

시간지연을 갖는 이산 비선형 마코비안 점프 시스템의 H_∞ 퍼지 제어

H_∞ Fuzzy Control for Discrete-Time Nonlinear Markovian Jump Systems with Time Delay

이갑래* · 이경희

Kap Rai Lee and Kyung Hee Lee

평택대학교 정보통신학과

요 약

본 논문에서는 시간지연을 가지는 이산 비선형 마코비안 점프 시스템의 H_∞ 퍼지 제어 문제를 다룬다. Takagi-Sugeno 퍼지 모델을 이용하여 마코비안 점프 파라미터를 갖는 시간 지연 비선형 시스템을 마코비안 점프 퍼지 시스템으로 나타내고, 이에 대한 제어를 설계한다. 확률 퍼지-리아프노프(Lyapunov) 함수를 이용하여 안정성 및 H_∞ 성능을 해석하고 이 함수를 이용하여 페루프 시스템이 안정하며 H_∞ 성능 조건을 만족하는 조건식을 유도한다. 확률 퍼지-리아프노프 함수는 시스템 모드에 따라 변하는 함수이다. 유도된 조건식으로부터 제어기 존재 조건을 선형행렬부등식으로 나타내며, 제어기는 선형행렬부등식으로부터 바로 구할 수 있다. 수치적 예제 및 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법의 타당성을 보인다.

키워드 : 이산 비선형 시스템, 시간지연 마코비안 점프 시스템, 안정성 해석, H_∞ 퍼지 제어

Abstract

This paper deals with H_∞ fuzzy control problem of discrete-time nonlinear Markovian jump systems with time delay. The Takagi and Sugeno fuzzy model is employed to represent a delayed nonlinear system that possesses Markovian jump parameters. A stochastic mode dependent Lyapunov function is employed to analyze the stability and H_∞ disturbance attenuation performance of the Markovian jump fuzzy system with time delay. Stochastic Lyapunov function is dependent on the operation modes of the system. A sufficient condition for the existence of fuzzy H_∞ controller are given in terms of matrix inequalities. Also numerical example is presented to illustrate the efficient of the proposed design methods.

Key Words : Discrete-time systems, Delayed Markovian jump fuzzy systems, Stability analysis, H_∞ fuzzy control

1. 서 론

많은 공학적 시스템은 구성요소의 예기치 않은 고장 및 환경변화 등으로 인하여 구조 및 파라미터에 급작스런 변화를 갖게 된다. 마코비안-점프-시스템(MJS)은 이러한 시스템을 모델링하는데 유용하게 사용될 수 있으며, Krasovskii 및 Lidskii[1]에 의해 도입된 이래 이에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. 마코비안-점프-시스템은 여러개의 다른 동작모드를 가지며, 이 동작모드는 유한한 집합 내에서의 값을 갖는 마코프 체인에 의하여 변하게 된다. 따라서 마코비안-점프-시스템은 제조공정 시스템, 고장-허용성 시스템, 통신 시스템 및 경제 시스템 등의 다양한 제어 시스템을 모델링 하는데 유용하게 사용 되어 질 수 있다. 선형 마코비안-점프-시스템에 대한 안정성 해석과 H_2 및 H_∞ 제어에 대한 많은 연구 결과

가 이루어져 왔다[2]-[7]. 또한 최근에는 비선형 마코비안-점프-시스템에 대한 H_∞ 제어 연구가 나와 있으며[8], 이 연구 결과는 Hamilton-Jacobi-Issacs 부등식으로 표현 되어 있기 때문에 글로벌 해를 찾기는 매우 어려운 실정이다.

비선형 시스템에 대한 안정화 및 제어에 대한 다른 접근 방법으로 병렬분산보상을 이용한 퍼지제어를 이용하는 방법이다. 이 접근 방법에서는 먼저 비선형 시스템을 Takagi-Sugeno(T-S) 타입의 퍼지 모델을 이용하여 나타낸 다음, 병렬 분산 보상을 이용한 퍼지 제어를 설계 하는 방법이다. T-S 퍼지 시스템은 수학적으로 해석이 어려운 비선형 시스템의 모델링에 유용하며, 비선형 시스템과 등가인 T-S 퍼지 모델을 찾는 다양한 방법들이 나와 있다[9]-[12]. 비선형 시스템의 T-S 퍼지 모델은 소속함수(membership function)로 선형 모델들을 결합한 형태로 표현되어 있기 때문에, 일반적인 비선형 시스템 보다 해석 및 제어기 설계에 대한 해를 구하기 쉬운 장점이 있다. 최근 T-S 퍼지 모델에 대한 제어 연구에서는 단일 리아프노프 함수를 이용하지 않고, 퍼지 멤버쉽 함수를 포함하는 퍼지 리아프노프 함수를 이용함으로써 더 완화된 조건식을 이끌어 내고 있다.[13, 14]. 공학

접수일자 : 2009년 9월 2일

완료일자 : 2009년 11월 27일

*교신저자

시스템에 있어 시간 지연은 안정성과 성능에 많은 영향을 미치기 때문에, 시간 지연 시스템에 대한 퍼지 제어 연구 결과도 최근 많이 이루어지고 있다. 안정성을 만족하는 관측기 구조의 퍼지 제어기 설계 방법[15], 안정성과 H_∞ 성능을 동시에 만족하는 제어기 설계 방법 등에 대한 연구 결과가 나와 있다[16].

