대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 2, 257-271. May 2009

확률의 독립성의 개념 확장과 이중적 관점에 대한 고찰[1)]

조 차 미[*]

확률의 독립성은 직관적으로 판단이 가능한 경우와 그렇지 못한 경우로 나뉜다. 독립성은 가정을 근거로 하여 형성된 개념이나 곱셈정리로 정의되어 개념의 확장을 불러왔다. 이러한 확장의 원인을 동시발생 사건과 양립하는 사건에 모두 허용되는 교집합 기호에 원인을 두고 이에 관한 분석이 필요하다. 본 논문은 독립성의 개념 확장 과정을 구체적으로 보여주고 동일한 기호 $P(A \cap B)$를 사용하는 '동시발생사건'과 '양립하는 사건'의 독립성의 이중적 관점을 Pierce의 삼분법적 기호학을 사용하여 구조화하였다.

Ⅰ. 들어가며

독립성은 확률론의 주요한 개념 중 하나이다. 독립성은 애매하고 거의 이해되지 않는 논제에 의해 밝혀진 사소한 정의를 통해 이론이 되었다. 그래서 그 원시적인 직관의 바탕은 명확하지 않다. 반면에 독립성의 개념은 확률에서 이차적인 직관을 확립하는 중심적인 정리에 대한 중요한 가정이다. 수학과 직관 사이의 상호작용의 인식으로부터 독립성의 정의는 사소한 문제가 아닌 결정적인 논점이 되었다 (Borovcnik & Bentz, 1991). 독립성은 한 가지 의심스러운 관계를 반영한다. 실제 관련된 것은 독립성의 정의와 정의가 특별한 상황에 적용될 수 있는 신념(경험과 실험에 의해 표출되는, 확실한)이다. 그래서 독립은 애매하면서도 직관적인 개념이다. 독립성은 한정된 의미이기도 하나 확률의 곱셈정리가 적용될 수 있는 잘 정의된 개념이기도 하다. 독립성은 오랜 기간 동안 확률론 이면에서 주된 동기와 강력한 힘을 제공해 온 애매모호하면서도 직관적인 개념이다(Kac, 1964). 많은 연구자들은 확률의 독립성(stochastic independence)[2)]을 가르치기 어려운 개념으로 꼽고 있으며 자명한 가정으로부터 출발하였으나 애매한 개념이 되었음을 인정한다. 학교 현장에서 독립성을 가르쳐 본 교사라면 학생들이 '두 주사위를 던져 첫 번째 주사위가 2의 배수의 눈이 나오는 사건과 두 번째 주사위가 3의 배수의 눈이 나오는 사건'의 독립성은 쉽게 받아들이지만 '주사위를 한 번던질 때, 2의 배수의 눈이 나오는 사건과 3의 배수의 눈

* 전남대학교 강사, 용두중학교. chami622@naver.com

1) 이 논문은 2009년 조차미의 박사학위논문의 일부를 요약 재구성한 것임

2) "추계적(stochastic)"이란 용어는 확률론의 창시자들 중 Jacob Bernoulli(1654-1705)에 의해 고안된 듯하다. 한동안 쓰이지 않다가 W. Borktiewicz(1868-1931)의 저서 Die Iterationen(Berlin: Springer, 1917)에서 다시 쓰이게 되었다. 그 이후로 동의어인 "확률적(probabilistic)"으로 일반적으로 쓰인다(Neyman, 1950). 본 논문에서 'stochastic'과 'probabilistic'은 모두 '확률적'으로 번역하였다. '확률적(의) 독립성'은 축약하여 '독립성' 또는 '독립'으로도 표현한다.

