Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 35, No. 2, pp. 171-177, June 2009.

M/M/1/K 대기행렬 시스템에 있어서 수락제어와 가격제어 정책간의 최적 스위치 전략

손 재 동†

숭실대학교 산업정보시스템공학과

Optimal Switching Strategy between Admission Control and Pricing Control in an *M/M/1/K* Queueing System

Jae-Dong Son

Department of Industrial and Information Systems Engineering, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea

This study presents the switching strategy between admission control and pricing control policies and clarifies the properties of the switching strategy in an M/M/1/K queueing system. In addition, this study demonstrates that employing the switching strategy can significantly improve the maximum total expected profit.

Keywords: Switching Strategy, Admission Control, Pricing Control, M/M/1/K Queue

1. 서 론

통신이나 제조업 분야에 있어서 대기행렬 시스템의 효율성과 성능향상에 관한 연구는 그 수를 헤아릴 수 없을 만큼 광범위하고 왕성하게 이루어져 왔다(Crabill *et al*., 1977; Stidham and Weber, 1993). 그 중에서 대기행렬 시스템의 수용 능력(capacity)의 조절 및 제어 방법으로써 수락제어(admission control) 정책과 가격제어(pricing control) 정책 두 가지가 고려되어 왔다.

수락제어 정책의 경우(Heyman, 1968; Miller, 1969; Lippman and Ross, 1971; Stidham, 1985; Kuri and Kumar, 1995; Örmeci *et al*., 2002; Lin and Ross, 2004), 시스템에 도착한 고객은 의뢰할 주문에 대하여 최대 허용 주문가격을 가지고 있으며, 주문에 대한 서비스의 필요성이 높으면 높을 수록 최대 허용 주문가격에 가까운 가격을 제시한다. 의사결정자는 이 제시된 가격을 보고 그 고객으로부터의 주문을 받아들일 것 인지 아니면 거절할 것인지 결정한다. 한번 거절한 고객의 주문은 영원히 사라지게 된다.

가격제어 정책의 경우(Low, 1974; Mendelson, 1985; Dewan and Mendelson, 1990; Stidham, 1992; Johansen, 1994; Paschalidis and Tsitsiklis, 2000; Ziya *et al*., 2002), 의사결정자가 시스템에 도착한 고객에게 주문 의 가격을 제시한다. 고객은 그 가격이 자신의 최대 허용 주문가격보다 낮을 경우에 한하여 주문을 그 시스템에 의뢰한다. 따라서, 의사결정자는 시스템의 이익을 최대화하는 가격을 결정하여 그 가격을 고객에게 제시하게 된다.

대부분의 기존 연구에서는 고려하는 대기행렬 시스템의 구조적 특성에 따라 수락제어 정책과 가격제어 정책 중 어느 한 정책만을 적용하여 시스템 수용능력을 제어한다.

이에 반하여, 다음의 연구들은 두 정책 모두를 취급하고 있다. Yoon and Lewis(2004)는 두 정책에 대한 모델을 각각 별개로 수립한 후 각각에 대한 최적정책의 구조를 분석하였다. Gans and Savin(2005)는 두 가지 타입의 고객이 찾아오는 렌탈회사를 고려하였다. 한 타입의 고객에 대해서는 수락제어 정책을, 다른 한 타입의 고객에 대해서는 가격제어 정책을 사용하여 수용능력을 제어하였다. Son and Ikuta(2007)와 Son(2007)은 한가지 타입의 고객에 대하여 두 가지 제어정책을 별도로 적용하여 모델을 수립한 후, 두 문제를 동일한 논리구조 내에서 최적정책의 구조를 분석하였다. 이렇게 수락제어 정책과 가격제어 정책이 별개로 혹은 동일한 구조 내에서 논의되고

† 연락저자 : 손재동, 156-743 서울시 동작구 상도동 511 숭실대학교 산업정보시스템공학과, Fax : 02-820-1094, E-mail : son88@ssu.ac.kr
200□년 □월 □일 접수; 200□년 □월 □일 수정본 접수; 2009년 □월 □일 게재 확정.

분석되어 왔지만, 지금까지 두 정책 사이의 스위치에 관한 연구는 없었다.

사실 시스템에 고객이 도착하면, 의사 결정자는 그 시점의 시스템 상태(대기중인 고객/주문의 수)를 고려하여 이익을 최대화하는 가격을 결정하고 그 가격을 고객에게 제시한 후 고객의 발주여부에 대한 의사결정을 기다리던가(가격제어 정책), 아니면 고객이 제시해 온 가격을 보고 주문의 수락 여부를 결정하든가(수락제어 정책) 하는 두 가지 중 한 가지 의사 결정을 행하게 된다. 이때 수락제어 정책과 가격제어 정책의 전략적 선택이 시스템의 이익을 향상시킨다면, 시스템의 의사결정자는 고객이 시스템에 도착할 때 마다 두 정책간의 스위치 전략을 주문 선별정책으로서 당연히 고려해야 할 것이다.

