대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 2, 185-206. May 2009

분석법을 중심으로 한 기하 증명 지도에 대한 연구[1)]

나 귀 수*

분석법은 증명 방법을 찾을 수 있는 좋은 방법의 하나로 제안되어 왔다. 본 연구에서는 4명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실제로 분석법을 중심으로 증명을 지도하기 위한 교수 실험을 실시하여, 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 증명으로 표현하는 과정에서의 어려움을 살펴보았다. 본 연구 결과, 4명의 학생들은 교수 실험을 통해 분석법을 의미 있게 이해하고 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾는 데에 대부분 성공하였다. 한편, 분석법을 중심으로 한 증명 학습에서 학생들이 겪는 어려움은, 삼각형의 합동조건의 올바른 탐색, 증명 문제에 제시된 그림의 재해석, 증명 방법의 기호적 표현 등으로 나타났다.

Ⅰ. 연구의 필요성 및 목적

수학교육의 목적은 크게 정신도야성, 실용성 및 유용성, 문화적 가치 및 심미성의 세 측면에서 고려할 수 있다. 이 때 정신도야 측면에서의 수학교육은 논리적 사고 능력과 연역적 추론 능력의 개발이 그 핵심이라고 할 수 있다. 학교수학에서 논리적 사고 능력과 연역적 추론을 길러줄 수 있는 대표적인 내용이 바로 증명이다.

우리나라의 2007년 개정 수학과 교육과정에서도 논리적 사고 능력 육성을 수학과의 중요한 목적으로 설정하고 있으며, 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명하도록 강조하고 있다(교육인적자원부, 2007). NCTM(2000)에서는 '추론과 증명' 규준에서 학생들이 추론과 증명을 수학의 가장 근본적인 측면으로서 인식하고, 수학적 논쟁과 증명 능력을 개발하고 평가할 수 있어야 한다고 주장하였다. 특히 중학교에서는 연역적 추론을 통해 수학적 논의를 형식화시킴으로써 추론 능력을 발전시키고 확장할 것을 강조하였다.

그러나 많은 연구들은 학생들이 학교에서 증명을 학습한 이후에도 증명을 제대로 수행할 수 없음을 보고하고 있다(Balacheff, 1991; Healy & Hoyles, 2000; Schoenfeld, 1986; Skemp, 1989). 증명 문제는 답을 구하는 것이 아니라 증명 과정을 기술해야 하는 문제이므로, 증명 문제를 해결하기 위해서는 증명 방법을 찾은 후에, 그 증명 방법을 논리적으로 표현해야 한다. 학생들은 증명 문제를 어떻게 해결해야 하는지, 즉 증명 방법을 어떻게 찾고 그 증명 방법을 어떻게 써야 하는가에서 많은 어려움을 겪는다(Usiskin,

---

* 청주교육대학교, gsna21@cje.ac.kr
1) 본 연구는 2008학년도 청주교육대학교의 자유공모연구과제로 수행되었음.

1982; Senk, 1985; 나귀수, 1998).

학생들이 증명 방법을 찾을 수 있는 방법의 하나로서 분석법이 제안되어 왔다(강문봉 1992; 나귀수, 1998; 우정호, 2000; Heath, 1981; Polya, 1957; Robinson, 1936). 그러나 증명 방법으로서 분석법을 학생들에게 실제로 지도하고 그 교수·학습 과정에서 겪는 어려움을 분석한 연구는 매우 미흡하게 수행되었다(신정희, 2005; 남선주, 2006).

본 연구에서는, 삼각형의 성질에 대해, 4명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 분석법을 중심으로 기하 증명을 지도하기 위한 교수 실험을 실시하고자 한다. 본 연구의 문제를 구체적으로 진술하면 다음과 같다.

(1) 증명 방법으로서의 분석법의 교수·학습은 가능한가? 다시 말해서, 학생들이 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾는 것이 가능한가?

(2) 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 증명으로 표현하는 과정에서 학생들이 직면하는 어려움은 무엇인가?

II. 선행 연구 고찰

1. 증명 교수·학습에 대한 선행 연구

학생들의 증명 교수·학습과 관련하여, 증명 지도의 개선 방안, 증명 지도에서의 어려움, 학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움, 학생들이 가지고 있는 증명에 대한 오개념, 학생들의 증명 수행 능력 등에 대한 다양한 연구가 이루어졌다(Balacheff, 1991; Healy & Hoyles, 2000; Herbst, 2002; Schoenfeld, 1986; Senk, 1985; Skemp, 1989).

가. 증명 지도에서의 어려움

Herbst(2002)는 교사와 학생들이 각에 대한 명제를 증명하는 과제를 다루는 교실 에피소드를 활용하여, 증명을 만들어내는 데에 학생들을 참여시키는 교사의 활동과 관련된 것이 무엇인가를 분석하였다. Herbst는 교수학적 계약(didactical contract)과 이중 결합(double bind)이라는 이론적 개념을 토대로, 두 줄 증명(two-column proof)을 다루는 교수 활동에서 고등학교 교사에게 부과되는 서로 모순되는 요구를 드러내고 설명하였다. Herbst는 교사의 교수 활동의 두 가지 측면, 즉, 학생들이 증명을 만들어낼 수 있도록 하는 과제를 만들기 위해 교사가 해야 할 것과 학생들이 명제를 증명하도록 하기 위해서 교사가 해야 할 것을 분석하였다. Herbst는 이러한 분석을 통해, 형식적인 두 줄 증명을 행하는 데에 학생들을 참여시키는 전통적인 관행이, 증명을 위한 아이디어를 어떻게 개발해야 하는가를 고려하는 교사의 측면에서는 서로 모순되는 요구를 부과한다고 주장하였다. Herbst는 또한 교사가 증명을 지도할 때 증명을 단지 형식적 과정으로만 다루는 것에서 탈피할 것을 제안하였다.

나귀수(1998)는 증명 수업 관찰을 통해 증명을 지도하는 교사의 교수학적 방안의 대표적인 특징과 증명 지도에서 보완해야 할 측면을 확인하였다. 교사가 증명 지도에서 시도하는 대표적인 교수학적 방안은, 학생들의 증명 이해를 돕기 위하여 다양한 맥락에서 배경화를 시도함, 증명과 관련된 용어를 설명함에 있어서 가능한 한 일상적인 단어를 이용하여 간단하고 쉽게 설명함, 학생들의 증명 수행을 돕기 위하여 증명 과정을 절차화함 등으로 나타났다. 한편, 교사의 증명 지도에서 보완해야 할 부분으로는, 교사의 증명 논의 방식이 교과서의 증명 서술 방식인 종합적 양식만을 따름으로써 학생들이 진정한 '증명 활동'을 경험하지 못하고

'증명의 기록'만을 학습한다는 점, 교사가 증명 과정 자체보다는 증명의 결과를 강조함으로써 학생들이 증명의 과정과 방법을 소홀히 인식하도록 하는 점 등을 확인하였다.

나. 증명 학습에서의 어려움

Schoenfeld(1986)는 학생들이 증명의 결과를 제대로 적용하지 못하고, 기하를 공부한 대부분의 학생들이 연역적 방식과 경험적 방식을 통합하지 못하고 서로 분리된 영역으로 생각한다는 것을 확인하였다. 예를 들어, 학생들은 어떤 수학 명제가 참임을 정당화하는 증명을 배운 얼마 후에, 그 명제가 참임을 밝히라는 문제에 대해 증명을 이미 배웠음에도 불구하고 자와 컴퍼스를 가지고 '추측-테스트-추측-테스트···'를 반복하는 경험적 접근 방식을 시도하였다. 이러한 연구 결과는, 학생들이 교실의 증명 상황과 약간이라도 다른 상황에서는 증명을 수행하려 하지 않으며, 증명을 타당한 논의 형태로 수용하지 않는다는 것을 보여준다.

Senk(1985)는 1년 동안 기하 과정에서 증명을 배운 1520명의 학생들을 대상으로 증명 능력을 조사하였다. Senk는 증명을 배운 학생들의 30%만이 75% 숙달 정도의 증명 쓰기에 도달한다고 결론지었다. 근거를 제시해야 하는 간단한 증명에서는 70%의 학생들이 옳게 수행하였고, 32%의 학생들이 직사각형의 대각선의 길이가 같음을 증명할 수 있었고, 6%의 학생들이 삼각형의 합동조건으로부터 직접 이끌어내어지지 않는 약간 어려운 정리를 증명하였다. Senk의 연구에서 제시된 증명 문제를 완전하게 수행한 학생은 전체의 3%에 불과했으며, 완전한 증명을 요구한 15문제 중에서 3문제에 대해서만 50%의 학생들이 성공하였다.

Healy & Hoyles(2000)는 수학 성적이 우수한 14~15세 학생들을 조사하였다. 연구자들은 학생들이 증명에 대한 서로 다른 두 가지 개념, 즉 가장 좋은 점수를 받는 것으로 인식하는 주장에 대한 개념과 학생들이 스스로 채택하는 주장에 대한 개념을 동시에 가지고 있음을 발견하였다. 학생들은 대수적 주장이 가장 좋은 점수를 받는다고 생각하였지만, 실제로는 학생들 자신이 평가할 수 있고 자신들에게 확신을 주고 설명력이 높은 주장을 채택하였으며 대수적 내용이 배제된 주장을 선호하였다. 학생들은 경험적 주장의 한계를 인식하고는 있었지만, 자신들이 직접 증명을 구성할 때는 경험적인 주장을 더 많이 활용하였다.

이러한 연구들에서는 대부분의 학생들이 증명에 대한 의미 있는 지식을 구성하지 못한다고 결론지었다. Skemp(1989)는 이와 같은 학생들의 빈약한 증명 수행의 원인에 대해 수학적 발견의 맨 마지막 산물인 연역적 논리 체계로서의 증명을 학생들에게 그대로 제시했기 때문이라고 주장하였다. 학습자에게 수학적 발견이 행해졌던 과정, 즉 증명을 왜 그렇게 하면 되는가를 탐색할 수 있는 경험을 제공하지 못했기 때문이라는 것이다. Balacheff(1991)는 증명을 수행할 만한 논리적 성숙도를 갖추지 못한 상황에서 증명을 지도하고, 학습자가 증명의 필요성을 인식하지 못하는 데서 빈약한 증명 성취의 원인을 찾고자 하였다.