이 나오는 사건'의 문제에서는 곱셈정리[3]의 만족여부에 의존하여 독립성을 판단하는 것에 거부감을 느끼거나, "어떻게 서로 영향이 없는가?"에 대한 의문에 집착하는 것을 본 경험이 있을 것이다. 이러한 원인을 분석하기 위해 조차미, 박종률(2008)은 "독립성에서 직관과 형식의 상반된 접근방법을 요구하는 직관적 개념과 형식적 정의의 갈등은 무엇인가?"라는 문제의식에서 출발하여 독립성 문제를 두 가지 유형으로 구분하고 직관적으로 판단이 가능한 독립성과 곱셈정리로 판단하는 독립성의 수학적 구조를 분석하여 전체적인 아이디어의 통합에 대해 모색하였다. 그 결과 Kolmogorov가 적공간을 표본공간으로 정의함으로서 독립성의 개념이 확장되었다는 von Mises의 주장[4]에 대한 이해가 가능하였다. 이러한 확장된 독립성의 지도를 위해 조차미(2008)는 시행의 독립과 사건의 독립의 포괄적 구분과 이를 지도할 때 1차 직관과 2차 직관의 적절한 사용을 제안하였다. 그러나 두 연구에서는 개념 확장의 구체적인 원인 분석과 학생들의 인식에 대한 조사는 실시하지 않았다. 이에 본 논문에서는 앞선 연구를 바탕으로 독립성의 확장 과정을 구체적으로 제시하고 확장된 독립성의 구조를 만들어 내는 교집합 기호의 이중적 사용과 실제 현장에서의 반응을 조사하였다. 또한 Pierce의 삼분법적 기호학을 사용하여 확장된 독립성 개념의 이중적 관점을 구조화하였다.

II. 독립성의 개념 확장

1. Kolmogorov와 von Mises가 제시한 독립성 정의의 차이

표본공간의 개념은 점차 발달하여 확률에서 만족스러운 공리계를 세운 기초로서 모든 가능한 결과의 집합으로 받아들인 Kolmogorov에 의해 구조화되었다(Batanero, Henry & Parzysz, 2005:27). 즉, 이러한 Kolmogorov의 공리적 이론은 표본공간의 개념에 대한 획기적인 시도로부터 시작된 것이다. Kolmogorov는 Hausdorff (1927:78)[5]의 기호를 도입하여 그의 이론을 전개하였다. A와 B의 곱을 AB로, $AB=0$(null set)인 경우에 A와 B의 합을 $A+B$로, A와 B의 차를 $A-B$로, A의 여사건인 $E-A$을 $\overline{A}$로 표기하였다. 여기서 집합 기호[6] 연산의 기초적인 법칙에 대해 익숙할 것이라는 가정 하에 Kolmogorov는 그의 저서를 전개하고 있다.

정의 1. 임의의 $q_1, q_2, \ldots, q_n$에 대하여
$P(A_{q_1}^{(1)}A_{q_2}^{(2)}\ldots A_{q_n}^{(n)})=P(A_{q_1}^{(1)})P(A_{q_2}^{(2)})\ldots P(A_{q_n}^{(n)})$
n개의 시행 $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}$은 상호

3) 교육과정에서 곱셈정리는 두 가지이다.
곱셈정리1) $P(A)>0$, $P(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은
$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$
곱셈정리2) 두 사건 A, B가 독립이기 위한 필요충분조건은 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
본 논문에서의 곱셈정리는 독립인 사건의 곱셈정리2)를 말한다.

4) von Mises(1928/1952)는 Kolmogorov에 의한 공리적 확률의 기초에 의해 확률의 독립성이 곱셈정리로 정의되면서 정의(definition)와 개념(concept)의 도치가 일어났으며, 이러한 새로운 정의는 직관적인 판단을 배제시키는 개념의 확장을 불러왔다는 비판을 제기하였다(Batanero, Henry, et al., 2005).

5) Cf. Hausdorff, Mengenlehre, 1927,

6) Parzen. E의 저서 Modern Probability theory and its applications(1960)에서는 합집합을 $A+B$ 대신 $A\cup B$으로 표기하고 있으나 곱집합은 AB로 사용한다. 그는 다른 많은 저자들이 AB을 대신하여 $A\cap B$을 사용하기도 한다는 것을 소개하고 있다. 곱집합의 두 가지 기호사용은 기호에 대한 이중적 관점을 반영하는 것일 수도 있다.

독립이다.

정의 2. 만약 분해(decomposition) $E = A_k + \overline{A_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ 이 독립이면 n개의 사건 $A_1, A_2, \ldots, A_n$은 상호 독립이다.

Kolmogorov(1956:11)는 (정의 1)에서 '시행의 독립'을 (정의 2)에서는 '사건의 독립'을 각각 따로 정의하고 있다. 현재 사용하는 독립성의 개념은 모든 가능한 결과의 집합을 표본공간의 개념으로 한 Kolmogorov의 정의를 바탕으로 한다.