본 연구에서는 대기행렬시스템의 수용능력 제어정책으로써 고려되어 온 수락제어 정책과 가격제어 정책간의 스위치 전략을 연속시간 M/M/1/K 대기행렬 모델로 수립한다. 그리고 수립된 모델의 이론분석과 수치실험을 통해 두 정책간의 최적 스위치 전환기준점(threshold)이 서비스 대기중인 고객/주문의 수로서 주어짐을 보인다. 또한 스위치 전략을 채택하여 의사결정을 할 경우가 그렇지 않을 경우보다 최대 기대이익이 상당히 향상됨을 보여 스위치 전략을 대기행렬 시스템의 수용능력 제어정책으로서 채택해야 하는 타당성을 제시한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장은 수락제어 정책과 가격제어 정책간의 스위치 모델을 수립하고 이에 대한 최적 방정식을 기술한다. 제 3장에서는 최적방정식을 취급하기 편리한 형태로 변형하고 최적 스위치 정책을 기술한다. 제 4장은 본 연구에서 취급하고 있는 모델의 이론 분석을 통해 얻어진 결과를 보여준다. 제 5장은 수치실험을 통해 스위치 전략의 구조적 특성을 살펴본다. 마지막으로, 제 6장은 본 연구에서 얻어진 결론을 기술한다.

2. 모델 수립

이 장에서는 스위치 정책을 고려한 대기행렬 모델을 정의하고 이에 대한 최적 방정식을 기술한다.

본 논문에서는 한가지 타입의 고객/주문만을 취급하는 시스템 용량이 K이고 서버가 하나인 대기행렬 시스템을 고려한다. 고객 도착율은 λ로 포아송과정을 따르며, 서비스 시간은 평균 μ인 지수분포를 따른다. 시스템에 축차적으로 나타나는 고객의 최대 허용 주문 가격, $\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,$ 는 평균이 μ_ξ인 확률분포 $F_\xi(x)$의 독립확률변수들이다. 이때 확률밀도 함수 $f_\xi(x)$는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{cases} f_\xi(x) > 0, & a \le x \le b, \\ f_\xi(x) = 0, & otherwise. \end{cases}$$

이때, a와 b는 $0 \le a < b < \infty$인 실수이다. 고객이 시스템에 도착할 때 마다, 의사결정자는 현재 보유중인 고객/주문 수를 고려하며 수락제어 정책과 가격제어 정책 중 어느 하나를 선택하여 시스템의 수용능력을 제어한다.

수락제어 정책의 경우, 의사 결정자는 시스템에 도착하는 고객이 제시하는 주문의 가격을 보고 고객의 주문을 받아들일 것인지 아니면 거절할 것인지 결정한다. 한번 거절한 주문은 영원히 사라진다. 고객은 주문 의뢰에 있어서 주문의 가격을 제시하게 되는데, 이때 고객 자신의 최대 허용주문가격을 그대로 제시하는 것이 아니라 최대허용주문가격에 주문에 대한 서비스의 희망 정도를 반영한 가격을 제시하게 된다. 다시 말해 의뢰할 주문에 대한 서비스의 희망 정도가 높을수록 최대허용주문가격에 가까운 가격을 제시할 것이다. 즉 고객은 주문에 대한 서비스 희망 정도가 최대허용주문가격에 반영된 가격, $w = \alpha\xi$, 을 주문의 가격으로 제시한다. 이때 ξ는 고객의 최대 허용 주문가격을, $\alpha(0 < \alpha \le 1)$는 고객의 주문에 대한 서비스 희망 정도를 나타낸다. 즉, α값이 1에 가까우면 가까울수록 서비스를 의뢰하고자 하는 희망 정도가 강함을, 0에 가까울수록 약함을 나타낸다. 여기서 축차적으로 도착하는 고객의 주문 의뢰도 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,$는 평균이 μ_α인 확률분포 $F_\alpha(x)$의 독립확률변수들이다. 따라서, 고객이 제시하는 주문가격 w의 기대치는 $\mu_w = \mu_\alpha\mu_\xi$로 나타낼 수 있다. $F_w(x)$와 $f_w(x)$를 w의 확률분포와 확률밀도 분포라고 할 때 다음과 같이 각각 표기된다.

$$\begin{aligned} F_w(x) &= \Pr\{w \le x\} = \Pr\{\alpha\xi \le x\} \\ &= \Pr\{\xi \le x/\alpha\} = \int_0^\infty F_\xi(x/\alpha) f_\alpha(\alpha) d\alpha \\ &= E_\alpha[F_\xi(x/\alpha)], \\ f_w(x) &= E_\alpha\left[\frac{1}{\alpha} f_\xi(x/\alpha)\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

이때, $E_\alpha[\cdot]$는 확률변수 α에 대한 기대값이다.

