6)$$

$$f_l \leqq \overline{f_l},\ \forall l \quad (7)$$

[하위레벨(LP): 사용자 모형]

$$Min_{\{\mathrm{h},\mathrm{d}\}}\ Z_2 = \sum_r \sum_p h_p^r(\ln h_p^r - 1) - \sum_r d_r(\ln d_r - 1) + \theta \sum_s (\rho w_s + t_s + \tau) v_s - \theta \sum_r \sum_p h_p^r \tau - \theta \sum_r \int_0^{d_r} D_r^{-1}(y) dy \quad (8)$$

$$s.t \quad \sum_p h_p^r(\mathrm{f}^*, \mathrm{q}) = d_r,\ \forall r \quad (9)$$

$$v_s = \sum_r \sum_p \delta_{sp}^r h_p^r,\ \forall s \quad (10)$$

$$\sum_r \sum_p \sum_s \gamma_{es}' \delta_{sp}^r h_p^r \leq k_e(\mathrm{f}^*),\ \forall e \quad (11)$$

$$h_p^r \geqq 0,\ d_r \geqq 0, \forall p, \forall r \quad (12)$$

여기서, 식(4)는 시스템의 순비용을 나타내는데 첫 번째 항은 운영자의 차량운행비용을, 두 번째 항은 사용자의 총통행비용을, 그리고 세 번째 항은 운영자의 총수익을 각각 의미한다. 또 식(5)는 시스템 내 이용 가능한 총 차량대수에 대한 제약을, 식(6) 및 식(7)은 최소/최대 운행빈도에 대한 제약을 각각 나타낸다. 식(8)은 하위레벨 모형이 SUE 모형이 되도록 하기 위한 목적함수이고, 식(9)는 기종점간 통행량보존 제약을, 식(10)은 경로구간 통행량에 대한 정의를, 식(11)은 노선구간의 용량에 대한 제약을 각각 나타낸다. 상위 모형에 포함된 각 경로구간의 지체(q^*)와 통행량(v_s^*)은 하위 모형의 해로서, 지체(q^*)의 경우 식(11)의 노선구간 용량 제약으로부터 내생적으로 결정된다.

4. 모형의 분석

1) 사용자 모형

식(8)~식(12)에 대한 라그랑지함수(Lagrangian function)와 최적해에 대한 KKT(Karush-Kuhn-Tucker) 필요조건은 각각 식(13)과 식(14)~식(16)과 같다.

$$\mathcal{L} = Z_2 + \sum_r l_r(d_r - \sum_p h_p^r) + \sum_e m_e(k_e - \sum_r \sum_p \sum_s \gamma_{es}' \delta_{sp}^r h_p^r) \quad (13)$$

여기서, l_r, m_e는 라그랑지승수(Lagrange multipliers)

[KKT 필요조건]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p^{r*}} \geqq 0, \quad h_p^{r*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_p^{r*}} = 0, \quad \forall p, \forall r \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_r^*} \geqq 0, \quad d_r^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_r^*} = 0, \quad \forall r \quad (15)$$

$$m_e^*(k_e - \sum_r \sum_p \sum_s \gamma_{es}' \delta_{sp}^r h_p^{r*}) = 0,\ m_e^* \leqq 0,\ \forall e \quad (16)$$

식(2), 식(9) 및 식(14)로부터 경로통행량(h_p^{r*})은 식(17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_p^{r*} = \frac{\exp(-\theta(w_p^r + t_p^r + \eta_p^r \tau) + m_p^{r*})}{\sum_{p'} \exp(-\theta(w_{p'}^r + t_{p'}^r + \eta_{p'}^r \tau) + m_{p'}^{r*})}\ d_r^* \quad (17)$$