본 연구에서는 시간 지연을 갖는 이산 비선형 마코비안-점프-시스템에 대한 H_∞ 제어기 설계방법을 나타낸다. 마코비안 점프 파라미터를 갖는 시간 지연 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 나타내고, 이에 대한 제어기를 설계한다. 점프 파라미터의 천이는 유한 집합 내의 값을 같은 이산 마코프 체인에 의하여 변화하게 되며, 이 마코프 체인은 시스템 동작 모드를 나타낸다. 확률 퍼지-리아프노프(Lyapunov) 함수를 이용하여 시간 지연 마코비안-점프-퍼지-시스템(MJFS)의 안정성 및 H_∞ 성능을 해석한다. 확률 퍼지-리아프노프(Lyapunov) 함수는 시스템 모드에 따라 변하는 함수이며, 이 함수를 이용하여 페루프 시스템이 안정하며 H_∞ 성능 조건을 만족하는 조건식을 유도한다. 이 조건식으로부터 제어기 존재 조건을 선형행렬부등식으로 나타내며, 제어기는 선형행렬부등식으로부터 바로 구할 수 있다.

2. 문제 설정

Takagi-Sugeno, 퍼지 모델은 비선형 시스템을 국부적 선형 입력 출력 관계의 IF-THEN 규칙에 의하여 모델링하는 효과적인 방법이다. 확률공간 (Ω, \mathcal{J}, P) 에서 정의 되어지는 시간지연 비선형 이산 MJS을 고려한다. 여기서 Ω 는 표본 공간이고, \mathcal{J} 은 사건대수, P 는 측정 확률이다. 시간지연 마코프 점프 퍼지 모델 (1)을 고려한다.

Plant Rule i: IF $\theta_1(k)$ is M_{i1} and... and $\theta_g(k)$ is M_{ig}
 THEN $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_i(\eta(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{di}(\eta(k)) \mathbf{x}(k-d(k)) + \mathbf{B}_{1i}(\eta(k)) \mathbf{w}(k) + \mathbf{B}_{2i}(\eta(k)) \mathbf{u}(k)$
 $\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}_i(\eta(k)) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_i(\eta(k)) \mathbf{u}(k), \quad i=1,2,\dots,r \quad (1)$

여기서 M_{ij} 은 퍼지 집합이고, $\mathbf{x}(k) \in R^n$ 는 상태변수 $\mathbf{u}(k) \in R^m$ 은 입력, $\mathbf{w}(k) \in R^p \in L_2(0, T)$ 는 제한된 에너지를 갖는 외부외란, $\mathbf{z}(k) \in R^q$ 는 제어할 변수, r 은 IF-THEN 규칙의 수, $\theta_1 \sim \theta_g$ 는 측정 가능한 시스템 변수, 즉 전건부 변수이며, $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{di}, \mathbf{B}_{1i}, \mathbf{B}_{2i}, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i$ 는 공칭시스템을 나타내는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. $d(k)$ 는 (2)를 만족하는 시스템의 시변 시간지연이다.

$$0 \leq d(k) \leq \bar{\tau} \quad (2)$$

$\{\eta(k)\}$ 는 유한 집합 $M = \{1, 2, \dots, v\}$ 의 값을 가지는 이산 마코프 체인이며, 유한 집합 $M = \{1, 2, \dots, v\}$ 의 원소간의 천이 확률 $P = [p_{ls}]_{v \times v}$ 는 다음과 같다.

$$p_{ls} = \text{Prob}(\eta(k+1) = s | \eta(k) = l) \quad (3)$$

여기서 $p_{ls} \geq 0$ 이며 $l, s \in M$ 이고 $\sum_{s=1}^v p_{ls} = 1$ 이다.

집합 M 은 시스템의 동작 모드를 나타내며 $l \in M$ 일 때 $\eta(k) = l$ 이다. l 번째 모드와 결합되어진 시스템 행렬은 다

음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,l} &= \mathbf{A}_i(\eta(k)), \quad \mathbf{A}_{di,l} = \mathbf{A}_{di}(\eta(k)), \quad \mathbf{B}_{1i,l} = \mathbf{B}_{1i}(\eta(k)) \\ \mathbf{B}_{2i,l} &= \mathbf{B}_{2i}(\eta(k)), \quad \mathbf{C}_{i,l} = \mathbf{C}_i(\eta(k)), \quad \mathbf{D}_{i,l} = \mathbf{D}_i(\eta(k)) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{A}_{i,l}, \mathbf{A}_{di,l}, \mathbf{B}_{1i,l}, \mathbf{B}_{2i,l}, \mathbf{C}_{i,l}, \mathbf{D}_{i,l}$ 은 적절한 차원을 갖는 상수 행렬이고 $l \in M$ 이다. 시간 k 에서 시스템 모드가 l 이라고 하면, 퍼지 시스템의 추론된 최종 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) [\mathbf{A}_{i,l} \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{di,l} \mathbf{x}(k-d(k)) + \mathbf{B}_{1i,l} \mathbf{w}(k) + \mathbf{B}_{2i,l} \mathbf{u}(k)] \\ \mathbf{z}(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) [\mathbf{C}_{i,l} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{i,l} \mathbf{u}(k)] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mu_i(\theta(k)) &= \prod_{j=1}^n M_{ij}(\theta_j(k)) \\ h_i(\theta(k)) &= \mu_i(\theta(k)) / \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(k)) \\ \theta(k) &= [\theta_1(k) \theta_2(k) \dots \theta_g(k)]^T \end{aligned} \quad (6)$$

이며, 멤버십 함수 $M_{ij}(\theta_j(k))$ 는 M_{ij} 에서 $\theta_j(k)$ 의 멤버십 등급이다. 모든 시간 k 에 대하여 $\mu_i(\theta(k))$ 는 (7)을 만족하므로

$$\begin{aligned} \mu_i(\theta(k)) &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(k)) &> 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$h_i(\theta(k))$ 는 다음 (8)을 만족 한다.

$$\begin{aligned} h_i(\theta(k)) &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

MJFS (5)-(6)에 대한 H_∞ 퍼지 제어기로 (9)를 고려한다.