그러므로 학생들이 스스로 증명 방법을 찾을 수 있도록 지도한 다음에 찾은 증명 방법을 수학적으로 표현할 수 있도록 지도하는 것이 바람직하다. 증명 방법을 찾도록 지도하기 위한 대안적인 교수 방안은 매우 다양하다. 본 논문에서는 증명 방법을 찾기 위한 교수학적 방안으로서 분석법을 설정하고, 분석법을 중심으로 기하 증명을 가르치고 학습하는 교수 실험을 수행하고자 한다.

2. 분석법의 의미

Heath(1981)에 따르면, 분석적 방법은 Pythagoras에 의해 사용되었고, Plato에 의해 그 방법이 제안되었으며, Euclid 원론에서는 사라졌다가 Pappus에 의해 정의되었다고 한다(Heath, 1981; 강문봉, 1992에서 재인용). 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기경의 그리스 수학자 Pappus이다. Pappus는 분석법에 대하여 다음과 같이 말하였다(Heath, 1981, pp. 400-401; 우정호, 2000에서 재인용).

> 분석은 찾고 있는 것을 마치 인정된 것처럼 여기고 그로부터 잇따른 결과를 거쳐 종합의 결과로 인정되는 것까지 나아간다. 왜냐하면 분석에서 우리는 찾고 있는 것을 마치 이미 이루어진 것처럼 가정하고, 이것으로부터 결과되는 것이 무엇인지를 찾고, 다시 후자의 선행하는 원인이 무엇인지를 찾는 식으로 우리의 발자취를 되밟아 이미 알려져 있는 것이나 제1원리의 부류에 속하는 것에 이를 때까지 계속하기 때문이며, 우리는 그러한 방법을 분석 또는 거꾸로 풀이하는 것이라고 부른다.

Cornford는 이와 같은 Pappus의 분석에 대한 설명이 매우 혼란스러움을 지적하며 분석을 어느 방향으로 진행해야 할 것인가를 질문하였다. 그래서 Cornford는 분석을 다음과 같이 다시 정의하였다(강문봉, 1992에서 재인용).

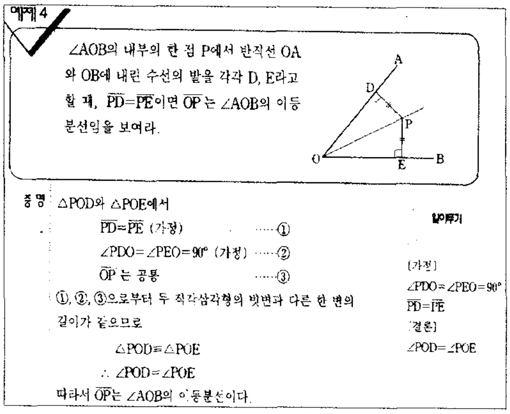
> 분석의 방법은 역사가들이 주장하는 것처럼 1이 함의하는 것을 물음으로써 시작하지 않는다. 그것은 무엇이 1을 함의하는가를 물음으로써 시작한다. 만약 2가 1을 함의한다는 것을 알면 나는 2가 참임을 아는지를 자문한다. 내가 이것을 알면 분석은 끝났다. 그러나 만약 그렇지 않다면 나는 다음 단계로 계속해야 한다. 그리고 이전처럼, 이 두번째 단계는 [⋯] 무엇이 2를 함의하는가를 묻는다. 그 과정은 내가 아는 어떤 것에 도달할 때까지 계속된다. 이것을 5라고 하자. 그러면 나는 분석을 끝마치고 종합을 할 수 있다(Robinson, 1936; 강문봉, 1992에서 재인용).

본 연구의 교수 실험에서는 Conford의 정의를 따라, 다음과 같이 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾도록 지도하였다. 분석법을 통해 증명 방법을 찾은 다음에는, 찾은 증명 방법을 정돈하여 증명 과정을 표현하도록 지도하였다.

'P⟹Q이다' 형태의 명제의 증명 방법을 찾기 위해서는, 먼저 결론인 Q가 성립하기 위한 충분조건인 P1을 찾고, 다음으로 P1이 성립하기 위한 충분조건 P2를 찾고, 이런 식으로 계속 P3, P4, …… Pn를 찾는다. 이러한 과정은 가정인 P, 정의, 또는 이미 참이라고 알려진 정리 등이 되는 Pn을 찾을 때 끝이 난다.

본 연구에서 Conford의 분석법을 따른 것은, 'P이면 Q이다(P⟹Q)' 형태의 명제를 증명함에 있어서 학생들이 도달해야 할 결론인 Q가 이미 이루어진 것처럼 가정함으로써 시작하는 Pappus의 분석법이 학생들에게 혼란을 야기할 수 있다고 판단했기 때문이다. 즉, 증명 학습을 시작하면서 '가정'과 '결론'이라는 수학적 용어를 학습해야 하는 학생들에게 '결론이 이루어진 것처럼 가정한다'는 것이 학생들에게 인지적 혼란을 야기할 수 있다는 것이다.

한편, 일부 교과서에서는 증명 지도에서 분석법을 다루고 있지만, 여전히 많은 교과서에서는 증명을 다음의 [그림 Ⅱ-1]과 같이 가정으로부터 결론을 이끌어내는 방식으로 표현하고 있다.



예제 4

$\angle AOB$의 내부의 한 점 P에서 반직선 OA와 OB에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 할 때, $\overline{PD}=\overline{PE}$이면 $\overline{OP}$는 $\angle AOB$의 이등분선임을 보여라.

증명 $\triangle POD$와 $\triangle POE$에서

$\overline{PD}=\overline{PE}$ (가정) ......①

$\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$ (가정) ......②

$\overline{OP}$는 공통 ......③

①, ②, ③으로부터 두 직각삼각형의 빗변과 다른 한 변의 길이가 같으므로

$\triangle POD \equiv \triangle POE$

$\therefore \angle POD=\angle POE$

따라서 $\overline{OP}$는 $\angle AOB$의 이등분선이다.

알아두기

[가정]

$\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$

$\overline{PD}=\overline{PE}$

[결론]

$\angle POD=\angle POE$

[그림 Ⅱ-1] 증명의 표현 (양승갑 외, 2001, p. 61)

그러나 학생들은 [그림 Ⅱ-1]과 같이 제시된 증명을 그대로 따라가서는 증명 방법을 찾을 수 없다. [그림 Ⅱ-1]과 같이 정돈하여 표현된 증명이 어떻게 나오게 되었는가를 알기 위해서는 필연적으로 분석법을 통해 증명의 방법을 찾는 과정이 선행되어야 한다. 교과서에서는 지면의 한계와 교과서라는 특수한 환경 때문에 증명이 나오게 된 방법이나 과정을 상세하게 다룰 수 없는 것이 사실이다. 그러므로 교사는 학생들에게 증명을 지도할 때 먼저 분석법을 통해 증명 방법을 찾고 난 다음에, 찾은 증명 방법을 정돈하여 가정으로부터 결론을 이끌어내는 방식으로 증명을 표현하도록 지도할 필요가 있다.

분석법을 활용한 증명 지도에 대한 국내의 연구들을 살펴보면, 신정희(2005)는 '하도록 요구하고 있는 것을 이미 이루어진 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼 가정하는 것이' 분석이라는 관점 하에(p. 3), 분석법의 사용이 학생들의 증명 문제해결에 미치는 영향을 조사하였다. 연구 결과, 분석을 활용한 증명 활동을 함으로써 학생들의 증명에 대한 태도가 매우 긍정적으로 변화된 것으로 나타났다. 또한 분석법으로 인해 발생되는 학생들의 인지적 부담은 별로 문제가 되지 않는 것으로 나타났다. 학생들은 분석을 하나의 정의로 받아들였으며, 분석을 이용하기에 앞서 알아야하는 도형들의 성질과 도형들의 관계를 분명히 하는 문제는 학생들의 반성적 활동에 도움이 되는 것으로 나타났다(pp. 44-45).

남선주(2006)는 역동적 기하 환경에서 분석법의 활용이 학생들의 작도 문제해결에 미치는 영향과 분석법을 활용한 작도 문제해결이 학생들의 증명 학습에 미치는 영향을 조사하였다. 남선주는 '찾고자 하는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼 가정하고, 바라는 결과가 이루어지기 위해 어떤 조건이 있어야 하는가를 묻고 이러한 과정을 계속 반복하여 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 도달한 방법'이 분석이라는 관점 하게 연구를 진행하였다(p. 4). 남선주는 역동적 기하 환경에서는 보다 정확한 작도가 가능하여 분석법의 사용이 용이해진다는 것, 문제해결 과정에서 분석적 방법과 종합적 방법을 함께 사용하게 된다는 것, 증명 과정에서 쓰이는 보조선을 재발견하는 과정을 거치므로 그 의미를 잘 이해하게 된다는 것, 분석과 종합의 과정을 통하여 작도 방법과 그 이유를 잘 설명하고 정당화할 수 있게 되어 증명 능력이 신장된다는 것 등을 연구 결과로써 제시하였다(pp. 67-69).

신정희와 남선주의 연구에서 취한 분석의 관점은 Pappus의 정의에 해당한다. 본 연구에서의 분석의 관점은 Conford의 정의라는 점에서, 본 연구의 교수 실험과 결과는 이전의 연구와 구분된다. 한편, 남선주는 분석법을 활용하되 역동적 기하 환경이라는 특수한 환경에서 분석법을 활용하고, 또한 분석법의 활용을 작도 문제해결과 증명 학습 능력과 관련지어 연구를 수행하였다. 이에 반해 본 논문은 일상적인 지필 환경에서 분석법을 활용한 증명 방법 찾기와 증명 과정의 표현을 다루고 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 대상

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 중학교 1학년 학생 4명이며, 본 연구에서는 이 학생들을 S1, S2, S3, S4로 부르기로 한다. 이 학생들은 우리나라의 중소도시에 거주하고 있으며 같은 중학교의 같은 학급에 속해 있는 학생들이며, 본 연구의 교수 실험에 자발적으로 참여하였다.