이와 같이 수학적 모델을 공리적으로 구성하고 있는 것이 Kolmogorov의 입장이라면 경험적 모델을 확률 상황에 적용시켜 직관적인 독립에 대해 구성한 것이 von Mises의 입장[7]이다. von Mises(1952:52)는 독립일 때의 곱셈정리에 관해 다음과 같이 설명하고 있다.

두 주사위를 n번 던져 첫 번째 주사위의 눈이 3이 나오는 경우의 수를 n_3, 그 n_3 개의 경우의 수 중에 두 번째 눈이 5가 나오는 경우의 수를 n_5'라 하면 주사위의 눈이 (3, 5)인 경우의 수는 n_5'이다. 이 상대적 비는 $\frac{n_5'}{n}$이고 이 비의 극한이 곧 찾고자 한 확률이다. 이해하기 쉬운 수학적 표현은

$$\frac{n'_5}{n} = \frac{n'_5}{n_3} \times \frac{n_3}{n}$$

즉, 상대적 빈도 $\frac{n'_5}{n}$는 $\frac{n'_5}{n_3}$와 $\frac{n_3}{n}$의 곱이다. $\frac{n_3}{n}$의 극한값은 첫 번째 눈이 3이 나올 확률이다. 이것을 p_3라 하자. 두 주사위의 독립성의 가정에 따르면 비 $\frac{n'_5}{n_3}$는 두 번째 주사위를 던질 때 5가 나오는 경우의 수의 상대적 빈도에 대한 극한값이다. 즉, 두 번째 주사위에서 5가 나올 확률이다. 두 번째 주사위에 해당하는 확률은 q로 기호화 하자. 즉 5가 나올 확률은 q_5이다. 곱의 극한이 두 극한의 곱과 같으므로 $\frac{n'_5}{n}$의 극한은 $p_3 \times q_5$이다. 즉, 첫 번째 눈에서 3이 두 번째 눈에서 5가 동시에 던져질 확률은 두 분리된 사건(two separate events)의 곱이다. 두 주사위를 던져 발생하는 확률을 P 라고 하면 식은 다음과 같다.

$$P_{3,5} = p_3 \times q_5$$

von Mises의 정의를 들여다보면 공리적 확률의 체계를 완성한 Kolmogorov의 독립에 의해 구축된 현 교육과정에서의 독립성과 다른 점을 발견할 수 있다. von Mises는 분리된 사건에서의 확률 측도가 모두 다르다는 것을 확률 측도로 쓰인 P, p, q를 모두 다르게 구분함으로서 드러내고 있다. Kolmogorov가 체계화한 공리적 확률의 구조에서는 두 시행의 적공간의 부분집합으로서 두 사건을 재구성하여 하나의 측도로 모두 표현 하였다면 von Mises 두 분리된 시행 안에서의 두 분리된 사건을 모두 다른 측도로 표현하고 있다. 이 때, 두 분리된 시행의 두 분리된 사건(two separate events)은 교집합으로 연결 될 수 없다. von Mises의 입장에서는 수형도[8]로 시각화되는 동시발생사건의 경우에만 독립성을 논할 수 있다.

2. 시행과 사건

위에서 제시한 von Mises의 독립성의 정의는

7) 수학기초론에 대한 논쟁은 확률에서 공리적 접근을 유도하였으며 19세기 말부터 확률은 공리화의 길에 접어들었다. 이 분야의 한 개척자로서 von Mises는 상대도수와 상대도수의 극한으로서 확률을 해석하려 했다. 그러나 von Mises의 공리적 접근은 철학적으로 모호한 개념인 '수열의 무작위성'에 기초를 두고 있어 성공적이지 못했다.

8) 곱의 법칙은 수형도를 이용하면 쉽게 지도 할 수 있다(조태근, 2002). 수형도는 한 사건이 어떤 결과가 나오든지 다음 사건의 가능성이 동일함을 같은 모양의 가지치기를 통해 직관적으로 시각화할 수 있다.