가격제어 정책의 경우, 고객이 먼저 자신의 주문에 대한 희망 정도에 따라 의뢰가격 w를 제시하는 수락정책과는 달리, 의사결정자가 시스템에 도착한 고객에게 먼저 가격을 제시한다. 따라서 고객은 이 제시된 가격을 보고 자신의 최대 허용 주문가격 ξ(의뢰가격 w가 아님)과 비교하여 주문발주 여부를 결정한다. 즉 시스템의 의사결정자가 고객에게 주문 가격 z를 제안할 경우, 고객은 이 가격이 자신의 최대 허용 주문 가격 ξ보다 낮을 경우에 한하여 주문을 의뢰한다. 그러므로 고객이 주문을 시스템에 의뢰할 확률 $p(z)$는 다음과 같다.

$$p(z) = \Pr\{z \le \xi\}.$$

의사 결정자는 고객이 도착할 때마다 시스템의 보유 주문수를 고려하여 수락제어 정책을 사용할 것인지 아니면 가격제어 정책을 사용해야 할 것인지 의사결정을 해야 한다. 이 문제는

두 정책간의 스위치 전략을 고려한 마르코프 의사결정과정(Markov Decision Process)문제로서 모델화 할 수 있다. 현재 시스템 안에 있는 고객/주문 수를 i로 표기하고 상태 i라고 정의하자. 상태 i에서 얻을 수 있는 최대기대이익은 $V(i)$로 표기하자. 이제 균일화 기법(Uniformization, Lippman(1975))을 이용하여 모델의 최적방정식을 기술하면 다음과 같다.

$$V(i) = \frac{1}{\Lambda}(\lambda \max\left\{\begin{matrix} E_w[\max\{w+V(i+1),\ V(i)\}] \\ \max_z \{p(z)(z+V(i+1)+(1-p(z))V(i)\} \end{matrix}\right\} + \mu V([i-1]^+)), \quad 0 \le i \le K-1, \tag{2}$$

$$V(K) = \frac{1}{\Lambda}(\lambda V(K) + \mu V(K-1). \tag{3}$$

이때 $[x]^+ = \max[0, x]$이고, $\Lambda = \lambda + \mu + \beta$ 이며, β는 단위시간 후 얻게 될 1단위의 금전적 가치에 대한 현 시점의 가치, 즉 할인율을 나타낸다.

방정식 (2)는 시스템 상태가 $0 \le i \le K-1$인 경우에 대한 기술이며, 식이 가지는 의미는 다음과 같다. 수락제어 정책을 사용할 경우, 시스템에 도착한 고객이 제안한 주문 가격 w를 수락하여 고객/주문을 받아들이면 시스템의 상태는 i+1이 되고, 거절하면 원래 상태 i를 유지하게 된다. 반면, 가격제어 정책을 사용할 경우, 도착한 고객에게 가격 z를 제안한다고 가정하면, 고객이 $p(z)$의 확률로 주문을 시스템에 의뢰하면 시스템 상태는 i+1이 되고, 1-$p(z)$의 확률로 의뢰하지 않으면 시스템 상태는 i가 된다. 따라서, 의사결정자는 기대이익을 최대화하는 가격 z, 다시 말해 $\max_z\{p(z)(z+V(i+1))+(1-p(z))V(i)\}$를 만족하는 z를 제시 가격으로 결정한다.

방정식 (3)은 $i = K$인 경우에 대한 기술이다. 이때 시스템 용량은 최대이기 때문에 고객이 도착하더라도 받아들일 수 없으므로 정책선택에 대한 의사결정은 이루어 지지 않고, 단지 서비스율 μ로 주문에 대한 서비스가 완료된다.

3. 최적 방정식의 변형 및 최적 스위치정책

이 장에서는 앞 장에서 수립한 최적방정식을 취급하기 편이한 형태로 변형하고 모델의 최적 스위치 전략을 기술한다.

식 (2)에서 $\max\{w+V(i+1),\ V(i)\}$과 $\max_z\{p(z)(z+V(i+1))+(1-p(z))V(i)\}$은 각각 $\max_z\{w+V(i+1)-V(i),\ 0\}+V(i)$과 $\max_z p(z)(z+V(i+1))-V(i))+V(i)$으로 표현되므로, 최적 방정식 (2)는 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$V(i) = \frac{1}{\Lambda}(\lambda \max\left\{\begin{matrix} E_w[\max\{w+V(i+1)-V(i),\ 0\}], \\ \max_z p(z)(z+V(i+1)-V(i)) \end{matrix}\right\} + \lambda V(i) + \mu V([i-1]^+)),\ 0 \le i \le K-1. \tag{4}$$

수락제어 정책의 경우, 상태 i에서 얻을 수 있는 한계이익은 도착한 고객으로부터 w의 가치를 가진 주문을 받아들일 때와 이를 거절하였을 때의 차로 주어진다. 다시 말해, 한계이익은 $w+V(i+1)$과 $V(i)$의 차로서 $w+V(i+1)-V(i)=w-h_i$이다. 이때,

$$h_i = V(i) - V(i+1), \quad 0 \le i \le K-1. \tag{5}$$

이는 한계이익이 0보다 크면 그 고객/주문을 받아 들이는 것이 최적이며, 그렇지 않으면 거절하는 것이 최적이라는 의미이다. 즉, $h_i \ge w$이면 받아들이고 그렇지 않으면 거절하는 것이 최적이다.