식(17)의 경로통행량은 $m_e^* = -\theta q_e^*,\ \forall e$일 때 식(18)과 같이 경로 통행시간에 기반을 둔 로짓 모형의 형태로 나타나므로 본 논문의 사용자 모형이 SUE 모형이 되기 위한 필요충분조건은 평형상태의 노선구간 지체 q_e^*가 $-m_e^*/\theta$이어야 한다(Bell(1995), Lam et al.(1999)). 따라서 식(11)과 식(6)으로부터 $k_e > v_e^*(=\sum_r \sum_p \sum_s \gamma_{es}' \delta_{sp}^r h_p^{r*})$이면 $m_e^* = 0$이므로 해당 노선구간에 지체가 발생하지 않고, $k_e = v_e^*$이면 $m_e^* \leqq 0$이 되어 $-m_e^*/\theta$만큼의 지체가 발생한다는 것을 알 수 있다. 그러므로 식(17)은 기대 경로통행시간을 기반으로 식(18)과 같이 표현할 수 있다.

$$h_p^{r*} = \frac{\exp(-\theta c_p^{r*})}{\sum_{p'} \exp(-\theta c_{p'}^{r*})} d_r^* \tag{18}$$

또, 식(15)로부터 기종점쌍(r)에 대한 기대 비효용(u_r^*)과 수요(d_r^*)는 식(19) 및 식(20)과 같이 도출될 수 있다.

$$u_r^* = D_r^{-1}(d_r^*) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_p \exp(-\theta c_p^{r*}) \tag{19}$$

$$d_r^* = D_r\left(-\frac{1}{\theta} \ln \sum_p \exp(-\theta c_p^{r*})\right) \tag{20}$$

식(19)로 계산되는 기대 비효용은 기종점간 다수의 경로가 존재할 경우 각 경로의 기대 경로통행시간을 이용한 결합 기대비효용(composite expected disutility)으로 나타나는데, 이는 다항로짓모형의 접근성지표(measure of accessibility)와 그 형태가 동일하며, 확률적 사용자평형 상태에서 해당 기종점간 사용자가 인지하는 최소 기대 경로통행시간을 의미한다(Ben-Akiva & Lerman(1985)).

2) 운영자 모형

식(4)의 목적함수는 식(1)~식(3) 및 식(20)과 사용자 모형으로부터 결정된 경로구간 지체($\mathbf{q}^*$) 및 통행량(v_s^*) 하에서 식(21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z_1 = \sum_l f_l O_l + \pi \sum_s c_s(\mathbf{f}, \mathbf{q}^*) v_s^* - \sum_r \left\{ \frac{D_r^{\max}}{1 + a_r \exp\left[(-(\beta_r/\theta) \ln \sum_p \exp(-\theta c_p^r(\mathbf{f}, \mathbf{q}^*))\right]} \right\} \tag{21}$$

식(21)은 운행빈도(f)에 대해 미분가능하고 연속인 비선형함수이다. 또, 제약식 식(5)~식(7)은 운행빈도의 선형함수이므로 가능해영역이 볼록(convex)하다. 따라서 운영자모형은 볼록집합에서 정의되는 비선형 최적화 문제이므로 유일 전역해를 갖는지의 여부는 목적함수의 볼록성에 따른다. 그러나 식(21)의 볼록성 여부를 수학적·분석적으로 판별하기가 쉽지 않으므로 본 논문에서는 지역최적해(local optima)를 개선 해로 그대로 사용하기로 한다.

모형의 해법 개발을 위해 식(1)~식(3) 및 식(19)로부터 노선 운행빈도에 대한 목적함수(식(4))의 그레디언트를 계산하면 식(22)~식(25)와 같다.

$$\frac{\partial Z_1}{\partial f_l} = O_l + \pi \sum_s \frac{\partial c_s}{\partial f_l} v_s^* - \sum_r \frac{\partial D_r}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial f_l} F_r, \quad \forall l \tag{22}$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial u_r} = -\frac{\beta_r a_r D_r^{\max} \exp(\beta_r u_r(\mathbf{f}, \mathbf{q}^*))}{\left[1 + a_r \exp(\beta_r u_r(\mathbf{f}, \mathbf{q}^*))\right]^2}, \quad \forall r \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial f_l} = \frac{\sum_p \left[\exp(-\theta c_p^r(\mathbf{f}, \mathbf{q}^*)) \sum_s \delta_{sp}^r \frac{\partial c_s}{\partial f_l}\right]}{\sum_p \exp(-\theta c_p^r(\mathbf{f}, \mathbf{q}^*))}, \quad \forall r, l \tag{24}$$

$$\frac{\partial c_s}{\partial f_l} = \frac{\delta_{l,s}(t_l^s \sum_k \delta_{k,s} f_k - \sum_k \delta_{k,s} f_k t_k^s - \rho)}{(\sum_k \delta_{k,s} f_k)^2}, \quad \forall s, l \tag{25}$$