복합시행에서만 가능한 것 같다. 그러나 Kolmogorov에 의한 독립성의 정의가 단순히 복합시행에서의 독립성을 단일 시행까지 확장시킨 것으로 보기에는 적절치 않은 것 같다. 단일사건, 단일시행, 복합사건, 복합시행 등의 용어는 학자들마다 정의가 다르다. Hogg & Tanis(1997)에 따르면 복합사건은 $A\cup B$, $A\cap B$, A^c과 같은 사건들을 이르는 말이다. 그러나 복합사건을 주사위와 동전을 동시에 던지는 2차원 시행으로 보기도 한다. 이것은 복합사건 또는 복합시행을 뜻한다. 이와는 반대로 단 하나의 동전을 던지는 사건은 단일사건 또는 단일시행[9]으로 이것은 1차원 시행을 의미한다(Polaki, 2005:191). Uspensky(1937)는 두 사건이 동시에 발생하는 $A\cap B$(두 사건 이상도 가능)만을 복합사건이라고 정의하고 있다. 본 논문에서는 단일시행은 주사위를 한 번 굴리는 것이나 한 장의 카드를 뽑는 것이나 두 가지 특성(고혈압/과체중, 남자/안경, 여자/선생님)을 가진 사람의 선택 등을 뜻한다. 복합시행은 두 주사위를 동시에(잇달아) 굴리는 것이나 복원추출, 비복원추출을 포함하는 것으로 한다. 단일시행과 복합시행은 교육과정에서 사용되고 있는 용어도 아니며 독립성 판단의 적용방법을 명확히 구분시키는 요소도 아니다. 이 구분보다 독립성의 이중적인 적용을 좀 더 확실하게 구분할 수 있는 것이 '양립하는 사건'과 '동시발생 사건'이다.

'단일시행'과 '복합시행'은 표본공간의 구성형태를 결정짓는 시행을 구분한 것이라면 '양립하는 사건'과 '동시발생 사건'은 이러한 시행 안에서 발생하는 사건을 구분한다. 언뜻 보면 '단일시행'이 '양립하는 사건'의 배경이 되고 '복합시행'이 '동시발생 사건'의 배경이 되는 듯 보일 수 있으나 그렇지 않다. 이러한 두 가지 구분방법을 구체화하기 위해 독립성에 관한 문제를 4가지 유형으로 구분하였다(<표 Ⅱ-1>).

유형②는 두 주사위를 던지는 시행자체의 독립성의 직관적인 판단에 의해 두 사건의 독립성을 알 수 있으며 유형③도 비복원추출이라는 상황의 특수성에 의해 종속에 대한 판단이 가능하다. 이와는 반대로 유형①과 유형④의 독립성은 곱셈정리로 확인해야 한다. 큰 차이는 유형②와 유형③에서의 독립성은 '가정'을 바탕으로 한 결과이지만 유형 ①과 ④는 가정이 아닌 '계산'에 의한 결과일 뿐이다.

<표 Ⅱ-1> 독립성에 관한 문제의 4가지 유형

	유형①	유형②	유형③	유형④
문제	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B	두 주사위를 동시에 던져 첫 번째 눈이 소수가 나올 사건이 A, 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나올 사건이 B	빨간 공이 2개, 파란 공이 3개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원추출한다. 갑이 빨간 공을 꺼낼 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낼 사건이 B	두 주사위를 동시에 던져 눈의 합이 7이 나올 사건이 A, 첫 번째 눈이 1이 나올 사건이 B
시행	단일시행	독립인 복합시행	종속인 복합시행	독립인 복합시행
사건	양립하는 사건	동시발생 사건	동시발생 사건	양립하는 사건

9) Batanero & Sanchez(2005)의 문헌에서도 이러한 표현을 사용한다.

3. '동시발생 사건'과 '양립하는 사건'

표본 공간의 개념은 확률계산을 위한 만족스런 공리계를 세우기 위한 기초로서 모든 가능한 경우의 집합으로서 명확하게 Kolmogorov에 의해 발전하고 형식화되었다. 그는 집합으로서의 사건을 다음과 같이 정의했다(Kolmogorov, 1956:5).

$AB=0$와 $AB...N=X$에서 집합을 연결하는 구조가 같으나 원문의 내용은 'incompatible (양립할 수 없는)'와 'simultaneous occurrence(동시 발생)'으로 구분된다. 현재 우리의 교육과정에서는 '양립할 수 없는(incompatible) 사건' 즉, '배반사건'에 대해 이 용어를 쓰기 전에 '동시에 일어나지 않을 때'라는 표현을 사용하고 있으며, '동시발생(simultaneous occurrence) 사건'은 '두 사건 A, B가 동시에 일어날 때'로 쓰고 있다. [8-나]의 교육과정에서 두 '동시에~'는 매우 다른 것이라는 언어적인 차이에 대해 강조하고 있다. 이러한 언어적 차이를 쉽게 구분하고자 '동시발생 사건'의 '동시에'를 '잇달아'로 바꾸어 표현하기도 한다.