본 연구에서 중학교 1학년 학생들을 연구 대상으로 설정한 이유는, 학교 이외의 사립 학원 등에서 증명을 선행으로 학습했을 가능성을 배제하기 위해서였다. 본 연구에서 다룬 증명 내용은 우리나라 교육과정에서 중학교 2학년에서 다루도록 되어 있는 내용이다. 중학교 2학년 학생들의 경우, 선행 학습으로 증명을 학습했을 가능성이 있을 것으로 예측하여 중학교 1학년 학생들을 연구 대상으로 선정하였다. 학생들의 선행 학습 내용을 파악하기 위하여 개별 면담을 실시한 결과, 학생들은 중학교 1학년 1학기까지의 내용을 학습한 상태였다. 따라서 본 연구에 참여한 학생들은 도형 영역에서 초등학교 6학년까지의 내용을 학습한 상태에서 본 연구에 참여한 것이라고 할 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 연구 참여 학생들의 수학 성적

학생	중간고사	기말고사	평균
S1	84	89.5	86.8
S2	90	49	69.5
S3	88.7	74.5	81.6
S4	71	58	64.5

본 연구에 참여한 학생들의 중학교 1학년 1학기의 학교 수학 성적을 제시하면 다음의 <표 Ⅲ-1>과 같다. 중간고사에서 다룬 내용은 집합, 정수와 유리수, 문자와 식 등이며, 기말고사에서 다룬 내용은 일차방정식, 함수 등이다. 학교 성적을 기준으로 해서 학생들의 수학 성취도를 살펴보면, 학생 S1과 S3은 상 수준, 학생 S2와 학생 S4는 중 수준이라고 할 수 있다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 4명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 하여 분석법을 중심으로 증명을 지도하기 위한 교수 실험을 실시하였다. 교수 실험을 통하여 증명 방법으로서의 분석법의 교수·학습 가능성을 확인하고, 분석법을 통해 증명 방법을 찾고 그것을 증명으로 표현하는 과정에서 나타난 학생들의 학습의 어려움을 자세히 확인하고자 하였다.

교수 실험은 2008년 6월~7월에 하루에 1~2시간씩 총 15차시로 진행되었다. 교수 실험에서는, 먼저 중학교 1학년의 도형 내용 중에서 증명 학습에 필요한 내용들을 1~3차시에 걸쳐 지도한 다음, 4~15차시에 걸쳐 학생들에게 분석법과 증명을 지도하였다. 교수 실험에서 다룬 내용은 삼각형의 성질로서, 이 내용은 우리나라의 수학과 교육과정에서 중학교 2학년에서 다루도록 되어 있다.

본 연구의 교수 실험에서는 본 연구자가 교사로서 직접 학생들을 지도하였다. 따라서 본 연구자는 교수 실험을 진행하는 교사이자 동시에 학생들의 증명 방법과 과정을 관찰하고 분석하는 연구자의 역할을 수행하였다.

본 연구에서는 총 15차시에 걸친 교수 실험의 전체 내용을 비디오와 오디오로 녹화하였다. 또한 4명의 학생들 각자에게 학습 내용이 수록된 활동지를 제공하였으며, 학습 활동에서 이루어진 모든 과정은 학생들의 개별 노트에

작성하도록 하였다.

따라서 본 연구에서 분석된 자료는 교수 실험 과정에서 연구자가 관찰한 내용을 기록한 관찰 일지, 학생들의 증명 학습 과정이 기록된 개별 노트, 비디오와 오디오 녹화 자료 등이다.

Ⅳ. 교수 실험

이 장에서는 4명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 분석법을 중심으로 증명을 지도한 교수 실험의 내용을 상세하게 살펴보기로 한다.

1. 교수 실험의 전반적 내용

본 연구에서는 4명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 분석법을 중심으로 하여 증명을 지도하기 위한 교수 실험을 실시하였다. 교수 실험에서 다룬 내용은 삼각형의 성질로서, 이 내용은 우리나라의 수학과 교육과정에서 중학교 2학년에서 다루도록 되어 있다. 본 연구에 참여한 학생들은 중학교 1학년 1학기를 끝마친 상태이므로, 도형 영역에서는 초등학교 6학년까지의 내용을 학습한 상태에서 본 연구에 참여하였다.

교수 실험은 2008년 6월~7월에 하루에 1~2시간씩 총 15차시로 진행되었다. 교수 실험에서는, 먼저 중학교 1학년의 도형 내용 중에서 증명 학습에 필요한 내용들을 1~3차시에 걸쳐 교사가 설명하면서 지도하였다. 중학교 1학년의 도형 내용 중에서 맞꼭지각의 성질, 평행선에서 동위각과 엇각의 성질, 삼각형의 합동조건, 삼각형과 사각형의 내각의 합 등을 지도했으며, 이 내용들은 학생들이 학교에서 사용하고 있는 교과서(강행고 외, 2001)를 활용하였다.

다음으로, 교수 실험에서는 4~15차시에 걸쳐 학생들에게 분석법과 증명을 지도하였다. 증명과 분석법의 도입을 다룬 4~6차시에는 교사(본 연구자)가 학생들에게 발문하면서 상세하게 설명하고 안내하는 방식으로 지도하였다. 7~15차시에는 제시된 증명 문제에 대해 먼저 학생들이 개별적으로 각각 분석법을 활용하여 스스로 증명 방법을 찾고, 찾은 증명 방법을 기호로 표현하도록 하였다. 학생들이 개별적으로 증명 문제를 해결하는 동안 교사는 학생들을 관찰하면서 학습에서의 어려움을 확인하고 기록하였다. 학생들이 개별적으로 증명 문제를 해결하고 나면, 교사는 학생들 전체와 함께 증명 방

<표 Ⅳ-2> 교수 실험의 내용과 수업 방법

차시	학습 내용	수업 방법
1차시	맞꼭지각의 성질, 평행선에서 엇각과 동위의 성질	교사의 상세한 설명과 안내를 따라 학생들이 학습함
2차시	삼각형의 합동조건	
3차시	삼각형과 사각형의 내각의 합과 조작 활동을 통한 정당화	
4차시	증명의 도입: 조작 활동을 통한 정당화와 연역적 정당화의 비교. 삼각형과 사각형의 내각의 합	
5차시	분석법의 도입: 교사의 상세한 설명과 안내	
6차시	분석법의 지도: 교사의 상세한 설명과 안내	
7~11차시	증명 문제 해결: 분석법을 활용하여 증명 방법 찾고 표현하기. 이등변삼각형의 성질	학생 각자 분석법을 활용하여 증명 방법 찾고 증명 표현하기 → 교사와 학생 전체의 토론과 교사의 설명 → 학생 각자의 증명 방법과 표현을 반성하고 정리하기
12~15차시	증명 문제 해결: 분석법을 활용하여 증명 방법 찾고 표현하기. 직각삼각형의 성질	

법과 그것의 기호적 표현을 토론하고 정리하였다. 또한 학생들이 드러낸 오류를 설명하였으며, 그것을 극복하기 위한 방안을 제시하였다. 교사와 학생들 전체가 참여하는 토론과 교사의 설명을 들은 다음에 학생들은 각자가 시도한 증명 방법과 표현을 반성하고 정리하였다. 학생들이 한 차시에 다룬 증명 문제는 2~3개였으며, 학생들이 스스로 증명 방법을 탐색하고 그것을 증명으로 표현할 수 있도록 충분한 시간을 할애하였다. 교수 실험에서 다룬 학습 내용과 주요 수업 방법을 정리하면 다음의 <표 Ⅳ-2>와 같다.

교수 실험에서 다룬 증명 문제들은 제7차 교육과정의 중학교 2학년 교과서(강옥기 외, 2001; 강행고 외, 2001; 양승갑 외, 2001; 이준열 외, 2001; 조태근 외, 2001)에 제시된 것들을 활용하였다. 교수 실험에서 다룬 증명 문제들 중에서 대표적인 문제들을 [부록]에 제시하였다.

2. 분석법과 증명의 지도

가. 증명의 도입: 구체적 조작 활동과 증명의 차이점 비교

본 연구의 교수 실험에서 증명의 도입은 학생들의 귀납적 추론과 연역적 추론의 비교를 통해서 이루어졌다. 본 연구의 교수 실험에서는 4차시에 학생들로 하여금 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°임을 연역적 추론을 통해 정당화하도록 지도하였다. 본 연구자는 학생들에게 임의의 삼각형 △ABC를 그리고 꼭짓점 A를 지나면서 변 BC에 평행인 직선을 그리게 하고, 평행선에서 엇각과 동위각의 성질을 이용하여 △ABC의 내각의 크기의 합이 180°임을 설명하도록 하였다. 4명의 학생들은 본 연구자(교사)의 상세한 안내를 따라 △ABC의 내각의 크기의 합이 180°임을 설명하였다.