식(23)으로부터 기종점 수요는 기대 비효용이 커질수록 감소한다. 반면, 기대 비효용은 해당 기종점간 경로에 포함되는 특정 노선의 운행빈도를 증가시킬 때, 해당 노선의 경로구간 차내통행시간(t_l^s)과 타 노선의 차내통행시간과의 상대적인 크기에 따라 감소 또는 증가할 수 있다.

Ⅳ. 모형의 해법

본 논문의 이중구조 모형은 우선 운영자의 초기 운행빈도가 주어진 상태에서 하위 사용자 모형의 해를 구하고, 여기에서 얻은 평형상태 경로구간 지체($\mathbf{q}^*$)와 통행량(v_s^*)을 고정한 후 상위 운영자 모형의 해인 운행빈도를 계산한다. 이러한 방식으로 운행빈도가 수렴할 때까지 상/하위 모형의 해를 구하는 과정을 반복한다. 본 논문에서는 하위 사용자 모형의 해법으로 Bell(1995) 및 Lam et al.(1999, 2000)이 제시한 "반복조정법(iterative balancing method)"을 확장된 모형에 맞게 수정, 적용하였고, 상위 운영자 모형의 해법으로는 목적함수의 그레디언트를 이용한 "그레디언트 투사법(gradient projection method)"을 이용하였다. 반복조정법은 안장점(saddle point) 이론을 기반으로 알고리즘의 매 단계에서 식(13)의 라그랑지함수 값을 최대가 되도록 라그랑지승수를 반복적으로 조정해나가는 방법으로 해가 존재할 경우 반드시 유일한 값으로 수렴하는 것으로 알려져 있다(Bell(1995)). 그레디언트 투사법은 매 단계에서 목적함수의 값을 가장 빠르게 감소시키는 음의 그레디언트를 가능해영역에 투사한 방향으로 해를 탐색해 가는 해법이다. 이 해법은 선형제약식을 갖는 일반적인 비선형계획 문제에 적용하였을 때 비교적 빠르게 해에 수렴하는 것으로 알려져 있다(Avriel(1976)).

전술한 해법들을 사용하여 본 논문의 이중구조 모형 해법을 기술하면 다음과 같다.

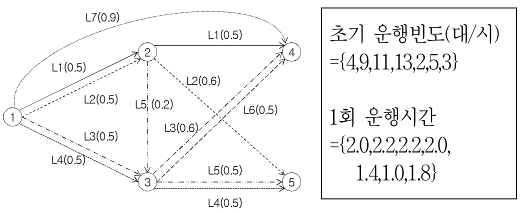
[통합 해법][4)]

1. (초기화) $f := f^0 \in \Psi$, k:=0
2. (k번째 반복 단계)
   - 2-1 (사용자의 수단/경로 선택)
     f^k가 주어진 상태에서 반복조정법을 통해 하위모형의 해를 구한다.
     $\Rightarrow\ q^k,\ d^k,\ h^k,\ v^k \in \Omega(f^k)$
   - 2-2 (운영자의 운행빈도 결정)
     2-1의 지체 q^k 및 통행량 v^k에서 목적함수 Z_1의 그레디언트 $\nabla_f Z_1(f, q^k, v^k)$를 구하고, 그레디언트 투사법을 이용하여 상위모형의 해를 구한다.
     $\Rightarrow\ f^{k+1} \in \Psi(q^k)$
3. (종료조건 검사) $|Z_1^{k+1} - Z_1^k| \leq \epsilon$ 또는 $\| f^{k+1} - f^k \| \leq \epsilon$이면 종료한다.
   $\Rightarrow$ 최종해: $f^k \in \Psi,\ q^k,\ d^k,\ h^k,\ v^k \in \Omega(f^k)$
   그렇지 않으면, k:=k+1로 하고 2번 항목으로 돌아간다.