> 한 개의 주사위를 두 번 던졌을 때(중략)..., 서로 구별되는 두 개의 주사위를 던졌을 때(중략).... 앞의 경우에서는 두 사건이 시간적으로 잇달아 일어나지만, 뒤의 경우에서는 두 사건이 동시에 일어난다. 따라서 통상적으로 쓰이는 '잇달아'라는 말은 시간적으로 잇달아 일어나는가와 상관이 없음을 알 수 있다.
>
> (최봉대 외, 2002)

일상 언어는 수학의 이해를 제한시킬 수 있다(Pirie, 1998). 이것은 일상 언어를 파악하는 개인의 내부적인 의식 속에서 형성된 이미지가 실제 수학적 용어로 사용된 의미와 다르다거나 부분적 또는 포괄적인 형태로 불완전할 때 수학적 이해를 방해할 수 있다는 뜻이다. Freudenthal (1978)은 학생들에게 친숙한 모국어의 일상 언어만으로 모든 수학을 가르치는 데는 무리가 있다고 하였다(김선희, 이종희, 2003, 재인용). 이러한 관점은 언어가 사람이 세상을 지각하고 생각하는 방식에 영향을 미친다는 언어상대성 가설(linguistic relativity hypothesis, LRH)에 대해 문제제기를 일으킨 Boroditsky(2001)의 입장과 비슷하다. 그는 영어에서 'same'이라는 단어가 의미하는 특정 개념이 있는데 이를 다른 언어로 번역하였을 때 동일한 개념이 재현될 수 있는가라는 물음을 하였다. 그는 'same'이 아마 한 언어에서는 '동일한(identical)'을 의미하고, 다른 언어에서는 '거의 유사한(the most similar)'을 의미하는 번역이 될 수도 있다고 하였다. 그는 모국어는 '습관적 사고를 형성하는 데' 중요하다는 결론을 도출하였다(Lund, 2007). 이러한 맥락에서 'compatible(양립하는)'과 'simultaneous occurrence(동시 발생)'를 모두 '동시에 발생하는'으로 번역하는 것은 또 다른 문제를 발생시킬 수 있는 모국어의 특성이다. 이 부분에서 결론적으로 같은 기호로 귀착하는 두 가지 상황에 대한 예견적인 암시를 위함이었다고 할지 모르나 그렇지 않다. 중학교 수학[8-나]의 교과서나 교사용지도서에는 이 둘을 명백히 구

<표 Ⅱ-2> Kolmogorov의 집합과 사건

Theory of Sets	Random Events
1. A and B do not intersect. i.e., $AB=0$.	1. Events A and B are incompatible.
3. $AB...N=X$.	3. Event X is defined as the simultaneous occurrence of events A, B, ..., N.

분하라는 설명이 제시되어 있으며 이를 구분하고자 '동시발생 사건'을 '잇달아 발생하는~'으로 표현하기도 한다. 언어적인 구분을 통해 학생들로 하여금 양립하는 사건과 동시발생 사건을 충분히 구분시켜 지도하나 결국 확률에서 같은 기호를 사용함에 있어서 교집합 기호에 대한 이중적 관점은 그대로 살아있는 것이다.