가격제어 정책의 경우, 고객에게 z의 가격을 제시한다면 얻어지는 한계이익은 $z+V(i+1)-V(i)=z-h_i$이다. 그러나, 이 한계이익은 확률 $p(z)$로 얻어질 수도 확률 1-$p(z)$로 얻어지지 못할 수도 있으므로, 기대한계이익은 $p(z)(z-h_i)+(1-p(z))\times 0 = p(z)(z-h_i)$이다. 의사결정자는 이 기대 한계이익 $p(z)(z-h_i)$을 최대화하는 z를 최적 제안 가격으로 결정한다.

수락제어 정책과 가격제어 정책의 구조적 특성을 밝히기 위해 다음과 같은 함수를 정의 하자.

$$T_w(x) = E_w[\max\{w-x,\ 0\}], \tag{6}$$
$$T_p(x) = \max_z p(z)(z-x). \tag{7}$$

이때, 방정식 (7)의 우변을 만족하는 가장 작은 실수 z를 $z(x)$라고 하자. $z(x)$의 성질은 Son and Ikuta(2007) 참조. 또한, b^o를 다음과 같이 정의하자.

$$b^o = \sup\{x \mid T_w(x) > 0\}.$$

한편, 스위치 정책은 위의 두 함수의 대소관계에 의해 결정되므로 다음과 같은 함수를 정의하자.

$$J(x) = T_w(x) - T_p(x), \tag{8}$$
$$K(x) = \max\{T_w(x),\ T_p(x)\} = \max\{J(x),\ 0\} + T_p(x). \tag{9}$$

이 두 함수를 이용하여 방정식 (4)를 기술하면 최종적으로 다음과 같은 최적방정식이 얻어진다.

$$V(i) = \frac{1}{\Lambda}(\lambda\max\{T_w(h_i),\ T_p(h_i)\} + \lambda V(i) + \mu V([i-1]^+))$$
$$= \frac{1}{\Lambda}(\lambda\max\{J(h_i),\ 0\} + \lambda T_p(h_i) + \lambda V(i) + \mu V([i-1]^+)). \tag{10}$$

이상으로부터 최적 스위치 정책을 기술하면 다음과 같다.

최적 스위치 정책 :

(a) $J(h_i) > 0$이면, 수락제어 정책을 채택하라. 이때, 상태 i에 있어서 도착하는 고객이 가격 w를 제시할 경우, $w \geq h_i$이면 그 고객/주문을 받아들이는 것이 최적이고 그렇지 않으면 거절하는 것이 최적이다.

(b) $J(h_i) \leq 0$이면, 가격제어 정책을 채택하라. 이때, 상태 i에 있어서 도착하는 고객에게 제시해야 할 최적 가격은 $p(z)(z-h_i)$를 최대화하는 가격 z로 주어진다. 이 최적 제시 가격 z는 h_i에 의존하므로 $z(h_i)$로 표기하기로 한다.

4. 모델 분석

이 장은 앞 장에서 정의한 함수들의 성질을 분석하고, 그 성질을 이용하여 앞 장에서 수립한 모델의 구조와 특성을 밝힌다.

식 (6)에서 정의된 함수 $T_w(x)$에 식 (1)의 확률분포를 대입하면

$$T_w(x) = \int_0^{\infty} \max\{w-x,\ 0\} E_\alpha \left[\frac{1}{\alpha} f_\xi(w/\alpha) \right] dw$$

이 얻어지고, $w = \alpha\xi$이므로 결국 위 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} T_w(x) &= E_\alpha \left[\alpha \int_0^{\infty} \max\{\xi - x/\alpha,\ 0\} f_\xi(\xi) d\xi \right] \\ &= E_\alpha [\alpha T_\xi(x/\alpha)]. \end{aligned} \tag{11}$$

이때,

$$T_\xi(x) = E_\xi [\max\{\xi - x,\ 0\}]$$

이다. 다음의 보조정리는 함수 $T_p(x)$와 $T_\xi(x)$의 성질을 나타낸다.

보조정리 1 :

(a) $T_p(x)$와 $T_\xi(x)$는 감소 함수이며, 구간 $(-\infty, b)$에서 단조 감소한다.

(b) 구간$(-\infty,\ b)$에서 $T_p(x) > 0$이고 $T_\xi(x) > 0$이며, 구간 (b, ∞)에서 $T_p(x) = T_\xi(x) = 0$이다.

증명 : Son and Ikuta(2007) 참조. ∎

보조정리 2 :

(a) $T_w(x)$는 감소함수이다.