본 연구자는 4명의 학생들 중 1명의 공책을 활용하여, 삼각형의 내각의 합이 180°인 이유를 다시 한 번 설명하였다. 이와 같은 교수 · 학습 활동 이후에 본 연구자(교사)는 학생들에게 3차시에 했던 조작 활동을 통한 정당화 방법, 즉 색종이에 임의의 삼각형을 그린 다음 세 각을 오리고 세 꼭짓점을 한 데 모아 붙이면 일직선이 되고 따라서 삼각형의 내각의 합이 180°임을 확인했던 방법을 상기하도록 했다. 그런 다음에 3차시에 했던 조작적 방법과 4차시에 했던 방법을 비교하고 그 차이점을 설명해 보도록 했다. 연구자(교사)는 학생들과 두 방법을 비교하면서 '증명'이라는 용어를 도입하였다. 다음의 [장면 1]은 연구자(교사)가 학생들과의 대화를 통해 '증명'을 도입하고 있는 장면이다.2)

[장면 1] 증명의 도입: 조작 활동을 통한 방법과 증명 비교하기

R: 저번에 했던 방법 생각나요?
S2: 아, 삼각형 오려서 종이에 붙여서 했던 방법이요?
R: 그래, 그 방법. 모두 생각나요?
Ss: 네.
R: <u>그러면 그 방법하고 오늘 했던 방법하고 한 번 비교해 볼까요?</u>
Ss: <u>오늘 했던 방법이 더 좋은 것 같아요.</u>
R: 왜?
S2: <u>이것이 더 간지나요. 더 뽀대나고 폼나요.</u>3)
R: 왜? 더 폼이 나지?
S1: <u>기호를 썼으니까요.</u>
S2: <u>이것이 더 멋져 보여요. 아, 생각을 좀 했구</u>

---

2) 본 연구에 제시된 수업 장면에서 'R'은 연구자(교사)를 의미하며, S1, S2, S3, S4는 각각의 학생이 대답한 것을 뜻하며, Ss는 학생들이 한꺼번에 동시에 대답한 것을 뜻한다.
3) 여기에서 '간지나다'나 '뽀대나다'는 것은 '멋지다'나 '폼난다'와 같은 의미를 갖는 중학교 학생들이 사용하는 은어이다.

나 이렇게 보여요.

R: 그래?

S2: 색종이 자르고 붙이는 것은 좀 초딩[4] 같아요.

S1: 색종이로 하는 것은 실제로 해 보니까 이렇다는 거지, 구체적인 증거가 없잖아요.

R: 구체적인 증거가 없어요?

S2: 이것은 (평행선에서) 엇각이나 이런 것을 알고 하는 거잖아요?

S1: (웃으면서) 오늘 한 것이 수학적 능력이 있는 것이에요.

R: 아, 수학적 능력이 있는 것이구나.

S2: 이렇게 하는 것이 훨씬 좋아요.

R: 그렇구나. 오늘 했던 방법에서는 평행선에서 동위각의 크기가 같다, 평행선에서 엇각의 크기가 같다는 것을 이용해서 삼각형의 세 각의 합이 180°라는 것을 설명했고, 지난 시간에 한 것은 그냥 삼각형을 잘라서 붙여보고 180°이다 이렇게 설명한 것이네요.

Ss: 네.

R: 오늘 한 것과 같이, 이미 참이라고 알려진 성질을 이용해서 새로운 명제, 그러니까 새로운 수학적 성질이 참임을 설명하는 것을 증명이라고 해요.

위의 대화에서 알 수 있듯이, 학생들은 삼각형의 세 각을 오리고 붙이는 활동을 통해 삼각형의 세 각의 합이 180°임을 설명하는 것보다, 평행선에서의 동위각과 엇각의 성질을 이용하여 삼각형의 세 각의 합이 180°임을 설명하는 것이 더 좋은 방법이라고 주장하였다. 연구자(교사)는 이와 같은 학생들의 인식을 바탕으로 '증명'을 학생들에게 처음으로 도입하였다.

나. 분석법을 활용하여 증명 방법 찾기의 지도

본 연구의 교수 실험에서는 먼저 분석법을 통해 증명 방법을 찾은 후에 그 증명 방법을 정리하여 표현하도록 지도하였다. 교수 실험에서 분석법은 5차시에 처음으로 지도하였다. 다음의 [장면 2]는, 연구자(교사)가 5차시에 [문제 1]에 대해 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현하는 과정을 지도한 것이다.[5]

[장면 2] 분석법의 지도

R: 자, 여기를 보세요. 우리가 증명해야 하는 것, 그러니까 우리의 목적은 무엇이지요?

Ss: 변 AB와 변 CD의 길이가 같다는 것이요.

R: 증명 문제는 쉽지 않아요. 왜냐하면 여러분이 이전에 했던 문제에서는 답을 구하면 되는 것이 많았는데, 증명 문제에서는 증명하는 과정과 그 방법을 다 적어야 해요.

S2: 휴~

R: 증명 방법을 찾기 위해서는 증명해야 할 사실, 그러니까 우리의 목적을 잘 살펴야 해요. 이 문제에서 우리의 목적은 뭐지요?

S2: 변 AB와 변 CD의 길이가 같다는 거예요.

R: 그러면 이렇게 생각해 봅시다. 우리의 목적은 변 AB와 변 CD의 길이가 같다는 것인데, 그 이전에 무엇을 먼저 보이면 우리의 목적에 도달할 수 있는지 생각해 봅시다.

Ss: ……

R: 변 AB와 변 CD의 길이가 같다는 것을 보이기 위해서 먼저 무엇을 보이며 될까?

Ss: ……

R: 그러면 변 AB와 변 CD가 들어있는 삼각형을 찾아 봐요. 삼각형이 보이나요?

S3: 네, 보여요.……

R: S3이 한 번 말해 볼까?

S3: 삼각형 ABO와 삼각형 DCO가 있어요.

R: 그렇지! 그러면 삼각형 ABO와 삼각형 DCO가 어떻게 되면 우리의 목적을 달성할 수 있을까?

Ss: ……

4) '초딩'은 '초등학교 학생'을 뜻하는 은어이다.

5) 본 연구의 교수 실험에서 활용된 증명 문제들 중에서 본 논문에서 언급되는 문제들은 [부록]에 제시되어 있다.

S1: (시간이 약간 지난 후에) 두 삼각형이 합동이면 될 것 같아요.

R: 그것이 무슨 말인지 자세히 설명해 볼까?

S1: 삼각형 ABO와 삼각형 DCO가 합동이면, 변 AB와 변 CD가 대응하는 변이 되니까 그 길이가 같아져요.

S2: 무슨 말이지?

R: 선생님이 다시 한 번 설명해 볼게. (그림을 가리키면서) 삼각형 ABO와 삼각형 DCO가 합동이 된다면, 봐라. 이 변(변 AB)과 이 변(변 CD)이 서로 대응하는 변이 되네. 합동인 두 삼각형에서 대응하는 변의 길이는 어떻게 된다고 했지?

Ss: 같아요.

R: 그렇구나. 삼각형 두 개, 삼각형 ABO와 삼각형 DCO가 합동이기만 하면, 변 AB와 변 CD는 대응변이 되어 길이가 같겠구나. 그러면, 이제 여러분이 삼각형 ABO와 삼각형 DCO가 정말 합동이 되는지 설명해 보자. 자, 각자 해 보도록 하자.

Ss: (학생들은 각자 두 삼각형이 합동임을 공책에 설명해 본다.)

S2: 선생님, 저 알았어요.

R: 좋아. 잠깐만 다른 친구들을 위해서 시간을 더 줄게. 조금 있다가 S2가 설명해 보자.

Ss: (아직 설명하지 못한 학생들은 계속해서 두 삼각형이 합동임을 설명해 본다.)

R: 자, 이제, S2의 설명을 들어 보자. S2야, 두 삼각형이 어떤 합동조건으로 합동이 되지?

S2: SAS 합동조건이에요.

R: 좋아. S2가 설명해 볼까?

S2: 음, 그러니까, 변 AO와 CO가 같잖아요?

R: 왜?

S2: 문제의 조건에서 그랬어요.

R: 그렇구나.

S2: 그리고, 변 BO와 DO가 같아요.

R: 그건 왜 그렇지?

S2: 그것도 문제의 조건에서 그랬어요.

R: 음, 그리고?

S2: 각 AOB와 각 DOC가 같아요.

R: 왜 그렇지?

S2: (흐흐흐 웃음) 맞꼭지각이어서 그래요. 맞꼭지각은 항상 같아요.

R: 그런가? 맞꼭지각은 항상 크기가 같은가?

Ss: 네, 맞아요.

R: S2가 아주 잘 했어요. 선생님이 다시 한 번 정리해 볼게. 우리의 목적인 변 AB와 변 CD가 같다는 것을 보이기 위해서 변 AB와 CD가 들어있는 삼각형 두 개를 찾아서 그 두 삼각형이 합동이라는 것을 보이면 되는 거예요. 그 두 삼각형이 합동이기만 하면, 변 AB와 변 CD는 대응변으로 길이가 같게 되는 거예요. 그런데, 중요한 것 한 가지, 정말 중요한 것인데, 두 삼각형이 합동이라는 것을 보일 때는 어떤 것만 써야 할까?

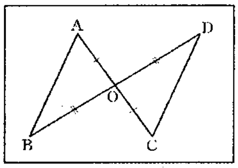
S2: 문제에서 제시한 조건이요.

R: 그렇지! 문제에서 제시한 조건과 또 무엇을 써야 할까?

S1: 우리가 이미 알고 있는 참인 것이요. 그러니까 맞꼭지각의 성질, 이런 것이요.

R: 그렇지! 두 삼각형이 합동이라는 것을 보일 때에는 반드시, 문제에서 제시한 조건과 우리가 이미 알고 있는 참인 성질을 써야 해요. 자 그러면, 선생님이 우리가 찾은 증명 방법을 칠판에 정리해서 적어 볼 테니까([그림 Ⅳ-1]의 판서 내용 참고) 각자 노트에 정리해 봅시다.

[문제 1] 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABO와 CDO에서 $\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{DO}$ 이다. 이 때 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 임을 증명하시오.



<증명>

$\triangle ABO \equiv \triangle CDO$

[$\because$ $\overline{AO}=\overline{CO}$ (조건)

$\overline{BO}=\overline{DO}$ (조건)

$\angle AOB = \angle COD$ (맞쪽지각)

$\Rightarrow$ SAS 합동조건]

$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{CD}$ (대응하는 변)

[그림 Ⅳ-1] 증명 방법을 정리하여 표현한 교사의 판서

한편, 위의 장면에서 교사와 학생들이 '조건'과 '목적'이라는 단어를 사용하고 있음을 알 수 있다. 본 연구의 교수 실험에서는 명제의 '가정'과 '결론'이라는 용어를 8차시에 도입하였다. 그 이전에는 '가정'과 '결론' 대신에 '조건'과 '목적'이라는 단어를 사용하였다. 이것은 '가정'과 '결론'이라는 용어가 증명을 처음 학습하는 학생들에게 인지적 부담을 줄 것으로 판단하여, '가정'과 '결론'이라는 용어를 점진적으로 도입하기 위해서였다. 본 연구의 교수 실험에서 학생들은 문제에 제시되어 있는 것은 '조건'으로, 증명에서 도달해야 할 것은 '목적'으로 분명하게 인식하였으며, '조건'과 '목적'으로부터 '가정'과 '결론'이라는 용어로 진행하는 데에 어려움을 느끼지 않았다.