4. 독립성의 개념 확장

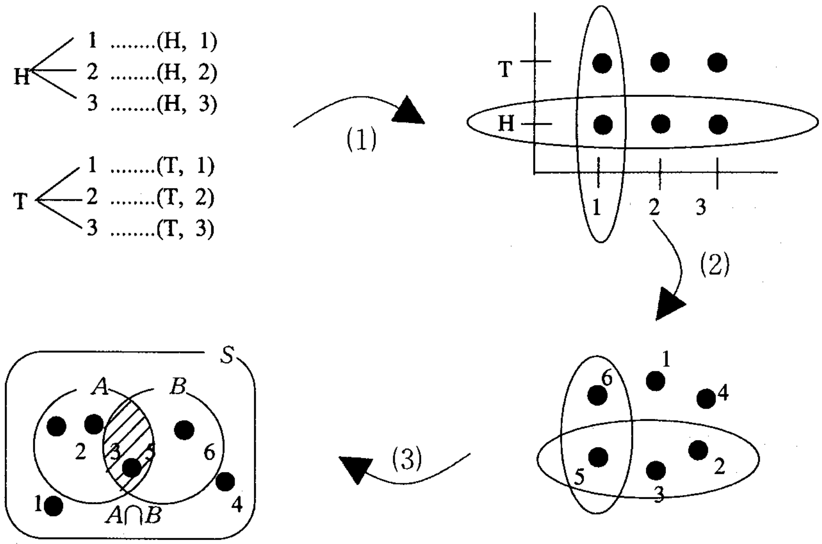
이쯤해서 위의 결과들을 통해 독립성의 개념 확장과정과 그에 따른 사건의 변화에 대해 구체적으로 소개할 필요가 있다. '동시발생 사건'에서 직관에 기초한 독립성의 판단이 '양립하는 사건'의 독립성으로 확장, 전이된 것으로 추측한다면 독립성 확장의 근본적인 원인은 교집합의 이중적 사용이 허락된 '확률'이라는 측도에 있다고 할 수 있다. 독립성의 직관적 개념이 적용되는 '동시에 발생하는' 곱사건에 교집합 기호의 사용이 허용되면서 직관적으로 받아들여지지 않는 '양립하는' 두 사건에 독립성의 형식이 적용되면서 아래의 예와 같은 확장된 독립성의 구조를 만들어내는 과정이 생성된다.

- -동시발생 사건 : 동전을 던져 앞면이 나오는 사건과 1, 2, 3이 적힌 카드에서 1이 적힌 카드를 뽑는 사건
- -양립하는 사건 : 한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나오는 사건과 5이상의 눈이 나오는 사건

수형도로 표현되는 동시발생 사건의 독립성이 다음과 같은 동일한 측도의 적용에 의해 독립성의 의미가 확장될 수 있음을 보여준다. 동시발생 사건의 독립성은 가정에 의한 결과이며 직관적인 판단에 의해 가능하나 양립하는 사건의 독립성은 그렇지 못하다.