V. 모형의 적용

본 논문의 해법을 <표 2>의 기종점 수요 함수를 기반으로 <그림 2>의 소규모 네트워크에 적용하여 그 수렴성과 도출된 해를 분석하였다.

해법 적용을 위해 차량 1대의 용량은 100인, 시스템 내 이용 가능한 총 차량 대수는 100대, 최소/최대 운행



주) ()안은 차내통행시간

<그림 2> 적용 네트워크

<표 2> 기종점 수요 함수

기점 → 종점	수요함수
① → ④	$D_1(u_1) = 1,800 / [1 + \exp(-0.3(1-u_1))]$
① → ⑤	$D_2(u_2) = 2,600 / [1 + \exp(-0.5(1-u_2))]$
② → ④	$D_3(u_3) = 1,200 / [1 + \exp(-0.3(0.5-u_3))]$
② → ⑤	$D_4(u_{4)} = 2,400 / [1 + \exp(-0.5(0.5-u_4))]$

<표 3> 도출 해

노선	운행빈도		노선 통행량		
	초기	도출해	노선구간	초기	도출해
L1	4	14.43	①→②	125 (0)	1,169 (0)
			②→④	400 (2.67)	991 (0)
L2	9	1.37	①→③	402 (0)	136 (0)
			②→⑤	899 (0.52)	115 (0)
L3	11	1.00	①→③	687 (0)	75 (0)
			③→④	611 (0)	70 (0)
L4	13	12.48	①→③	988 (0)	1,166 (0)
			③→⑤	886 (0)	973 (0)
L5	2	20.00	②→③	200 (3.63)	2,000 (0.28)
			③→⑤	200 (3.22)	1,653 (0)
L6	5	11.16	③→④	178 (0)	546 (0)
L7	3	1.00	①→④	60 (0)	21 (0)
총수요				3,234	4,368
순비용				10,884	7,645

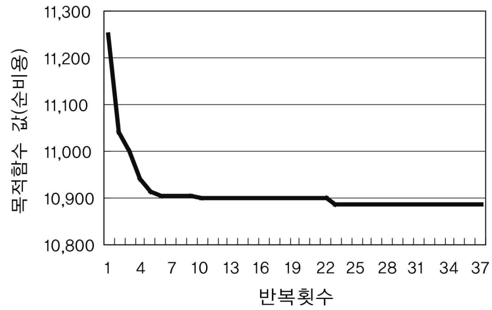
주) ()은 지체시간

빈도는 각각 1대/20대, 경로선택에 대한 민감도 θ는 1.0, 환승 지체 τ는 0.1시간, 대기시간 가중치 ρ는 2.0, 각 노선의 차량운행비용은 {30, 33, 33, 30, 21, 15, 17}, 시간-비용 환산계수 π는 2.0, 기종점 통행요금 F_r은 1.0으로 가정하였다.[5)]

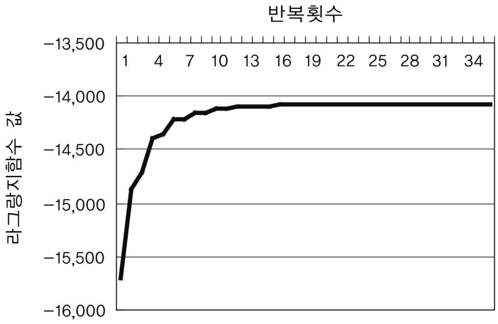
<표 3>은 본 논문의 해법을 통해 도출된 초기상태 및 최적상태에서의 운행빈도, 노선구간 통행량 및 기종점 수요를 나타낸다. 그리고 <그림 3> 및 <그림 4>는 각각 상위모형의 그레디언트 투사법과 하위모형의 반복조정법의 수렴성을 나타내고, <그림 5>는 이 두 해법을 통합한 해법의 수렴성을 나타낸다. <그림 6>은 통합해법의 반복단계에 따른 각 노선의 운행빈도의 변화를 나타낸다.