교수 실험 6차시도 5차시와 동일한 방식으로 수업을 진행하였다. 교사가 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현하는 것을 상세하게 안내하고 지도하였다. 7차시부터는, 제시된 증명 문제에 대해 학생들 각자 개별적으로 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현하는 방식으로 교수 실험이 진행되었다. 학생들의 개별적인 증명 문제해결 이후에는 교사가 학생들 전체와 함께 증명 방법과 증명의 기호적 표현을 토론하고 정리하였다. 또한 교사는 학생들이 드러낸 오류를 설명하였으며, 그것을 극복하기 위한 설명을 제시하였다. 교사와 학생들 전체가 참여하는 토론과 교사의 설명을 들은 다음 학생들은 각자가 시도한 증명 방법과 표현을 반성하고 정리하였다.

Ⅴ. 결과 및 논의

이 장에서는 증명 방법으로서의 분석법의 교수·학습 가능성, 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 표현하는 과정에서 나타난 학생들의 어려움 등을 살펴보기로 한다.

1. 분석법을 활용하여 증명 방법 찾기

본 연구에 참여한 4명의 학생들은 교수 실험이 진행되면서 분석법의 의미를 잘 이해하였다. 다음의 [장면 3]은 교수 실험 10차시에 [문제 2]를 학생들이 각자 증명한 후, 연구자(교사)와 학생들이 나눈 대화이다. 학생들이 변 BD와 변 AE의 길이가 같음을 보이기 위해 두 삼각형 △BDC와 △EAC가 합동임을 먼저 보여야 하는 이유를 잘 이해하고 있음을 알 수 있다.

[장면 3] 학생들의 분석법의 이해

R: <u>증명해야 할 것은 변 BD와 변 AE의 길이가 같다는 것인데, 왜 삼각형이 합동이라는 것을 보이는 거지?</u>

S2: <u>이유를 제시하려구요.</u>

S4: <u>합동인 것을 보여야 두 변의 길이가 같다는 것을 보일 수 있어요.</u>

S1: <u>합동이라는 것을 먼저 보이면 대응하는 두 변이 같음을 보일 수 있어요.</u>

R: 그렇구나. 그런데, 합동이라는 것을 보일 때 반드시 어떻게 해야 한다고 했지?

S3: 문제에서 주어진 조건만 이용해야 해요.

S2: 우리가 알고 있는 참인 수학적 성질만을 이용해야 해요.

R: 그렇지. 증명해야 할 것을 이용하면 된다?, 안 된다?

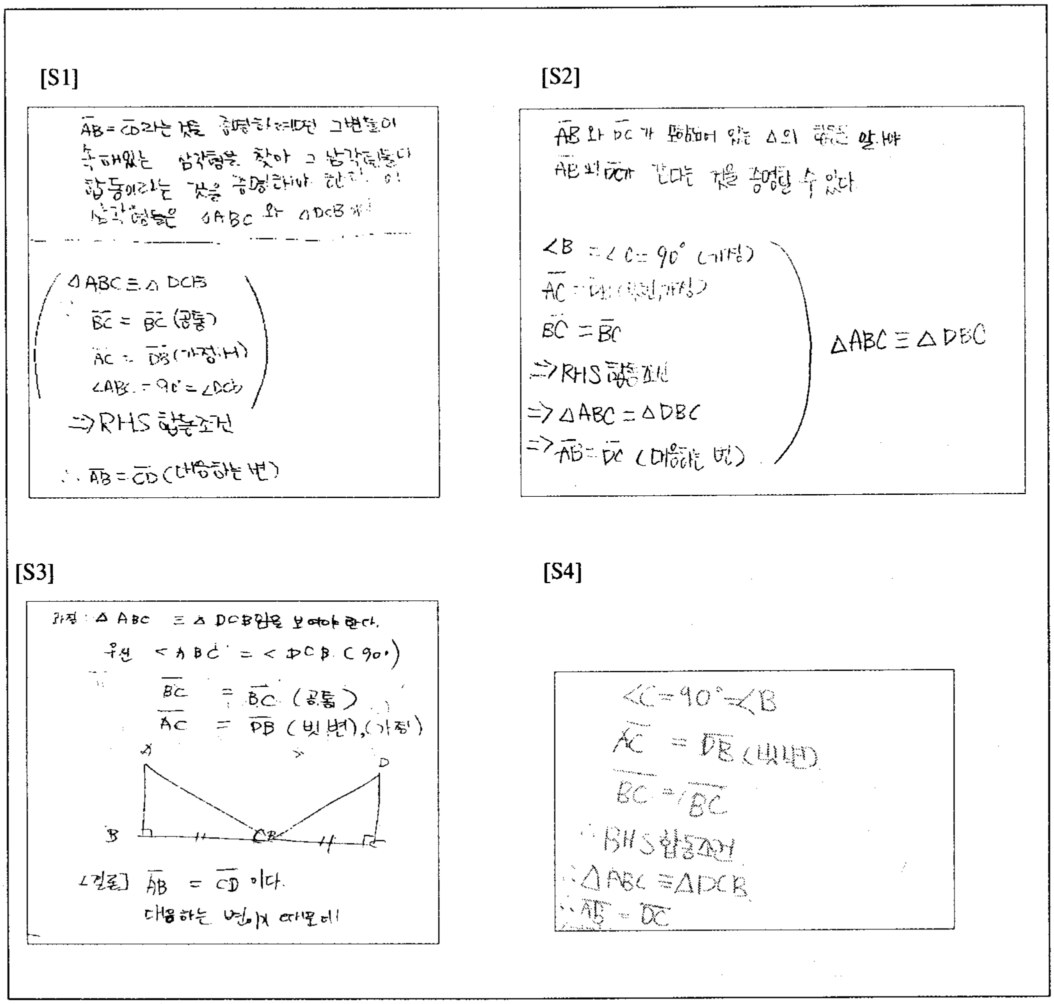
Ss: 안돼요.

다음의 [그림 V-1]은 교수 실험 12차시에 [문제 3]에 대해 학생들이 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 표현한 것이다.

학생 S1, S2, S3은 변 AB와 변 CD의 길이가 같음을 보이기 위해 변 AB와 변 CD가 포함되

어 있는 △ABC와 △DCB가 합동임을 보여야 한다고 설명하고 있다. 그런 다음에 △ABC≡△DCB임을 문제에서 주어진 조건들을 활용하여 설명하고 있다. 한편, 학생 S4는 별다른 설명 없이 △ABC≡△DCB를 곧바로 제시하고 있음을 알 수 있다. 학생 S4에게 △ABC≡△DCB임을 보이는 이유를 질문하자 "△ABC와 △DCB가 합동이 되어야 변 AB와 변 CD의 길이가 같으니까요. 그런데, 선생님, 그 이유를 매번 적는 것이 힘들고 번거로워요. 그냥 쓰면 안 되나요?"라고 대답하였다. 학생 S4도 다른 학생들과 마찬가지로 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 있었지만, 분석법의 사고 과정을 쓰는 것을 귀찮게 생각하였다.

분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현한 학생들의 또 다른 증명 문제해결의 예를 제시하면 다음의 [그림 V-2]와 같다. [그림 V-2]는 교수 실험 13차시에 [문제 4]에 대해 학생들이 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 표현한 것이다.

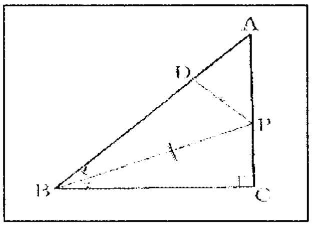


[그림 V-1] 학생들의 분석법을 활용한 증명 (문제 3)

[S1]

∠PBD = ∠PBC 라는 것을 증명하려면 그 각들이 속해있는 삼각형을 찾아 그 삼각형들이 합동이라는 것을 증명해야 한다. 이 삼각형들은 △DPB와 △CPB이다.

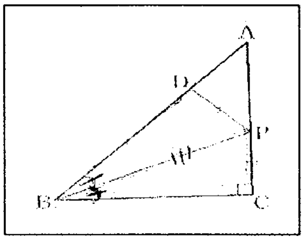
△DPB ≡ △CPB
∵ $\overline{PD} = \overline{PC}$ (가정)
∠C = 90° = ∠D (가정)
$\overline{PB} = \overline{PB}$ (공통, 빗변)
⇒ RHS 합동 조건
∴ ∠PBD = ∠PBC (대응하는 각)



[S2]

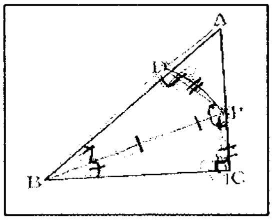
∠PBD와 ∠PBC이 같다는 것을 구하려면, 그 각이 있는 두개의 삼각형이 합동임을 찾아야 △DBP와 △CBP의 각인 ∠DBP와 ∠CBP를 구할 수 있다.