(1) 독립적인 '동시발생 사건'이 Kolmogorov에 의해 적공간을 표본공간으로 하는 '양립하는 사건'으로 변화

(2) 곱셈정리를 통해 동일한 구조를 갖는 '양

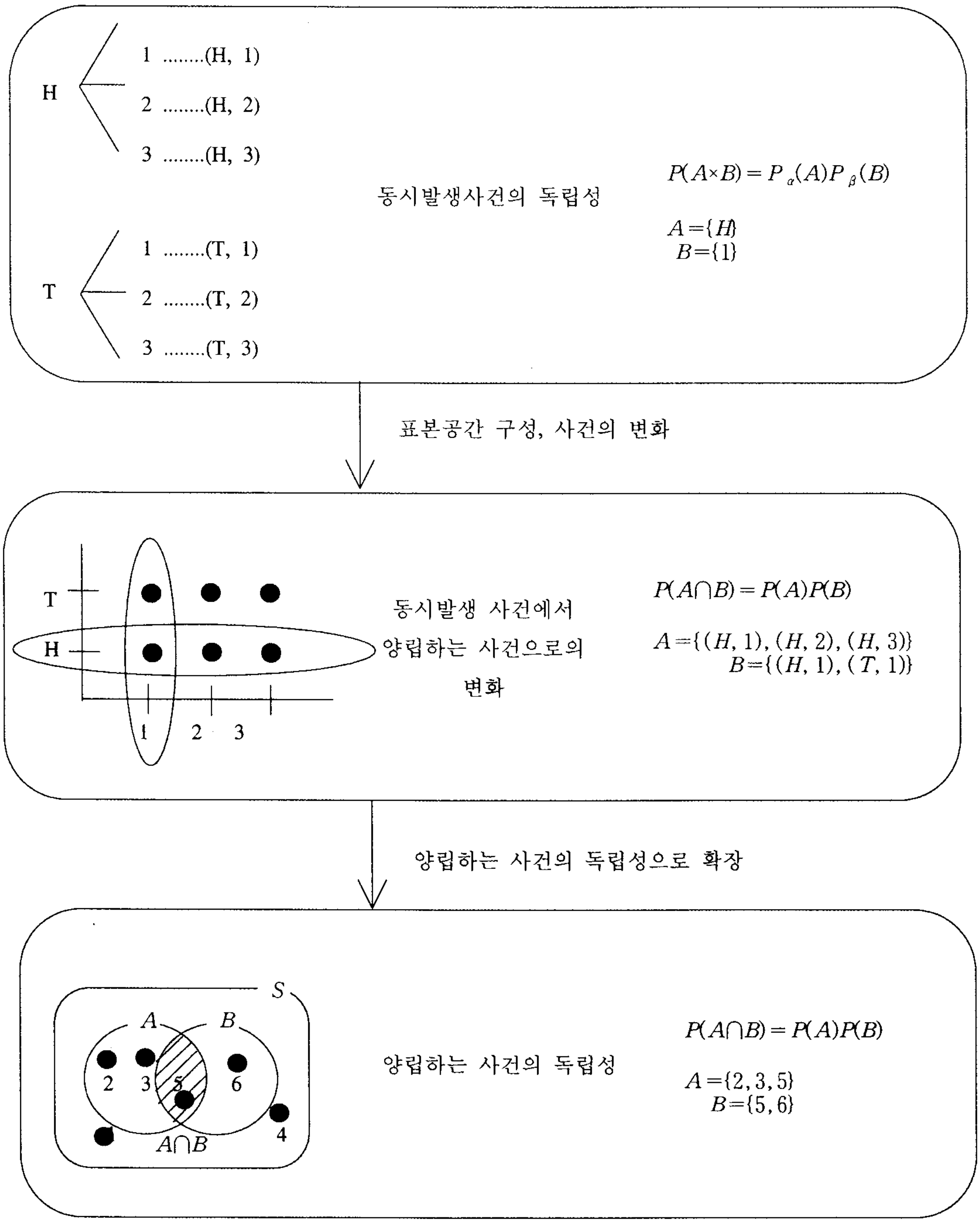


[그림 II-1] 독립성의 개념 확장 구조

립하는 사건'으로 전이

(3) '양립하는 사건'의 독립성으로 확장

확장에 따른 단계별 사건의 변화는 다음 그림과 같다.



[그림 II-2] 확장된 독립성에서 사건의 변화

III. 독립성의 이중적 관점

1. 교집합 기호에 대한 이중적 관점

독립성의 이중적 관점은 그 대상이 되는 '동시발생 사건'과 '양립하는 사건'에서의 두 가지 관점을 의미한다. 이것은 확률에서 교집합 기호로 연결되는 두 사건에 대한 두 가지 관점으로부터 비롯된다. 이것은 교집합 기호 하나로 연결된 두 사건을 두고서 '양립하는 사건'과 '동시(순차)발생 사건'이라는 이중적 관점을 형성시킨다. 교집합 기호(∩)에 대한 이중적 관점이란 '동시에~'와 동일시하는 확률세계에서의 또 다른 언어로서 자리 잡고 있는 교집합 기호(∩)를 바라보는 두 가지 시각을 말한다. 하나는 '동시발생 사건'을 연결하는 교집합 기호(∩)로 '곱사건'의 용어가 매우 적절하다. 다른 하나는 '양립하는 사건', 즉, '공통부분이 있는 사건'을 연결하는 교집합 기호(∩)로 '교사건'의 용어가 어울릴 것 같으나 아쉽게도 확률에서 '교사건'이란 용어는 허락되지 않는다.

( )안에 사건의 명칭은 무엇입니까?	
$S=\{1,2,3,4,5,6\}$	전사건
$A=\{2,3,5\}$	
$B=\{5,6\}$	
$A\cup B=\{2,3,5,6\}$	합사건
$A\cap B=\{5\}$	( )
$A^c=\{1,4,6\}$	여사건
①교사건	②곱사건

광주 지역에 있는 인문계 고등학교 3학년 학생 115명을 대상으로 '양립하는 두 사건'의 확률 용어를 물어본 결과 94명(82%)의 학생들이 '교사건', 21명(18%)의 학생들이 '곱사건'이라 응답하였다. 만약 '동시발생 사건'의 예를 통해 물었다면 '곱사건'이라 응답한 결과가 많았을 것이다.

대상의 각 성질을 가지는 표본공간에서 원소들을 가진 부분집합 A, B를 정의한다. 통상적인 논리적 용어를 집합의 용어로 바꾸는 규칙은 다음과 같다.

<표 III-1> 논리, 집합, 확률 용어 비교

논리 용어	집합 용어	확률 용어
A 나 B	$A\cup B$	합사건
A 이고 B	$A\cap B$	곱사건

집합의 연산은 확률론의 발전에 큰 영향을 끼쳤다. 집합의 논리는 정형적인 확률적 시스템으로 다음과 같이 바뀐다.