<표 3>의 도출 운행빈도를 살펴보면, 노선 1, 5, 6의 운행빈도를 증가시킴으로써 네트워크의 지체를 전반적으로 줄여 총수요를 증가시키고 순비용을 감소시킬 수 있음을 알 수 있다. 특히, 노선 5의 경우 모든 기종점간 통행에 이용 가능하기 때문에 순비용 측면에서 가장 효율

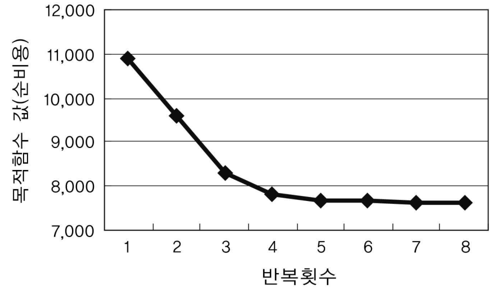
4) 반복조정법 - Bell(1995), Lam et al.(1999,2000) 참조
그레디언트 투사법 - Luenberger(1973), Avriel(1976) 참조
5) 차량운행비용 및 통행요금의 단위는 "천원"임



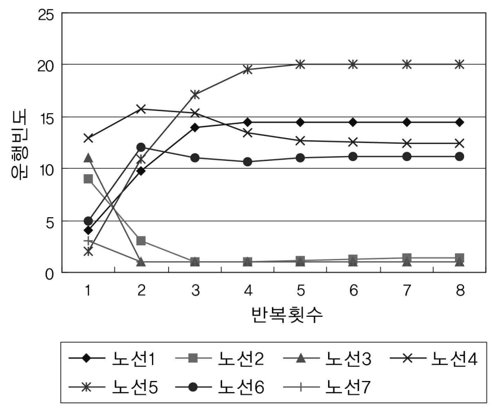
<그림 3> 그레디언트 투사법 수렴성



<그림 4> 반복조정법 수렴성



<그림 5> 통합 해법 수렴성



<그림 6> 노선 운행빈도 변화

이 좋은 것으로 나타났다. 반면, 노선 3은 노선 1에 비해 차내통행시간이 커 통행비용 측면에서 비효율적이고 노선 7은 ①→④의 기종점 통행만 이용할 수 있어 수익 측면에서 비효율적인 것으로 나타났다.

해법의 수렴성 측면을 살펴보면, <그림 3>~<그림 5>의 그래프에서 보는 바와 같이 본 논문에서 제안한 상위/하위모형의 그레디언트 투사법 및 반복조정법뿐만 아니라 이를 통합한 해법도 최적해에 비교적 잘 수렴함을 볼 수 있다. 그리고 <그림 6>을 살펴보면, 통합해법의 초기 몇 번의 반복단계에서는 효율적인 노선의 운행빈도는 급격히 증가하고 비효율적인 노선의 운행빈도는 급격히 감소하다 반복횟수가 늘어감에 따라 각 노선의 운행빈도가 조금씩 조정되는 것을 볼 수 있다.

Ⅵ. 결론 및 향후 연구과제

대중교통 운행빈도 설계모형에 대한 본 연구의 성과 및 의의를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 비용과 수익측면을 모두 포함한 순비용 최소화 관점에서 운영자와 사용자를 동시에 고려하고, 비협조적인 Stackelberg 게임이론을 기반으로 이중구조(bi-level)의 운행빈도 설계 모형을 구축하였다.

둘째, 운영자 모형은 최소 운행빈도 제약만을 갖는 다른 대부분의 연구와는 달리 시스템 내 이용 가능한 총 차량대수 제한을 통한 비용제약과 최대 운행빈도에 대한 물리적인 제약을 함께 고려하였다.

셋째, 사용자 모형은 타 연구에서 이용되는 총통행시간 최소화를 위한 DUE 모형 대신 사용자의 경로선택 행태를 보다 합리적으로 설명이 가능한 SUE 모형을 이용하였다. 특히, 운행빈도에 따른 수요의 가변성과 노선의 용량제약으로 인한 지체 효과 설명이 가능한 SUE 모형을 정류장에서의 환승으로 인한 지체가 고려된 모형으로 확장하여 구축하였다.