Control rule I:

IF $\theta_1(k)$ is M_{i1} and... and $\theta_g(k)$ is M_{ig}
 THEN $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}_i \mathbf{x}(k), \quad i=1,2,\dots,r. \quad (9)$

여기서 \mathbf{K}_i 는 설계 되어질 제어기의 i 번째 이득 행렬이다. 퍼지 제어기의 최종 출력은 (10)과 같다.

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(k). \quad (10)$$

(5) 및 (10)으로부터 l 번째 모드 $\eta(k) = l \in M$ 에서의 페루프 MJFS은 아래와 같이 표현 된다

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \overline{\mathbf{A}}_l \mathbf{x}(k) + \overline{\mathbf{A}}_{di,l} \mathbf{x}(k-d(k)) + \overline{\mathbf{B}}_l \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \overline{\mathbf{C}}_l \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (11)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}_l(k) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(k)) h_j(\theta(k)) [\mathbf{A}_{i,l} + \mathbf{B}_{2i,l} \mathbf{K}_j], \\ \overline{\mathbf{A}}_{di,l}(k) &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) \mathbf{A}_{di,l} \quad \overline{\mathbf{B}}_l(k) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) \mathbf{B}_{1i,l} \end{aligned}$$

$$\bar{C}_i(k) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(k)) h_j(\theta(k)) [C_{i,l} + D_{i,l} K_j] \quad (12)$$

이다. $x(k)$ 는 측정 가능하며 모드 $\eta(k)$ 는 측정 불가능 하다. $x(k, x_0, \eta_0)$ 는 초기 값 $x(0) = x_0$ 및 $\eta(0) = \eta_0$ 로부터의 상태 $x(k)$ 의 궤적을 나타낸다.

정의 1 : $w(k) = 0$ 인 MJFS (11)-(12)에 대해서 다음 (13)을 만족하면 MJFS 은 초기값 x_0 및 초기 모드 $\eta_0 \in M$ 에 대해서 확률적 안정하다고 정의한다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \sum_{k=0}^N x^T(k, x_0, \eta_0) x(k, x_0, \eta_0) | x_0, \eta_0 < \infty \quad (13)$$

여기서 $E\{\cdot\}$ 은 수학적 기대치이다.

정의 2 : 주어진 $\gamma > 0$, 및 초기 값에 대하여 MJFS (11)-(12)이 확률적 안정하고 (14)을 만족하면 MJFS은 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하다고 정의한다.

$$E \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k) z(k) < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k) w(k). \quad (14)$$

본 논문에서는 MJFS (5)에 대하여 폐-루프 시스템 (11)이 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하게 하는 퍼지 제어기 (10)를 설계하고자 한다.

3. 확률적 안정성 및 H_∞ 성능 해석

확률 리아프노프 함수 (15)를 고려한다.

$$V(x(k), \eta(k)) = x^T(k) P(\eta(k)) x(k) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i) S x(i) \quad (15)$$

여기서, $\eta(k) = l \in M$ 일때 $P_l = P(\eta(k))$ 이며, 리아프노프 함수 (15)는 시스템 모드에 종속적이다.

정리 1. 외란이 없는 MJFS (11)-(12)를 고려한다. (16)을 만족하는 행렬 $S > 0, P > 0$ 및 실수 $\alpha > 0$ 가 존재하면 MJFS (11)은 확률적 안정하다.

$$\Gamma_l(k) < 0, \quad l \in M \quad (16)$$

여기서

$$\Gamma_l(k) = \begin{bmatrix} \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) - P_l + S + Q_\alpha & \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) \\ \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) & \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) - S \end{bmatrix}$$

$$Q_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (17)$$

이다.

(증명) : 시간 k 에서 시스템 모드가 l 이라고 한다. 즉, $\eta(k) = l \in M$ 이다. MJFS (11)에 대한 리아프노프 후보함수 (15)을 고려하면 아래 (18)과 같이 전개되어진다.

$$E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k) = l] - V(x(k), \eta(k) = l)$$

$$= \sum_{s=1}^v \text{Prob}(\eta(k+1) = s | \eta(k) = l) [x^T(k+1) P_s x(k+1) + \sum_{i=k-d+1}^k x^T(i) S x(i) - x^T(k) P_l x(k) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i) S x(i)]$$

$$= x^T(k+1) [\sum_{s=1}^v p_{ls} P_s] x(k+1) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i) S x(i) + x^T(k) S x(k) - x^T(k-d(k)) S x(k-d(k)) - x^T(k) P_l x(k) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i) S x(i)$$

$$= (x^T(k) \bar{A}_l^T(k) + x^T(k-d(k)) \bar{A}_{d,l}^T(k)) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s [\bar{A}_l(k) x(k) + \bar{A}_{d,l}(k) x(k-d(k))] + x^T(k) S x(k) - x^T(k-d(k)) S x(k-d(k)) - x^T(k) P_l x(k)$$

$$= [x^T(k) \quad x^T(k-d(k))] (\Gamma_l(k) - Q_\alpha) \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \end{bmatrix} \quad (18)$$