∠BDP = ∠BCP (가정) = 90°
$\overline{PB} = \overline{PB}$ (빗변)
$\overline{DP} = \overline{CP}$ (가정)
⇒ RHS 합동조건
⇒ △DBP ≡ △CBP
→ ∠DBP = ∠CBP (대응하는 각)



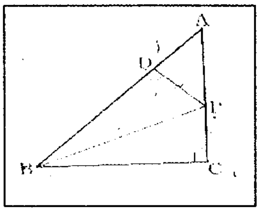
[S3]

과정: ∠PBD = ∠PBC 임을 보이기 위해서
△PBD ≡ △PBC 임을 알아야 한다.
∠BDP = ∠BCP (90°)
$\overline{BP} = \overline{BP}$ (빗변)
$\overline{DP} = \overline{CP}$ (가정) ⇒ RHS 합동조건
합동이다.
그러므로 ∠DBP = ∠CBP



[S4]

∠D = 90° = ∠C
$\overline{BP} = \overline{BP}$
$\overline{DP} = \overline{CP}$
∴ RHS 합동조건 → △BDP ≡ △BCP
∵ 이등분선 : $\overline{BP}$
∴ ∠DBP = ∠CBP → 대응하는 각



[그림 V-2] 학생들의 분석법을 활용한 증명 (문제 4)

본 연구에 참여한 4명의 학생들의 수학 성적이 중 수준 이상임을 고려할 때, 교수 실험을 통해 적어도 중 수준 이상의 학생들은 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾는 것이 가능함을 확인할 수 있었다. 한편, 본 연구의 교수 실험에서는 삼각형의 성질, 이등변삼각형의 성질, 직각삼각형의 성질 등을 중점적으로 다루었으며, 따라서 삼각형의 합동조건과 직각삼각형의 합동조건 탐색이 매우 중요하였다. 본 연구의 교수 실험을 통해, 적어도 이러한 내용에 있어서는 학생들이 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현하는 것이 가능함을 확인할 수 있었다.

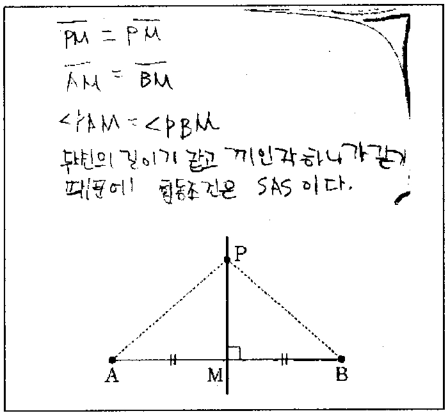
2. 분석법의 활용한 증명 방법 찾기에서의 어려움

이하에서는 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 표현하는 과정에서 나타난 학생들의 어려움과 학생들이 그러한 어려움을 어떻게 극복했는가를 살펴보기로 한다.

가. 삼각형의 합동조건 탐색의 어려움

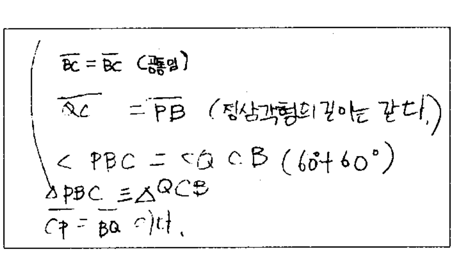
학생 S3과 S4는 증명 학습 초기에 분석법을 활용한 증명 방법 탐색에서 삼각형의 합동조건을 바르게 찾는 데에 어려움을 겪었다. 교수 실험이 진행되면서 학생 S3과 S4는 이와 같은 어려움을 극복하였지만, 증명 학습 초기에 삼각형의 합동조건을 바르게 찾는 것이 학생들에게 큰 어려움임을 확인할 수 있었다. 한편, 학생 S1과 S2는 증명 방법 탐색에서 삼각형의 합동조건을 바르게 찾는 데에 별다른 어려움을 겪지 않았다.

학생 S3은 교수 실험 8차시까지 문제에 제시된 조건 이외의 성질을 활용하여 삼각형의 합동조건을 제시하는 오류를 나타냈다. [문제 5]에서 $\triangle PMA$와 $\triangle PMB$가 합동임을 보이기 위해서는 문제에서 주어진 조건인 $\overline{PM}=\overline{PM}$, $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle PMA=\angle PMB$을 이용하여 $\triangle PMA$와 $\triangle PMB$가 SAS 합동조건으로 합동임을 설명해야 한다. 그러나 학생 S3은 $\angle PMA=\angle PMB$ 대신에 문제에 제시된 조건이 아닌 $\angle PAM=\angle PBM$을 이용하여 SAS 합동을 설명하고 있다([그림 V-3] 참고). 학생 S3은 SAS 합동의 정확한 의미를 파악하지 못하고 있으며, 삼각형의 합동조건을 찾는 데에 문제에 제시된 조건 이외의 성질을 활용하는 오류를 나타낸 것이다.



[그림 V-3] 학생 S3의 삼각형의 합동조건 탐색의 오류

학생 S3은 교수 실험이 진행되면서 연구자(교사)의 지도와 학생들 전체 토론을 통해 이와 같은 오류를 극복하였다. 다음의 [그림 V-4]은 10차시에 다룬 [문제 6]에 대한 학생 S3의 증명 내용이다. 문제에서 제시된 조건만을 활용하여 $\triangle PBC$와 $\triangle QCB$의 합동조건을 바르게 제시하고 있음을 알 수 있다.



[그림 V-4] 학생 S3의 삼각형의 합동조건 탐색의 오류

학생 S4는 이와 같은 어려움을 극복하는 데에 더 많은 시간을 필요로 했다. 학생 S4는 10차시까지 이러한 오류를 나타냈으며, 11차시부터 이러한 오류를 극복하였다.

나. 도형 그림의 재해석에서의 어려움

Duval은 학생들이 기하 문제를 해결할 때, 변, 각, 꼭지점 등의 똑같은 요소를 두 번 이상 존재하는 것처럼 고려하는 데서 곤란을 겪는 현상을 '중복 장애'로 설명하였다(Fischbein, 1987에서 재인용). Duval의 중복 장애는, 학생들이 어떤 대상을 둘 이상의 개념을 통해서 동시에 바라보는데 곤란을 겪는다는 여러 연구 결과와(Menchinskaya, 1969; Schoenfeld, 1987) 일맥상통한다. 이 연구들은 학생들이 특히 기하 문제에서 문제를 설명하는 그림을 재해석하지 못하는 경향이 있으며, 그 결과 한 그림에서 둘 이상의 개념에 상응하는 요소를 파악하는 데에 어려움을 겪는다고 보고하였다.

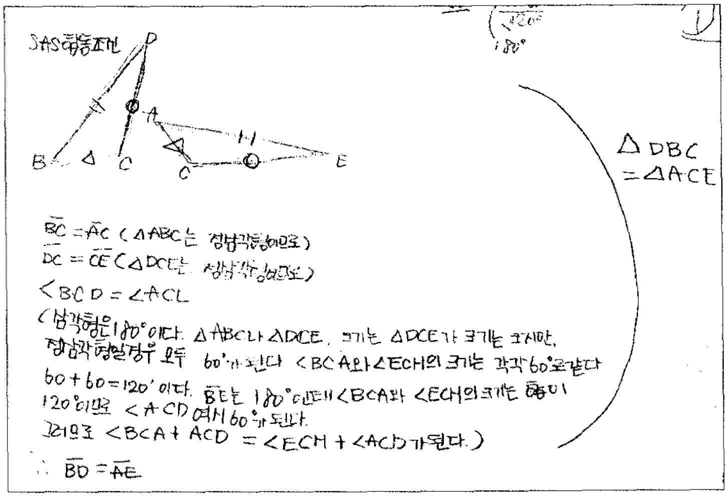
본 연구의 교수 실험에서도 학생들은 증명 과정에서 고려해야 할 기하학적 대상이 그림에서 겹쳐 있는 경우에 많은 어려움을 겪었다. 다른 기하 문제와 유사하게 증명 문제에서도 학생들이 그림의 영향을 많이 받는 것을 확인할 수 있었다.

예를 들어, [문제 2]에서 학생들은 커다란 어려움에 직면했다. [문제 2]에서 $\overline{BD} = \overline{AE}$임을 보이기 위해서는 △BCD와 △ACE가 합동임을 보여야 하는데, S2, S3, S4의 학생들은 삼각형들이 겹쳐 있어서 합동조건을 설명하기가 어렵다고 말하였다. 본 연구자는 학생들에게 도움을 주기 위하여, 학생들에게 그림을 따로따로 분리해서 보도록 하고, 원하는 삼각형들이 겹쳐 있을 경우에는 이 삼각형들을 따로 따로 그려서 생각하도록 지도하였다.

이와 같은 지도 방식은 효과적인 것으로 나타났다. 학생 S2와 S3은 증명 과정에서 필요한 삼각형들이 원래의 그림에서 겹쳐져 있는 경우에 삼각형들을 따로 떼어내어 별도로 그려 놓음으로써 증명 방법을 쉽게 찾을 수 있었다.

다음 [그림 V-5]은, 처음에는 그림 때문에 [문제 2]에 대해 어려움을 호소하던 학생 S2가 증명 과정에서 필요한 삼각형 △BCD와 △ACE를 원래의 문제에서 따로 떼어내어 그려 놓고 증명에 성공한 경우를 예시한 것이다.

한편, 학생 S4는 증명 문제에 제시된 그림의



[그림 V-5] 학생 S2의 그림 재해석의 성공

영향을 가장 강하게 받았다. S4는 증명 과정에서 필요한 삼각형들이 겹쳐져 있는 경우, 어떤 문제에서는 증명에 성공하였고, 또 다른 문제에서는 여전히 그림의 영향을 받아 증명에 성공하지 못하였다. 예를 들어, S4는 [문제 2]에서는 성공했지만, [문제 7]에서는 증명에 성공하지 못하였다([그림 Ⅴ-6] 참고).

[문제 7]에서 △PBC가 이등변삼각형임을 증명하기 위해서는 △ABC≡△DCB임을 보인 다음 ∠ACB=∠DBC이므로 △PBC가 이등변삼각형이라고 설명해야 한다. 학생 S4는 문제에 제시된 조건을 그림에 표시하고 △ABC와 △DCB가 합동이라는 것은 증명하였지만, 그 다음으로 진행하지 못하였다. 학생 S4에게 증명을 더 이상 진행하지 못한 이유를 질문하자, 학생 S4는 △PBC가 △ABC와 △DCB에 동시에 겹쳐 있어서 더 이상 어떻게 해야 할지 모르겠다고 대답하였다. 학생 S4는 교수 실험을 통해서 그림의 재해석과 관련된 어려움을 상당 부분은 극복했지만 완전히 극복하지는 못했다고 할 수 있다.