(b) 구간 $(-\infty,\ b^o)$에서 $T_w(x) > 0$이고, 구간 $(b^o,\ \infty)$에서 $T_w(x) = 0$이다. 이때, $b^o \leq b$이다.

증명 : (a) 식 (11)과 보조정리 1(a)로부터 자명하다.

(b) 가정으로부터 $0 < \alpha \leq 1$이므로 $x \geq b$이면 $x/\alpha \geq b$이다. 따라서, 보조정리 1(b)로부터 $T_\xi(x/\alpha) = 0$이다. 한편, $T_w(x)$는 (a)로부터 감소함수이므로, b^o의 정의로부터 $x < b^o$이면 $T_w(x) > 0$이고, $b^o \leq x$이면 $T_w(x) = 0$이다. 이때, $\alpha \in (0,\ 1)$이므로 $b \leq b/\alpha$이고, 보조정리 1(b)에서 $b \leq x$에 대하여 $T_\xi(x) = 0$이므로, $T_w(b) = E_\alpha[\alpha T_\xi(b/\alpha)] = 0$이다. 결국 b^o의 정의로부터 $b^o \leq b$임을 안다. ∎

다음 결과는 최적 스위치 정책의 특성을 고찰하는데 있어서 매우 중요한 역할을 하는 함수 $K(x)$와 $J(x)$의 성질을 나타낸다.

보조정리3 :

(a) $K(x)$는 감소함수이다.

(b) 구간(b, ∞)에서 $J(x) = 0$이며, $b^o < b$이면 구간$(b^o,\ b)$에서 $J(x)$는 음의 값을 가지며 단조 증가한다.

증명 : (a) 보조정리 1(a), 2(a), 그리고 식 (9)로부터 자명하다.

(b) (전반부) 보조정리 1(b), 2(b), 그리고 식 (8)로부터 구간 (b, ∞)에서 $J(x) = 0$이다. (후반부) $b^o \leq x < b$라고 하자. 이때, 보조정리 1(b)로부터 $T_p(x) > 0$이고, 보조정리 2(b)로부터 $T_w(x) = 0$임을 알 수 있다. 따라서, 식 (8)로부터 $J(x) = T_p(x) < 0$이다. 여기서, 보조정리 1(a)로부터 $T_p(x)$는 구간 $(b^o,\ b)$에서 단조 감소하므로, 함수 $J(x)$는 구간 $(b^o,\ b)$에서 단조 증가한다. ∎

위 결과 (b)로부터 함수 $J(x)$의 형태는 다음의 두 가지 중 하나임을 알 수 있다. 1) 모든 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $J(x) \leq 0$이다. 이는 항상 가격제어 정책을 채택하는 것이 최적임을 의미한다. 2) $J(x) > 0$인 구간 $[a',\ b']$가 구간 $[a,\ b^o]$에서 최소한 하나 존재한다. 이는 $x \in [a',\ b']$에 대하여 수락제어 정책을, 그 외의 x에 대하여서는 가격제어 정책을 채택하는 것이 최적임을 의미한다.

아래 결과는 수락제어 정책에서의 최적선별 기준 h_i와 가격제어 정책에서의 최적 제시 가격 $z(h_i)$의 성질을 보여준다.

정리 1 : h_i와 $z(h_i)$는 비음의 실수 값을 가지며 i의 증가함수이다.

증명 : h_i와 $z(h_i)$의 비음에 대한 증명 : 먼저 식 (2)와 식 (3)에 대하여 $V_0(i) = 0$인 다음과 같은 반복 알고리즘을 정의하자.

$$V(i) = \frac{1}{\Lambda}\left(\lambda \max \begin{Bmatrix} E_w[\max\{w + V_{t-1}(i+1),\ V_{t-1}(i)\}], \\ \max\limits_z \{p(z)(z + V_{t-1}(i+1)) + (1-p(z)) V_{t-1}(i)\} \end{Bmatrix} + \mu V_{t-1}([i-1]^+)\right), \qquad 0 \leq i \leq K-1,$$

$$V_t(i) = \frac{1}{\Lambda}(\lambda V_{t-1}(K) + \mu V_{t-1}(K-1)).$$

이때, $V_0(i)$는 i에 대하여 감소한다. 이제 귀납적 방법을 이

용하여 $V_{t-1}(i)$가 i에 대하여 감소한다고 가정하면, $V_t(i)$도 i에 대하여 감소함을 알 수 있다. 따라서, $t\to\infty$의 경우도 단조성은 성립하므로 $V(i)$는 i의 감소함수이다. 이는 식 (5)에서 정의한 h_i가 비음의 실수 값을 가짐을 의미한다. $0\le z(h_i)$에 대한 증명은 $0\le a\le z(x)$(Son and Ikuta(2007))으로부터 자명하다. h_i와 $z(h_i)$의 i에 대한 단조성 증명 : $0\le i\le K-2$에 대하여, 식 (5)와 식 (10)으로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$h_i=\frac{1}{\Lambda}(\lambda(K(h_i)-K(h_{i+1}))+\lambda h_i \\ +\mu(V([i-1]^+)-V(i))). \quad (12)$$