(18)로부터 (16)이 만족되어지면 (19)가 만족됨을 알 수 있다.

$$E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k) = l] - V(x(k), \eta(k) = l) \leq -\alpha x^T(k) x(k) \quad (19)$$

리아프노프 후보함수 (15)로부터 아래 (20)을 만족하는 양수 β_1 및 β_2 가 항상 존재함을 알 수 있다

$$\beta_1 x^T(k) x(k) \leq V(x(k), \eta) \leq \beta_2 \sup_{\tau \in [0, \bar{\tau}]} x^T(k-\tau) x(k-\tau) \quad (20)$$

(19)-(20)로부터 $x(k) \neq 0$ 에 대해서 다음 식이 만족됨을 알 수 있으며,

$$\frac{E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k) = l] - V(x(k), \eta(k) = l)}{V(x(k), \eta(k))} \leq \frac{-\alpha x^T(k) x(k)}{V(x(k), \eta(k))} \leq \frac{-\alpha x^T(k) x(k)}{\beta_2 \sup_{\tau \in [0, \bar{\tau}]} x^T(k-\tau) x(k-\tau)}$$

$$\leq -\frac{\alpha}{\beta_2} = \beta - 1 \quad (21)$$

여기서 $\beta \equiv 1 - \frac{\alpha}{\beta_2}$ 이다. (21)로부터 다음 (22)가 만족됨을 알 수 있다.

$$0 < \frac{E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k)]}{V(x(k), \eta(k))} < \beta \quad (22)$$

(21) 및 (22)로부터 $0 < \beta < 1$ 이다. 또한 (22)로부터 (23)이 만족됨을 알 수 있으며

$$E[V(x(k+1), \eta(k+1)) | x(k), \eta(k)] \leq \beta V(x(k), \eta(k)) \quad (23)$$

이를 이용하면 다음 식이 유도된다.

$$E[V(x(k), \eta(k)) | x_0, \eta_0] \leq \beta^k V(x_0, \eta_0) \quad (24)$$

부등식 (24)로부터 (25)가 만족함을 알 수 있으며,

$$E[\sum_{k=0}^N V(x(k), \eta(k)) | x_0, \eta_0] \leq (1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots + \beta^N) V(x_0, \eta_0)$$

$$= \frac{1 - \beta^{N+1}}{1 - \beta} V(x_0, \eta_0) \quad (25)$$

극한 값을 취하면 (26)으로 표현된다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sum_{k=0}^N V(x(k), \eta(k) | x_0, \eta_0) \right] \leq \frac{1}{1-\beta} (x^T(0)P(\eta_0)x(0) + \sum_{i=-d}^0 x^T(i)Sx(i)) \quad (26)$$

(26)은 (27)로 다시 나타낼 수 있으며

$$\beta_1 \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sum_{k=0}^N x^T(k)x(k) | x_0, \eta_0 \right] \leq \frac{1}{1-\beta} (x^T(0)P(\eta_0)x(0) + \sum_{i=-d}^0 x^T(i)Sx(i)) \quad (27)$$

(27)로부터 (28)이 만족됨을 알 수 있다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N x^T(k)x(k) | x_0, \eta_0 \right\} \leq \infty \quad (28)$$

따라서, 시스템은 확률적 안정하다. \square

정리 2. MJFS (11)을 고려한다. 주어진 $\gamma > 0$ 에 대하여, 다음 (29)을 만족하는 행렬 $S > 0$, $P_l > 0$ 및 $\alpha > 0$ 가 존재하면 MJFS (11)은 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하다.

$$\Omega_l(k) < 0, \quad l \in M \quad (29)$$

여기서

$$\Omega_l(k) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) & \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) \\ \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) & \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) - S & \bar{A}_{d,l}^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) \\ \bar{B}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) & \bar{B}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_{d,l}(k) & \bar{B}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{B}_l(k) - \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = \bar{A}_l^T(k) \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \bar{A}_l(k) - P_l + S + \bar{C}_l^T(k) \bar{C}_l(k) + Q_\alpha$$

$$Q_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (30)$$

이다.

(증명) : (16), (29)로부터 (29)을 만족하는 행렬 $S > 0$ 및 $P_l > 0$ 은 또한 (16)을 만족한다. 시간 k 에서 시스템 모드가 l 이라고 가정하고 MJFS (11)에 대한 리아프노프 후보함수 (15)을 고려하면 다음식이 유도된다.

$$E[V(x(k+1), \eta(k+1) | x(k), \eta(k) = l) - V(x(k), \eta(k) = l)] = \sum_{s=1}^v \text{Prob}(\eta(k+1) = s | \eta(k) = l) [x^T(k+1)P_s x(k+1) + \sum_{i=k-d+1}^k x^T(i)Sx(i)] - x^T(k)P_l x(k) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Sx(i) = x^T(k+1) [\sum_{s=1}^v p_{ls} P_s] x(k+1) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Sx(i) + x^T(k)Sx(k) - x^T(k-d(k))Sx(k-d(k)) - x^T(k)P_l x(k) - \sum_{i=k-d}^{k-1} x^T(i)Sx(i) = [x^T(k)\bar{A}_l^T(k) + x^T(k-d(k))\bar{A}_{d,l}^T(k) + w(k)^T \bar{B}_l(k)^T] \cdot \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s [\bar{A}_l(k)x(k) + \bar{A}_{d,l}(k)x(k-d(k)) + \bar{B}_l(k)w(k)] + x^T(k)Sx(k) - x^T(k-d(k))Sx(k-d(k)) - x^T(k)P_l x(k) \quad (31)$$