3. 증명 방법의 기호적 표현에서의 어려움

학생들은 교수 실험 초기에 분석법을 활용하여 찾은 증명 방법을 표현하는 데에 많은 어려움을 겪었다. 다음의 [장면 4]는 학생들이 분석법을 활용하여 증명 방법 찾기를 처음으로 학습한 5차시에 학생들과 연구자(교사)가 기호 사용에 대해 나눈 대화이다.

[장면 4] 기호 표현의 어려움

S1: 그런데, 선생님, 알파벳이 너무 많이 나와서 머리가 너무 아파요.

R: 무슨 말이지?

S1: 방정식이나 함수에서는 알파벳 문자가 하나 아니면 두 개 밖에 없었는데, 여기에서는 알파벳이 왜 이렇게 많이 나와요?

S3: 맞아, 거기서는 엑스(x)나 와이(y) 밖에 나오지 않았는데…

S2: 그런데, 선생님, 이렇게 우리끼리 있을 때는 (자신의 도형 그림을 가리키면서) 그림에 색연필로 표시해서 설명하는 것이 훨씬 간편하고 쉬울 것 같아요.

R: 그런데, 서연이 것처럼 그림에 색연필로 표시하면 언제 문제가 생길까?

S1: 글쎄요.

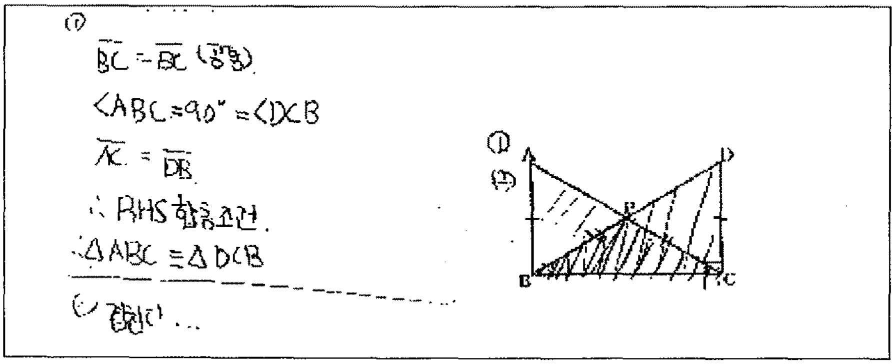
S3: 아, 알겠다. 만약에 서연이 노트를 복사해 버리면 색연필로 표시한 것이 나타나지 않아서 알 수가 없을 것 같아요.

R: 그렇구나. 그런 경우에는 알 수가 없겠구나.

S2: 그러면, 칼라 복사기로 복사해요.

S4: 그러면, 돈이 많이 들지.

R: 그림에 색연필로 표시해서 설명하는 것이 또 언제 문제가 될까?



[그림 Ⅴ-6] 학생 S4의 그림 재해석의 실패

Ss: 글쎄요. ……

R: 여기 있는 사람에게 설명할 때는 그림을 보여 주면서, 이 색깔 저 색깔을 가리키면서 설명할 수 있지만, 여기 없는 사람에게 설명할 때는 어떻게 되겠어?

S2: 음, 힘들 것 같아요, 설명하기가.

R: 그렇지. 여기 없는 사람에게 설명할 때는 그림에 색연필로 표시한 것 가지고는 설명하기가 힘들겠지. 그래서 기호로 설명하는 거야. 그림에 기호를 붙여서 표시하면 설명하는 것이 깔끔하거든. 그런데, 처음에는 기호로 표현하는 것이 어렵지?

Ss: 네.

R: 그러면, 처음에는 여러분이 찾은 증명 방법을 기호가 아닌 글로 써 보고, 그 다음에 그것을 다시 기호로 표현해보도록 하자. 이렇게 하면 조금은 쉬울 거야. 그리고 이렇게 하는 것이 익숙해지면 그 다음에는 글로 써 보는 과정을 생략하고 곧바로 기호로 표현하도록 하자.

위의 장면에서 학생 S1은 방정식이나 함수에서는 기호(알파벳 문자)가 1개 아니면 2개로 간단했는데, 증명에서는 기호가 너무 많아서 머리가 아프다고 어려움을 호소하고 있다. 학생 S2는 기호 대신에 도형 그림에 색연필로 표시해서 설명하는 것이 더욱 간편하고 쉬운 방법이라고 주장하고 있다. 실제로 학생 S2는 도형 그림에 서로 다른 색깔의 색연필로 여러 가지 표시를 하여 증명 방법을 효과적으로 표현하였다. 학생들은 한편으로는 증명 방법을 탐색해야 하고 다른 한편으로는 그것을 기호로 표현해야 하는 복합적 사고를 해야 하기 때문에 증명의 기호 표현에서 어려움을 겪는다고 할 수 있다.

다음의 [장면 5]는 교수 실험이 진행된 8차시에 기호 사용에 대해 학생 S1과 S2가 나눈 대화이다. 교수 실험 5차시에는 증명의 표현에서 너무 많은 기호가 나와서 머리가 아프다고 어려움을 호소했던 학생 S1은, 교수 실험이 진행되면서 기호 표현에 익숙해지고 증명을 기호로 표현하는 것의 용이함과 간결함에 대해 이야기하고 있다. 반면에 학생 S2는 증명 과정을 먼저 글로 표현해 본 다음에 기호로 나타내는 것을 선호하였다.

[장면 5] 기호 표현에 대한 학생들의 생각

S1: 이제 기호로 쓰는 것이 편해졌어.

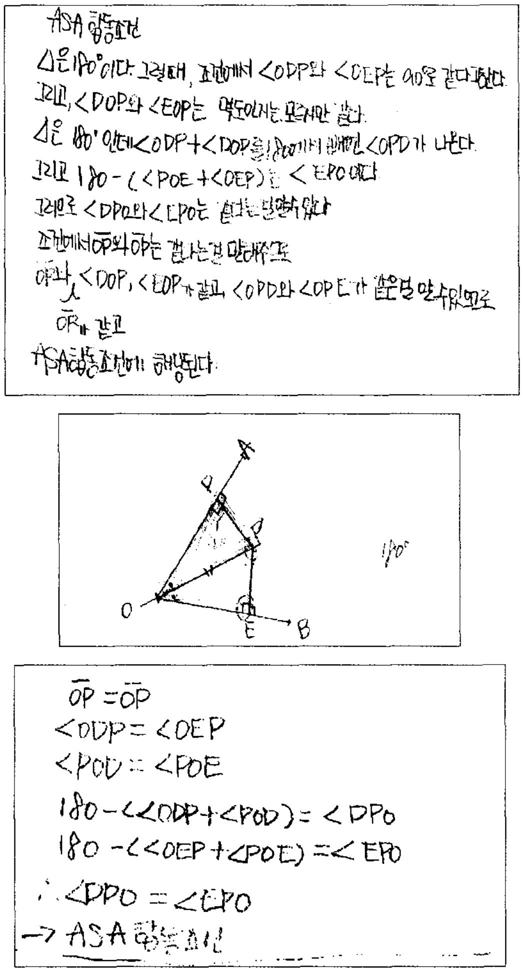
S2: 그래도 나는 말로 설명해 본 다음에 기호로 나타내 볼 거야.

S1: 기호로 쓰면 조금만 써도 되니까 팔이 덜 아파. 말로 설명하려면 많이 써야 하잖아.

S2: 그래도 나는 일단 말로 해 본 다음에 기호로 나타내는 것이 좋아. 말로 써 놓으면 다른 사람이 이해하기가 더 쉽잖아. 나는 먼저 말로 써 본 다음 기호로 쓰는 것이 좋아.

학생 S2가 증명 과정을 먼저 글로 쓴 다음에 기호로 나타내는 것은, 교수 실험에서의 교사(연구자)의 지도 방식에 기인한다. 교수 실험에서 교사(연구자)는 학생들의 기호 표현의 어려움을 완화시키기 위해서 점진적으로 기호를 사용하도록 지도하였다. 먼저 증명 방법을 글로 써 보도록 한 후에 그것을 다시 기호로 표현하도록 지도하였으며, 이는 점진적인 기호 표현을 추구한 것이다. 학생들이 증명 방법을 먼저 글로 쓴 후에 그것을 다시 기호로 표현하는 것에 익숙해진 후에는 글로 써 보는 것을 생략하고 곧바로 기호로 표현하도록 지도하였다([장면 4] 참고).

다음의 [그림 Ⅴ-7]는 학생 S2가 [문제 8]에 대한 증명 방법을 글로 쓴 후에 기호로 표현한 것을 예시한 것이다.



[그림 V-7] 학생 S2의 점진적 기호 표현: 글로 설명 → 기호 표현

본 연구에서의 점진적인 기호 표현 지도, 즉 증명 방법을 글로 써 본 다음에 기호로 표현하도록 지도한 것은 효과적인 것으로 나타났다. 학생 S2, S3, S4는 위의 [그림 V-7]와 같은 방식으로 기호 사용에 익숙해졌으며, 9차시 이후에는 증명 방법을 기호로 정확하게 표현하였다. 한편, 학생 S1은 다른 학생들에 비해 더 빠른 속도로 기호 사용에 익숙해졌으며, 7차시 이후에는 증명 방법을 정확하게 기호로 표현했다. 본 연구에서와 같이 점진적으로 기호로 표현하도록 지도하는 것은, 증명 방법을 찾는 동시에 그것을 기호로 표현해야 하는 이중의 인지적 부담을 느끼는 증명 학습 초기의 학생들에게 도움이 된다고 할 수 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구에서는 삼각형의 성질에 대해 4명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 실제로 분석법을 중심으로 증명을 지도하기 위한 교수 실험을 실시하였다. 본 연구에서는 증명 방법으로서의 분석법의 교수·학습 가능성을 확인하고, 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 증명으로 표현하는 과정에서 나타난 학생들의 어려움을 자세히 살펴보았다. 본 연구의 교수 실험을 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 본 연구에 참여한 학생 S1, S2, S3은 교수 실험을 통해 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 증명을 기호로 표현하는 데에 성공하였다. 학생 S4는 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 증명을 기호로 표현하는 데에 대부분 성공하였지만, 증명 문제에 제시된 그림의 재해석에서 약간의 어려움을 겪었다. 본 연구에 참여한 4명의 학생들의 수학 성적이 중 수준 이상임을 고려할 때, 적어도 중 수준 이상의 학생들은 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현하는 것이 가능함을 확인할 수 있었다.