먼저, 위 식에서 $i=0$일 때, $h_0(\lambda(K(h_0)-K(h_i))+\lambda h_0)/\Lambda$이다. $\Lambda=\lambda+\mu+\beta$이므로, $(\mu+\beta)h_0=\lambda(K(h_0)-K(h_1))$로 정리할 수 있다. 위에서 증명한 $h_i\ge 0$이란 사실로부터 $K(h_0)\ge K(h_1)\ge 0$, 즉 $K(h_0)\ge K(h_1)$이 얻어진다. 따라서, 보조정리 3(a)에 의해 $h_0\le h_1$임을 알 수 있다. 다음으로 $1\le i\le K-2$일 때, 식 (12) 는

$$h_i=\frac{1}{\Lambda}(\lambda(K(h_i)-K(h_{i+1}))+\lambda h_i+\mu h_{i-1})$$

과 같이 기술된다. 이때 $h_{i-1}\le h_i$라고 가정하자. 위 식의 h_{i-1}에 h_i를 대입하여 부등식

$$h_i\le\frac{1}{\Lambda}(\lambda(K(h_i)-K(h_{i+1}))+(\lambda+\mu)h_i)$$

을 얻는다. 이 부등식을 정리하면 $\beta h_i\le\lambda(K(h_i)-K(h_{i+1}))$이 된다. 마찬가지로 $h_i\ge 0$이란 사실로부터 $K(h_i)-K(h_{i+1})\ge 0$, 즉 $K(h_i)\ge K(h_{i+1})$가 얻어져 보조정리 3(a)에 의해 $h_i\le h_{i+1}$가 성립한다. 결국 $i=K-2$일 때도 $h_{K-2}\le h_{K-1}$이 성립함으로 h_i가 정의되는 모든 i에 대하여 단조성 증명이 완료되었다. 또한 $z(x)$는 x의 증가함수라는 사실로부터 $z(h_i)$의 i에 대한 단조성은 자명하다($z(x)$의 성질은 Son and Ikuta (2007) 참조). ▮

위 결과가 의미하는 바는 다음과 같다. 시스템이 보유한 주문이 적을 때, 수락제어의 정책을 채택할 경우는 선택기준 h_i를, 가격제어 정책을 채택할 경우는 제시가격 $z(h_i)$를 낮게 설정하여 이익이 낮은 주문(고객)이 나타날 지라도 받아들여 시스템이 유휴상태(idle)에 빠지는 것을 막아야 한다. 반면, 시스템이 보유한 주문이 많아 시스템 용량이 포화상태가 된다면 아무리 이익이 높은 주문(고객)이 나타나더라고 수용능력이 없어 받아들이지 못하는 기회손실이 발생한다. 따라서 이를 방지하기 위해서는 선택기준 혹은 제시 가격을 높게 설정하여 사전에 이익이 적은 주문을 거절함으로써 시스템 용량에 여유를 두어 포화상태가 되지 않도록 해야 한다.

5. 수치실험

이 장에서는 수치실험을 통해 수락제어 정책과 가격제어 정책간의 스위치가 일어남을 보이고, 스위치 전략을 채택하는 경우와 그렇지 않은 경우에 대한 기대이익의 차이를 조사한다. 수치실험 조건은 다음과 같다.

$F_\xi(x)$와 $F_\alpha(x)$는 각각 [0, 1](a = 0, b = 1)과 [0.5, 0.9]인 일양분포함수이며, $\mu=0.3$, $\beta=0.01$, K = 11로 설정한다.

5.1 최적 스위치 정책

<Figure 1>의 왼편은 함수 $J(x)$의 그래프이며, 오른편은 도착률 λ의 변화에 따른 h_i의 보유 고객/주문 수 i에 대한 그래프이다. <Figure 1>은 다음과 같은 사실을 보여주고 있다.

먼저, 함수 $J(x)$는 구간$(b^o,\ b)$ $(b^o=0.9)$에서 음의 실수 값을 가지며 증가하고, 방정식 $J(x)$ = 0의 유일해 x^* = 0.27가 구간 (0, b)에서 존재하여 $x<x^*$이면 $J(x)>0$이고, $x^*\le x$이면 $J(x)\le 0$이다(함수 $J(x)$의 성질은 보조정리 3 참조).