(15) 및 (31)로부터 $H_\infty - \gamma$ 성능함수 $J(N)$ 은 아래 식을 만족함을 알 수 있으며,

$$J(N) \triangleq E \left\{ \sum_{k=0}^N [z^T(k)z(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k)] \right\} \leq E \sum_{k=0}^{N-1} [z^T(k)z(k) + V(x(k+1), \eta(k+1)) - V(x(k), \eta(k)) - \gamma^2 w^T(k)w(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) \quad x^T(k-d(k)) \quad w^T(k)] [\Omega_l(k) - Q_\alpha] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \\ w(k) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) \quad x^T(k-d(k)) \quad w^T(k)] [\Omega_l(k) - Q_\alpha] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d(k)) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (32)$$

(32)로부터 (29)가 만족되어지면 $w(k) \in l_2[0, \infty)$ 에 대하여 $\lim_{N \rightarrow \infty} J(N) < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 MJFS (11)은 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하다. \square

4. H_∞ 퍼지 제어기 설계

본 장에서는 MJFS (5)-(6)에 대한 H_∞ 퍼지 제어기 설계 방법을 나타낸다. 정리 2를 이용하여 MJFS (5)에 대한 H_∞ 퍼지 제어기가 존재할 충분조건을 나타내고, 이 조건식을 이용한 제어기 설계 방법을 나타낸다.

정리 3 : MJFS (5)-(6)을 고려한다. 선형행렬 (33)을 만족하는 행렬 $S > 0$, K_i , $P_l > 0$ 및 양수 α, γ 가 존재 하면 제어기 (10)은 MJFS (11)이 $H_\infty - \gamma$ 성능을 가지면서 확률적 안정하게 하는 제어기이다.

$$\Phi_{ii,l} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad l \in M$$

$$\Phi_{ij,l} + \Phi_{ji,l} < 0, \quad i < j < r \in S, \quad l \in M \quad (33)$$

여기서

$$\Phi_{ij,l} = \begin{bmatrix} -P_l + S + \alpha I & 0 & 0 & \Lambda_{41}^T & \Lambda_{51}^T \\ 0 & -S & 0 & A_{di,l}^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & B_{li,l}^T & 0 \\ * & * & * & -2I + \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{41} = A_{i,l} + B_{2i,l} K_j, \quad \Lambda_{51} = C_{i,l} + D_{i,l} K_j \quad (34)$$

이다.

(증명) : 정리 2의 부등식은 다음 식으로 표현 할 수 있으며,

$$\begin{bmatrix} -P_l + S + \bar{C}_l^T \bar{C}_l + \alpha I & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_l^T(k) \\ \bar{A}_{dl}^T(k) \\ \bar{B}_{1,l}^T \end{bmatrix} \left(\sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \right) \begin{bmatrix} \bar{A}_l(k) & \bar{A}_{dl}(k) & \bar{B}_{1,l} \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

Schur 보수 및 다음 조건식을 이용하면

$$-\left(\sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \right)^{-1} < -2I + \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \quad (36)$$

부등식 (35)는 다음 (37)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -P_l + S + \bar{C}_l^T \bar{C}_l + \alpha I & 0 & 0 & \bar{A}_l^T(k) \\ 0 & -S & 0 & \bar{A}_{dl}^T(k) \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & \bar{B}_{1,l}^T \\ \bar{A}_l(k) & \bar{A}_{dl}(k) & \bar{B}_{1,l} & -2I + \sum_{s=1}^v p_{ls} P_s \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

부등식 (37)은 다음 (38)로 다시 표현 할 수 있으므로

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Phi_{ij,l} < 0, \quad l \in M \quad (38)$$

식 (33)이 만족하면 (38)이 만족됨을 알 수 있다. 따라서 정리 2로부터 제어기 (10)은 페루프 MJFS (11)이 H_∞ - γ 성능을 가지면서 확률적 안정하게 하는 제어기이다. \square

정리 3은 H_∞ 퍼지 제어를 찾는 방법을 LMI 형태로 나타내고 있으며, 이 LMI 조건식의 해는 LMI 최적화 방법을 이용하면 쉽게 해를 찾을 수 있다[17-19].

5. 예제 및 컴퓨터 시뮬레이션

시간지연을 갖는 비선형 시스템 (39)를 고려한다

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.5x_1(k) + 0.35x_2^3(k) + 0.1x_1(k-d(k)) \\ &\quad + 0.1x_2^3(k-d(k)) + \delta u(k) + w(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + 0.2x_2(k-d(k)) + \delta u(k) + w(k) \\ z(k) &= x_1(k) + 0.2x_2(k) + \delta u(k) + w(k) \end{aligned} \quad (39)$$

여기서, $d(k)$ 는 시간지연 이며 $d(k) = 5 + 0.7\cos(0.3\pi k)$ 이다. 상태변수 값은 아래 식을 만족한다고 가정한다.

$$x_1(k) \in [-1.5 \ 1.5], \quad x_2(k) \in [-1.5 \ 1.5] \quad (40)$$

파라미터 $\delta \in [0, 1]$ 는 제어 입력의 정상적인 작동 여부를 나타낸다. 즉, $\delta = 1$ 은 제어 입력의 정상작동을 나타내며, $\delta = 0$ 은 제어 입력이 전혀 작동하지 않음을 나타내고, $0 < \delta < 1$ 은 제어 입력의 부분적으로 작동함을 나타낸다. 파라미터 δ 는 표 1에 나타난 것과 같이 다른 3가지 모드를 갖는다고 가정한다.