넷째, 모형의 수학적인 분석을 통한 효율적인 해법을 제시하였다. 특히 상위레벨 운영자 모형의 해법인 "그레디언트 투사법"은 목적함수의 값을 가장 빠르게 감소시킬 수 있는 음의 그레디언트를 기반으로 하고 있기 때문에, 기존 연구에서 주로 사용된 단순 패턴탐색기법(Hooke-Jeeves 알고리즘)보다는 효율적이고, 모형의 민감도 분석 등을 이용한 휴리스틱 해법보다는 구현 및 적용이 용이할 것으로 판단된다.

본 논문의 이중구조 운행빈도 설계 모형 및 그 해법은 기 운영되고 있는 대중교통 시스템의 노선 운영효율을

진단하고, 최소의 비용으로 이용 수요를 증대 시켜 운영 효율을 높일 수 있는 개선 방안을 마련하는 데 있어 이론적인 토대로 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 향후에는 본 논문의 모형과 해법을 토대로 하여 현실 네트워크를 대상으로 최적의 운행빈도를 결정하는 모형에 대한 연구가 지속적으로 이루어질 필요가 있으며, 기존의 단순패턴탐색 기법, 휴리스틱 해법 등의 다양한 해법과의 비교 연구와 도시철도 등 다 수단을 포함한 운행빈도 결정 모형에 대해서도 추가 연구가 필요할 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Avriel, M. (1976), "Nonlinear Programming: Analysis and Methods." Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
2. Bell, M.G.H. (1995), "Stochastic user equilibrium assignment in networks with queues." Transportation Research Part B 29(2), pp.125~137.
3. Ben-Akiva, M., and S.R. Lerman (1985), "Discrete choice analysis: theory and application to travel demand." MIT Press, Cambridge, MA.
4. Constantin, I., and M. Florian (1995), "Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bi-level programming approach." International Transactions in Operational Research 2(2), pp.149~164.
5. De Cea, J., and E. Fernández (1993), "Transit assignment for congested public transport systems: an equilibrium model." Transportation Science 27(2), pp.133~147.
6. Fernández, E., J. De Cea, and R.H. Malbran (2008), "Demand responsive urban public transport system design: methodology and application." Transportation Research Part A 42(10), pp.951~972.
7. Fernández, E., and P. Marcotte (1992), "Operators-users equilibrium model in a partially regulated transit system." Transportation Science 26(2), pp.93~105.
8. Fisk, C.S. (1984), "Game theory and transportation systems modeling." Transportation Research Part B 18B, pp.301~313.
9. Gao, Z.-Y., H.-J. Sun, and L.-L. Shan (2004), "A continuous equilibrium network design model and algorithm for transit systems." Transportation Research Part B 38(3), pp.235~250.
10. Lam, W.H.K., and J. Zhou (2000), "Optimal fare structure for transit network with elastic demand." Transportation Research Record 1733, pp.8~14.
11. Lam, W.H.K., Z.-Y. Gao, K.S. Chan, and H. Yang (1999), "A Stochastic user equilibrium assignment model for congested transit network." Transportation Research Part B 33(5), pp.351~368.
12. LeBlanc, L.J. (1988), "Transit system network design." Transportation Research Part B 22(5), pp.383~390.
13. Luenberger, D.G. (1973), "Introduction to linear and nonlinear programming." Addison-Wesley Publishing, Menlo Park, California.
14. Monyrath, K. (2006), "Frequency design of bus transit in mixed urban transport network." Tokyo Institute of Technology, Master's Thesis.
15. Spiess, H., and M. Florian (1989), "Optimal strategies: a new assignment model for transit networks." Transportation Research Part B 23B(2), pp.83~102.
16. Zhou, J., W.H.K. Lam, and B.G. Heydecker (2005), "The generalized Nash equilibrium model for oligopolistic transit market with elastic demand." Transportation Research Part B 39(6), pp.519~544.

♧ 주 작 성 자 : 유경상
♧ 교 신 저 자 : 김동규
♧ 논문투고일 : 2009. 8. 3
♧ 논문심사일 : 2009. 10. 6 (1차)
2009. 11. 3 (2차)
2009. 11. 10 (3차)
♧ 심사판정일 : 2009. 11. 10
♧ 반론접수기한 : 2010. 4. 30
♧ 3인 익명 심사필
♧ 1인 abstract 교정필