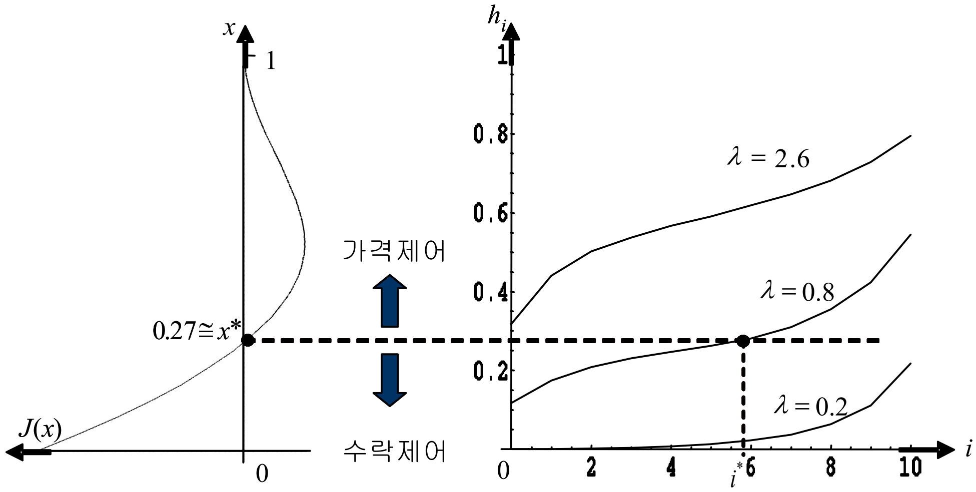

Figure 1. 함수 $J(x)$와 h_i의 그래프 및 최적 스위치 정책의 전환점 i^*

<Figure 1>의 오른 편 h_i는 도 착 율 λ의 증가함수이다. 이는 시스템에 도착하는 고객의 수가 많으면 많을수록 선택 기준(threshold)을 높여 보다 이익이 높은 주문을 받아 들이고, 반대로 도착 고객수가 적을 수록 선택기준을 낮춰 이익이 낮더라도 주문을 받아들이는 것이 최적임을 의미한다.

한편, $\lambda = 0.2$일 때, 모든 i 에 대해 $h_i < x^*$이므로 $J(h_i) > 0$이기 때문에 최적 스위치 정책(b)로부터 수락제어 정책을 채택하는 것이 최적이다. $\lambda = 2.6$일 때, 모든 i 에 대해 $h_i \le x^*$이므로 $J(h_i) \le 0$이기 때문에 최적 스위치 정책(a)로부터 가격제어 정책을 채택하는 것이 최적이다. 마지막으로 $\lambda = 0.8$일 때, 현재 보유주문수(고객) i에 대하여 $i^* = 6$가 $J(h_i) > 0$이기 때문에 수락제어 정책을, 반대로 $i^* \le i$이면 $h_i \ge x^*$이고 $J(h_i) \le 0$이므로 가격제어 정책을 채택하는 것이 최적이다.

5.2 스위치 정책을 채택하여 얻는 경제적 효과

스위치 정책을 채택하지 않고 고객(주문)을 받아들일 때 상태 i에서 얻을 수 있는 최대 기대이익을 $\widetilde{V}(i)$라고 하자. 그리고 스위치 전략을 채택하여 얻은 최대 기대이익과의 차이에 대한 비율을 $\rho(i) = (V(i) - \widetilde{V}(i))/V(i)$로 표기하기로 하자. 따라서, 수락제어 정책만을 채택했을 경우와 가격제어 정책만을 채택했을 경우에 대한 최대기대이익 비율은 각각 $\rho_w(i)$와 $\rho_p(i)$로 표기한다.