표 1. 시스템 파라미터 모드

Table 1. Modes of system parameter δ

모드 l	파라미터 δ
1	1
2	0.75
3	0.5

동작 모드의 파라미터 δ 가 확률은 다음 식과 같다고 가정한다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.25 & 0.1 \\ 0.29 & 0.48 & 0.23 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (41)$$

(39)의 비선형 항 $x_2^3(k)$ 을 다음 (42)로 나타내면

$$x_2^3(k) = M_{11} \cdot 0 \cdot x_2(k) - M_{12} \cdot 2.25 \cdot x_2(k). \quad (42)$$

퍼지 집합의 멤버쉽 함수는 식 (43)과 같이 표현 할 수 있으며 그림1과 같다.

$$\begin{aligned} M_{11}(x_2(k)) &= 1 - \frac{x_2^2(k)}{2.25} \\ M_{12}(x_2(k)) &= \frac{x_2^2(k)}{2.25}. \end{aligned} \quad (43)$$

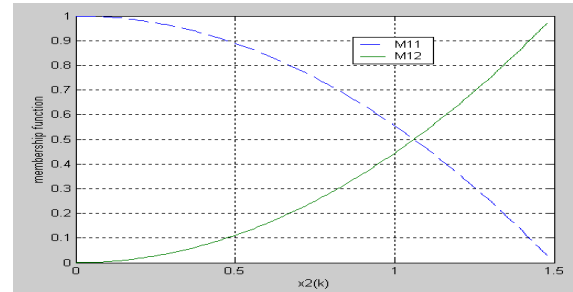


그림 1. 퍼지 모델의 멤버쉽 함수.

Fig. 1 Membership function of fuzzy model.

(43)의 퍼지 집합을 이용하여 비선형 시스템 (39)를 T-S 퍼지 모델로 나타내면 다음과 같다.

Plant Rule 1 :

IF $x_2(k)$ is M_{11} THEN

$$x(k+1) = A_{1,l}x(k) + A_{d1,l}x(k-d(k)) + B_{u1,l}(k)u(k) + B_{11,l}w(k)$$

$$e(k) = C_{1,l}x(k) + D_{1,l}u(k), \quad l = 1, 2, 3 \quad (44)$$

Plant Rule 2 :

IF $x_2(k)$ is M_{12} THEN

$$x(k+1) = A_{2,l}x(k) + A_{d2,l}x(k-d(k)) + B_{u2,l}(k)u(k) + B_{12,l}w(k)$$

$$e(k) = C_{2,l}x(k) + D_{2,l}u(k), \quad l = 1, 2, 3 \quad (45)$$

여기서 $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]^T$ 이며

$$A_{1,l} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d1,l} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_{2,l} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.787 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d2,l} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.225 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11,l} = B_{12,l} = [1 \ 1]^T, \quad B_{u1,l} = B_{u2,l} = [\delta \ \delta]^T, \quad C_{1,l} = C_{2,l} = [1 \ 1] \quad (46)$$

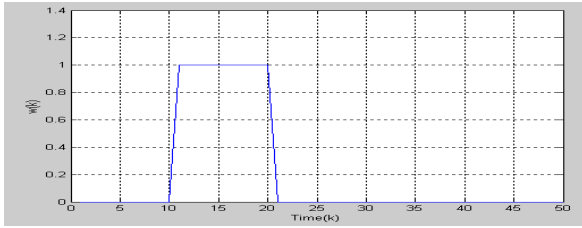


그림 2. 구형과 외란신호
Fig. 2 Disturbance signal

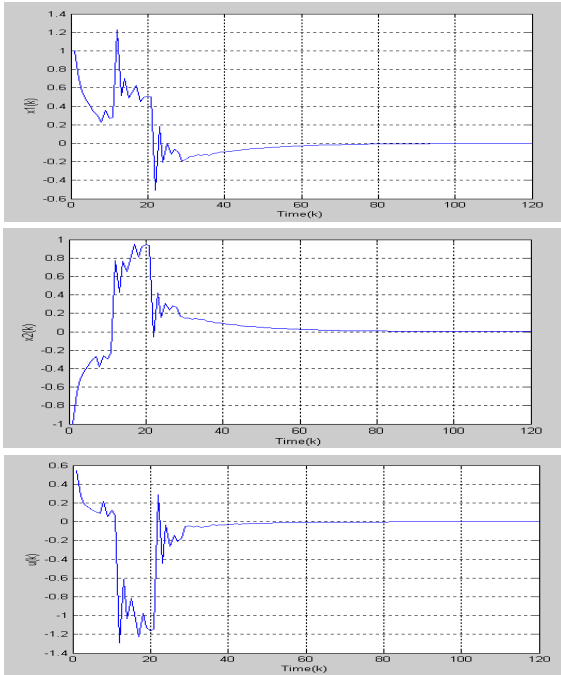


그림 3. 시간지연 비선형 MJS의 시뮬레이션 결과($\delta = 1$)
Fig. 3 Simulation results of nonlinear MJS with $\delta = 1$

이다. 정리 3을 이용하여 제어기를 설계하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} K_1 &= [-0.468 \quad -0.837] \\ K_2 &= [-0.444 \quad -1.205] \end{aligned} \quad (47)$$

제어기에 대한 시간지연을 갖는 비선형 시스템의 컴퓨터 시뮬레이션 결과는 그림 1에 나타나 있다. 컴퓨터 시뮬레이션에 사용된 외부 외란신호는 $10 \leq k \leq 20$ 에서 $w(k) = 1.0$ 이며 다른 구간에서는 영인 구형과 신호로 그림2와 같다.