둘째, 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 증명으로 표현하는 과정에서 나타난 학습상의 어려움은, 삼각형의 합동조건의 올바른 탐색, 증명 문제에 제시된 그림의 재해석, 증명 방법의 기호적 표현 등으로 나타났다. 먼저, 학생 S3과 S4는 교수 실험 초기에 분석법을 활용한 증명 방법 탐색에서 삼각형의 합동조건을 바르게 찾는 데에 어려움을 겪었다. 교

수 실험이 진행되면서 학생 S3과 S4는 이와 같은 어려움을 극복하였지만, 증명 학습 초기에 삼각형의 합동조건을 바르게 찾는 것이 학생들에게 큰 어려움임을 확인할 수 있었다.

다음으로, 학생 S2, S3, S4는 증명 학습 초기에 증명 과정에서 고려해야 할 기하학적 대상이 그림에서 겹쳐 있는 경우에 많은 어려움을 겪었다. 다른 기하 문제와 유사하게 증명 문제에서도 학생들이 그림의 영향을 많이 받는 것을 확인할 수 있었다. 본 연구의 교수 실험에서는 학생들에게 도움을 주기 위하여, 그림을 따로따로 분리해서 보도록 하고, 증명 방법에서 필요한 삼각형들이 겹쳐 있을 경우에는 이 삼각형들을 따로따로 그려서 생각하도록 지도하였다. 이와 같은 지도 방식으로 인해 학생 S2와 S3은 증명 문제에 제시된 그림의 재해석과 관련된 어려움을 완전히 극복하였다. 그러나 학생 S4는 그림의 재해석에서의 어려움을 상당 부분은 극복했지만 완전히 극복하지는 못했다고 할 수 있다.

마지막으로, 학생들(S1, S2, S3, S4)은 교수 실험 초기에 증명 방법을 기호로 표현하는 데에 많은 어려움을 겪었다. 본 연구의 교수 실험에서는 학생들이 기호 표현의 어려움을 극복하도록 하기 위해서, 증명 방법을 먼저 글로 쓴 후에 그것을 다시 기호로 표현하도록 지도하였다. 이와 같은 증명 방법의 '점진적 기호 표현', 즉 '일상 언어적 표현 이후에 이것을 다시 기호로 표현하기'는 학생들이 기호 표현의 어려움을 극복하는 데에 많은 도움이 되었다.

한편, 본 연구의 결론은 4명의 학생들을 대상으로 한 교수 실험으로부터 얻은 것이다. 30~40명의 학생들을 대상으로 하는 보통의 정규 수업에서 분석법을 중심으로 증명을 지도하는 상황에서는 본 연구에서 확인하지 못한 현상이 나타날 수도 있다. 따라서 학교 현장의 정규 수학 수업 시간에 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 증명으로 표현하는 과정에서 나타난 학생들의 어려움을 보고하는 추후 연구가 필요하다고 하겠다.

또한, 본 연구의 교수 실험에서는 삼각형의 성질, 이등변삼각형의 성질, 직각삼각형의 성질 등을 중점적으로 다루었으며, 따라서 삼각형의 합동조건과 직각삼각형의 합동조건 탐색이 매우 중요하였다. 본 연구의 교수 실험을 통해, 적어도 이러한 내용에 있어서는 학생들이 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현하는 것이 가능함을 확인할 수 있었다. 그러나 다른 기하 내용에 대해서도 학생들이 분석법을 의미 있게 학습할 수 있는지, 분석법을 활용하여 증명 방법을 찾고 그것을 기호로 표현할 수 있는지 등에 대해서는 추후 연구가 필요하다고 하겠다.

참고문헌

강문봉(1992). 분석법에 대한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 제2권** 제2호, 81-93.

강옥기 외 2인(2001). **수학 8-나.** (주)두산.

강행고 외 8인(2001). **수학 8-나.** 중앙교육진흥연구소.

교육인적자원부(2007). **제7차 수정·고시 수학과 교육과정.** 교육인적자원부.

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석.** 서울대학교 박사학위 논문.

남선주(2006). **역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 증명 학습에 대한 연구.** 한국교원대학교 석사학위 논문.

신정희(2005). **분석법을 활용한 8학년 학생의 증명 활동에 관한 사례연구.** 충북대학교 석사학위 논문.

양승갑 외 6인(2001). **수학 8-나.** 금성출판사.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울대학교 출판부.

이준열 외 4인(2001). **수학 8-나.** 도서출판 디딤돌.

조태근 외 4인(2001). **수학 8-나.** 금성출판사.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In Alan J. Bishop (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 175-192.

Fiscbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematic.* Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics, vol. II.* Dover Publications, Inc.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 4, 396-428.

Herbst, P. G. (2002). Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 3, 176-203.

Menchinskaya, N. A. (1969). The psychology of mastering concepts: Fundamental problems and methods of research. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics* (Vol. 1, pp. 93-148). Chicago, IL: University of Chicago.

NCTM (2007). *Principles and Standards for School Mathematics.* 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역(2007), **학교수학을 위한 원리와 규준.** 서울: 경문사.

Polya, G. (1957). *How to Solve It* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Robinson, R. (1936). Analysis in Greek Geometry, *Mind, 45,* 464-473.

Schoenfeld, A. H. (1986). On having and using geometric knowledge. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78,* 6, 448-456.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the Primary School.* London: Routledge.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook (pp. 17-31).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Teaching Geometry Proof with focus on the Analysis

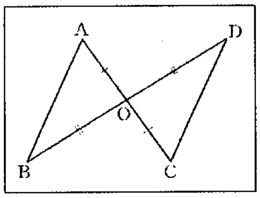
Na, Gwi Soo (Cheongju National University of Education)

In the study, I conducted the teaching experiment designed to instruct proof to four 7th grade students by utilizing the analysis method. As the results of this study I could identified that it is effective to teach and learn to find proof methods using the analysis. The results of the study showed that four 7th grade students succeeded in finding the proof methods by utilizing the analysis and representing the proof after 15 hours of the teaching experiment. In addition to the difficulties that students faced in learning proof utilizing the analysis were related to the search for the right conditions for triangles to be congruent, symbolic representation of the proof methods, reinterpretation of drawings given in the proof problems.

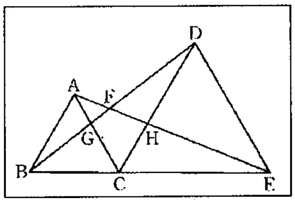
* **Key Words** : Geometry proof(기하증명), analysis(분석법), teaching experiment(교수 실험), middle school elementary mathematics(중등 수학)

논문접수: 2009. 3. 28
논문수정: 2009. 5. 18
심사완료: 2009. 5. 25

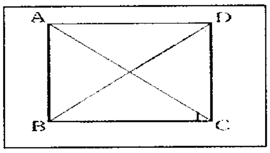
[부 록] 교수 실험에서 다룬 증명 문제



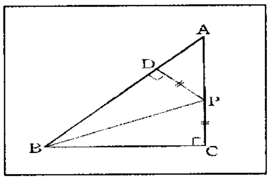
[문제 1]
오른쪽 그림의 두 삼각형 ABO와 CDO에서 $\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{DO}$ 이다.
이 때, $\overline{AB}=\overline{CD}$ 임을 증명하시오.



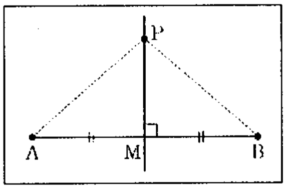
[문제 2]
오른쪽 그림에서 △ABC와 △DCE는 정삼각형이다.
$\overline{BD}=\overline{AE}$임을 증명하시오.



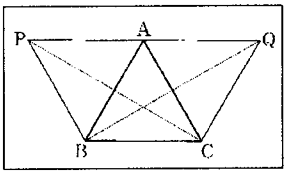
[문제 3]
오른쪽 그림과 같은 사각형 ABCD에서 $\overline{AC}=\overline{DB}$, ∠B=∠C=90°일 때,
$\overline{AB}=\overline{CD}$임을 증명하여라.



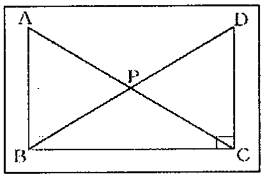
[문제 4]
오른쪽 그림과 같이 ∠C=90°인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{PD}\perp\overline{AB}$
이고 $\overline{PD}=\overline{PC}$이면, ∠PBD=∠PBC임을 증명하여라.



[문제 5]
오른쪽 그림에서 직선 PM은 선분 AB의 수직이등분선이다.
이 때, △PMA와 △PMB가 합동임을 증명하여라.



[문제 6]
오른쪽 그림은 정삼각형 ABC의 두 변 AB와 AC를 각각 한 변으로
하는 새로운 정삼각형 ABP와 ACQ를 그린 것이다.
이 때, $\overline{CP}=\overline{BQ}$임을 증명하여라.



[문제 7]
오른쪽 그림과 같은 두 직각삼각형에서
선분 AC와 BD의 교점을 P라 한다.
이 때, $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AC}=\overline{DB}$이면 △PBC는 이등변삼각형임을 증명하여라.

[문제 8]
∠AOB의 이등분선 위의 한 점 P에서 반직선 OA, OB에 내린 수선의 발을 각각 D, E라고 한다.
△DPO와 △EPO가 합동임을 증명하여라.