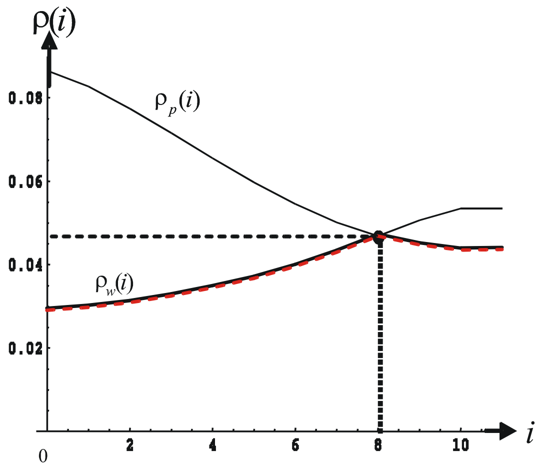

Figure 2. $\rho_w(i)$과 $\rho_p(i)$의 그래프

<Figure 2>는 $\lambda = 0.7$일 때 보유주문수 i에 대한 최대 기대이익 비율 $\rho(i)$의 단조성을 나타내고 있다. 스위치 정책을 채택하지 않고, 1) 가격제어 정책만으로 의사결정을 할 경우 최대 약 8.7% 의 기대 이익차이가, 2) 수락제어 정책을 사용하여 의사 결정을 할 경우 최대 약 5.5%의 기대이익차이가 나고 있음을 보여준다. 그리고 굵은 점선은 가격제어 정책과 수락제어 정책 중 최대 기대이익의 비율이 적은 부분을 나타낸다. 즉, $i < 8$이면 수락제어 정책을, $8 \le i$이면 가격제어 정책을 채택하여 의사결정을 했을 경우에 대한 최대기대이익의 비율을 나타내고 있다. 이처럼 최대기대이익의 비율의 차가 적도록 의사결정이 이루어졌다고 하더라도 스위치 정책을 채택할 경우와 비교하면 기대이익에서 최대 약 4.7%의 차이가 남을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 대기행렬 시스템의 수용 능력 제어 방법으로 널리 사용되고 있는 수락제어 정책과 가격제어 정책간의 스위치 정책에 관한 모델을 수립하고 최적 스위치 정책의 구조적 성질을 밝혔다. 최적 스위치 정책은 함수 $J(x)$의 형태에 의존하며, 일정 조건하에서 두 정책간 스위치 전환점은 서비스 대기중인 고객/주문 수 i^*로 주어져 서비스 대기중인 고객/주문 수가 i^*보다 적을 경우 가격제어 정책을 사용하여 주문을 받아들이고 i^* 이상이 되면 수락제어 정책으로 스위치 하여 수주하는 것이 최적임을 보였다.

그리고 두 정책간의 스위치 발생 유무에 상관없이 스위치 정책을 사용하여 고객(주문)을 선별할 때가 그렇지 않고 두 정책 중 어느 한쪽의 정책만을 채택하여 선별할 때보다 최대 기대이익이 상당히 향상됨을 보였다. 이는 본 연구에서 제안하는 스위치 전략이 일반 대기행렬 시스템의 수용능력 제어정책으로서 도입되어야 하는 타당성을 제시한 것이다.

추후연구로는 1) 일단 거절한 주문에 대한 리콜 가능성 2) 주문의 가격결정에 있어서의 게임이론적 접근방법 3) 서비스 대기중인 주문의 중도포기(reneging) 및 이로 인한 손실비용 등을 고려해 볼 수 있다.

참고문헌

Crabill, S. B., Gross, D., and Magazine, M. (1977), A classified bibliography of research on optimal design and control of queues, *Operations Research*, **25**(2), 219-232.

Dewan, S. and Mendelson, H. (1990), User delay costs and internal pricing for a service facility, *Management Science*, **36**(12), 1502-1517.

Gans, N. and Savin, S. (2005), Pricing and capacity rationing in rentals, *Working Paper, Wharton School of Business, University of Pennsylvania*.

Heyman, D. P. (1968), Optimal operating policies for *M/G/1* queueing systems, *Operations Research*, **16**, 362-382.

Johansen, S. G. (1994), Optimal prices of an *M/G/1* job shop, *Operations Research*, **42**, 765-774.

Kuri, J. and Kumar, A. (1995), Optimal control of arrivals of queues with delayed queue length information, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(8), 1444-1450.

Lin, K. Y. and Ross, S. M. (2004), Optimal admission control for a single-server loss queue, *Journal of Applied Probability*, **41**(2), 535-546.

Lippman, S. A. and Ross, S. M. (1971), The streetwalker's dilemma :

a job shop model, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **20**(3), 336-342.

Lippman, S. A. (1975), Applying a new device in the optimization of exponential queueing systems, Operations Research, **23**, 687-708.

Low, D. W. (1974), Optimal dynamic pricing policies for an *M/M/s* queue, Operations Research, **22**(3), 545-561.

Mendelson, H. (1985), Pricing computer services : queueing effects, *Communications of the ACM*, **28**, 312-321.

Miller, M. (1969), A queueing reward system with several customer classes, *Management Science*, **16**(3), 234-245.

Örmeci, E. L., Burnetas, A., and Emmons, H. (2002), Dynamic policies of admission to a two-class system based on customer offers, *IIE Transactions*, **34**, 813-822.

Paschalidis, I. C. and Tsitsiklis, J. N. (2000), Congestion-dependent pricing of network services, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **8**, 171-184.

Son, J. D. and Ikuta, S. (2007), Customer selection problem with search cost, due date, sideline profit, and no waiting room, **24**(5), *Asia-Pacific Journal of Operational Research*.

Son, J. D. (2007), Customer selection problem with profit from a sideline, *European Journal of Operational Research*, **176**(2), 1084-1102.

Stidham, S. (1985), Optimal control of admission to a queueing system, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**(8), 705-713.

Stidham, S. (1992), Pricing and capacity decisions for a service facility : stability and multiple local optima, *Management Science*, **38**(8), 1121-1139.

Stidham, S. and Weber, R. (1993), A survey of Markov decision models for control of networks of Queue, *Queueing Systems : Theory and Applications*, **13**, 291-314.

Yoon, S. H. and Lewis, M. E. (2004), Optimal pricing and admission control in a queueing system with periodically varying parameters, *Queueing Systems : Theory and Applications,* **47**(3), 177-199.

Ziya, S., Ayhan, H., and Foley, R. D. (2002), Optimal pricing for a service facility, *Working Paper, School of Industrial and Systems Engineering*, *Georgia Institute of Technology*, **8**, 171-184.