상태 변수의 초기값은 $x_1(0) = 1.0$ 이고 $x_2(0) = -1.0$ 이다. 그림 3~그림 5는 $\delta = 1, \delta = 0.75, \delta = 0.5$ 인 경우의 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 상태변수의 시간 응답 결과이다. 그림 6은 δ 가 다음 (48)과 같이 0과 1사이에서 변할 때의 컴퓨터 시뮬레이션 결과이다.

$$\delta = \begin{cases} 1, & k < 30 \\ 0.75, & 30 \leq k < 40 \\ 0.5, & k \geq 40 \end{cases} \quad (48)$$

그림3~그림6의 결과로부터 초기값 오차뿐만 아니라 구형과 외란 신호가 가해져도 시스템 상태값은 시간이 지나면서

영으로 잘 수렴함을 알 수 있다. 따라서 설계되어진 제어기는 비선형 마코프점프 시스템을 안정화 시키며 외란감쇄 기능을 가짐을 알 수 있다.

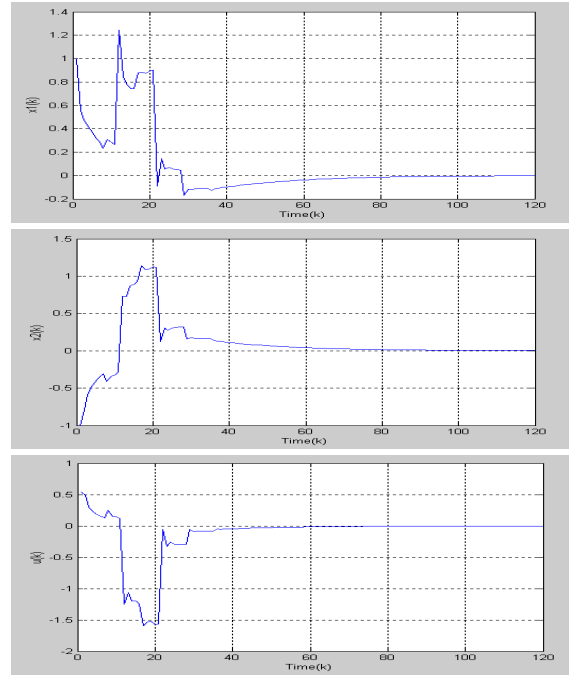


그림 4. 시간지연 비선형 MJS 시뮬레이션 결과($\delta = 0.75$)
Fig. 4 Simulation results of nonlinear MJS with $\delta = 0.75$

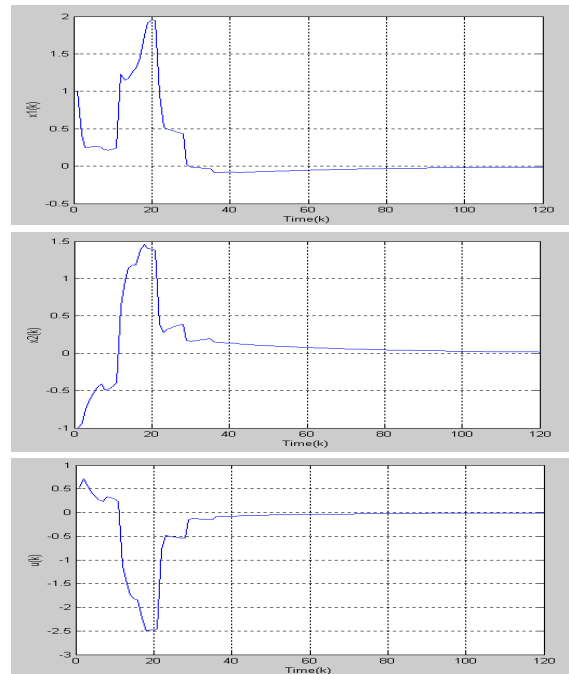


그림 5. 시간지연 비선형 MJS 시뮬레이션 결과($\delta = 0.5$)
Fig. 5 Simulation results of nonlinear MJS with $\delta = 0.5$

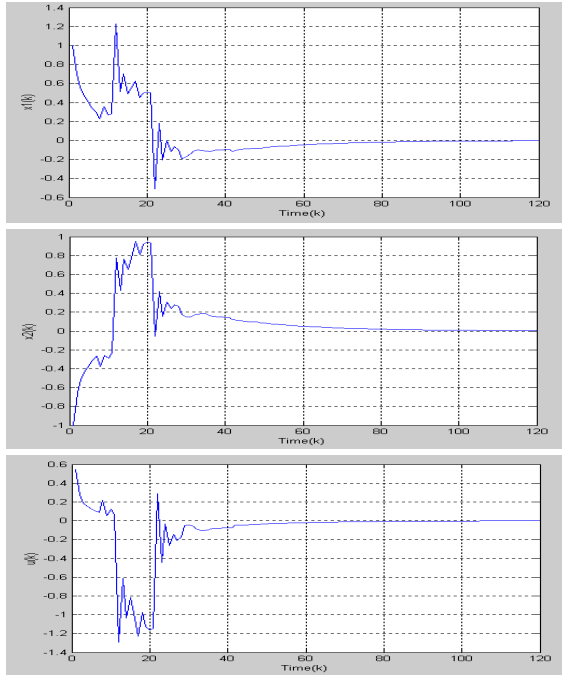


그림 6. 시간지연 비선형 MJS 시뮬레이션 결과($0 < \delta < 1$)
 Fig. 6 Simulation results of nonlinear MJS with $0 < \delta < 1$

6. 결 론

본 연구에서는 시간 지연을 갖는 이산 비선형 MJS에 대한 안정성뿐만 아니라 H_∞ 성능을 보장하는 제어기 설계방법을 나타내었다. 마코비안 점프 파라미터를 갖는 시간 지연 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 나타내고, 이에 대한 제어를 설계하였다. 점프 파라미터의 천이는 유한 집합 내의 값을 같은 이산 마코프 체인에 의하여 변화하게 되며, 이 마코프 체인은 시스템 동작 모드를 나타낸다. 확률 퍼지-리아프노프(Lyapunov) 함수를 이용하여 시간 지연 NJFS의 안정성 및 H_∞ 성능을 해석하고 이 함수를 이용하여 페루프 시스템이 안정하며 H_∞ 성능 조건을 만족하는 조건식을 유도하였다. 확률 퍼지-리아프노프(Lyapunov) 함수는 시스템 모드에 따라 변하는 함수이다. 유도된 조건식으로부터 제어기 존재 조건을 선형행렬부등식으로 나타내었으며, 제어기는 선형행렬부등식으로부터 바로 구할 수 있다. 수치적 예제 및 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법의 타당성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] N. N. Krasovskii and E. A. Lidskii, "Analytical design of controller in systems with random attributes-Part I," *Automation and Remote Control*, vol. 22, pp.1021-1025, 1961.
 [2] M. Mariton, *Jump Linear System in Automatic Control*. New York: Marcel Dekker, 1990.
 [3] O. L. V. Costa and M. D. Fragosa, "Stability results for discrete-time linear systems with

Markovian Jumping parameters," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 179, no. 2, pp. 54-178, 1993.
 [4] G. Pan and Y. Bar-Shalom, "Stabilization of jump linear gaussian systems without mode observation," *Int. J. Control*, vol. 64, no. 4, pp. 631-661, 1996.
 [5] P. Shi and E. K. Boukas, " H_∞ control for Markovian Jumping linear systems with parametric uncertainty," *Journal of Optimization Theory and Application*, vol. 95, no. 1, pp. 75-99, 1997.
 [6] E. K. Bouka and P. Shi, "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian Jumping parameters," *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, vol. 8, no. 13, pp. 1155-1167, 1998.
 [7] O. L. V. Costa and R. P. Marques, "Mixed H_2/H_∞ control of discrete-time Markovian linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 1, pp. 95-100, 1988.
 [8] M.D.S. Aliyu and E.K. Boukas, " H_∞ control for Markovian jump nonlinear systems," in Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, pp. 766-771, 1998.
 [9] 이상민, 조중선, "비선형 미분방정식의 TSK 퍼지 모델 유도에 관하여," *한국 퍼지 및 지능시스템 학회 논문지*, 제 11권, 제8호, pp. 720-725, 2001.
 [10] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang "Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 4, pp. 525-538, 2001.
 [11] 정은태, 권성하, 이갑래, "비선형 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델 구성," *제어·자동화·시스템 공학 논문지*, 제 8권, 제 11호, pp. 941-947, 2002.
 [12] X. Jia, D. Jhang, L. Zheng and N. Zheng "Modeling and stabilization for a class of nonlinear networked control systems: A T-S fuzzy approach," *Progress in natural science*, vol. 18, no. 1031-1037, 2008.
 [13] K. Tanaka, T. Hori and H. O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 4, pp. 582-589, 2003.
 [14] T. M. Guerra and L. Vermeiren, "LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form," *Automatica*, vol. 40, no. 823-829, 2004.
 [15] Y. Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 200-211, April. 2000.
 [16] K. R. Lee, J. H. Kim, E. T. Jeung and H. B. Park, "Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 6, pp. 657-664, Decem. 2000.

[17] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[18] Y. Nesterov and A. Nemirovski, *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[19] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*, The Math Works Inc., 1995.



이경희 (Kyung Hee Lee)

1983년 : 경북대학교 전자공학과
(전자계산학전공) 공학사
1990년 : 충남대학교 전자계산학과
이학석사
1993년 : 충남대학원 전산학과 이학박사
1983년~1997년 : 한국전자통신연구원 선임
연구원
1997년~현재 : 평택대학교 정보통신학과 부
교수

관심분야 : 신경회로망, 최적화이론, 초고속 정보통신망, 임베
디드 시스템

E-mail : khlee@ptu.ac.kr

저 자 소 개



이갑래(Kap Rai Lee)

1987년 : 경북대학교 전자공학과 공학사
1990년 : 동대학원 전자공학과 공학석사
1999년 : 동대학원 전자공학과 공학박사
1990년~1995년 : 국방과학연구소 연구원.
2001년~현재 : 평택대학교 정보통신학과
부교수.

관심분야 : 지능시스템 및 퍼지제어, 산업용 네트워크, 임베
디드 시스템

E-mail : krlee@ptu.ac.kr