<표 III-2> 집합과 확률에서의 용어의 차이

집합	확률
전체집합	표본공간
부분집합	사건
단일집합	근원사건
공집합	공사건
합집합	합사건
교집합	곱사건
여집합	여사건
서로소	배반사건

(김원경 외, 2003)

집합에서의 $A\cap B$의 표현은 두 집합의 교집합을 의미한다. 집합에서 교집합의 의미는 '집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 모든 원소들로 이루어진 집합'을 의미한다. 확률에서 논리적 체계를 구축하기 위한 수단으로서 도입한 집합의 개념은 사건 'A이고 B인 곱사건 $A\cap B$' 을 '동시에' 라는 단어를 통해 두 사건

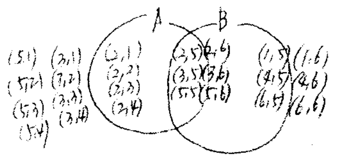
을 연결하고 있다. 이 교집합 기호로 표현되는 사건의 첫 번째 관점은 '공통의' 사건, 즉, '양립하는 사건'이다. 이러한 '양립하는 사건'에 대한 교집합 기호의 사용은 '경우의 수'나 '확률'에서 모두 사용될 수 있다.

<양립하는 사건>
한 주사위를 던져 2의 배수가 나올 사건을 A, 3의 배수가 나올 사건을 B라고 할 때, 사건 A, B가 동시에 일어날 **경우의 수**와 동시에 일어날 **확률**은 모두 교집합으로 표현된다.
두 사건이 동시에 일어날 경우의 수 $\Rightarrow n(A\cap B)$
두 사건이 동시에 일어날 확률 $\Rightarrow P(A\cap B)$

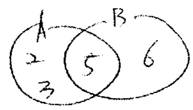
이 교집합 기호로 표현되는 사건의 두 번째 관점은 '동시발생 사건'이다. 여기에는 잇달아 발생하는 사건도 포함된다. 여기에서는 교집합 기호가 '경우의 수'나 '확률'에서 모두 사용될 수 없다. 동시발생 사건의 경우의 수에서는 두 사건이 분리된 시행에서 발생한 분리된 사건으로 $n(A\times B)$으로 표현하며 이러한 관점은 확률에까지 영향을 미치게 된다.

<동시발생 사건>
두 주사위를 동시에 던져 첫 번째 주사위가 2의 배수가 나올 사건을 A, 두 번째 주사위가 3의 배수가 나올 사건을 B라고 할 때, 사건 A, B가 동시에 일어날 **경우의 수**와 동시에 일어날 **확률**의 표현은 서로 다르다.
두 사건이 동시에 일어날 경우의 수 $\Rightarrow n(A\times B)$
두 사건이 동시에 일어날 확률 $\Rightarrow P(A\cap B)$

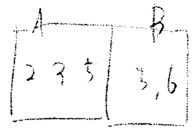
인문계 고등학교 3학년 학생 115명에게 조사한 결과 "한 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B일 때, 두 사건을 벤다이어그램으로 표현하여라."의 응답에 95/(83%)명이 성공한 반면, "두 주사위를 동시에 던져 첫 번째 눈이 소수가 나올 사건이 A, 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나올 사건이 B일 때, 동시에 발생하는 두 사건 A와 B를 벤다이어그램으로 표현하여라."의 응답에는 [그림 Ⅲ-1]과 같이 적공간을 표본공간으로 하여 사건을 구성한 학생이 3명(3%) [그림 Ⅲ-2]와 같이 그린 학생이 5명(4%), [그림 Ⅲ-3]와 같이 배반 사건으로 그린 학생이 34명(30%), 그리지 못한 학생이 73명(63%)이었다. 이는 동시발생사건을 경우의 수에서 다루던 습관에 의해 각각의 분리된 시행 안에서 일어나는 사건으로 보고 있음을 의미한다. 또한 학생들이 동시발생 사건을 연결하는 교집합 기호를 무의식적으로 다루고 있음을 나타낸다. 확률인지 경우의 수인지를 제시하지 않았음에도 불구하고 각각 분리된 사건으로 인식하여 배반사건으로 나타내는 학생들이 있었다.



[그림 Ⅲ-1]



[그림 Ⅲ-2]



[그림 Ⅲ-3]

2. 수학적 개념과 직관적 관념

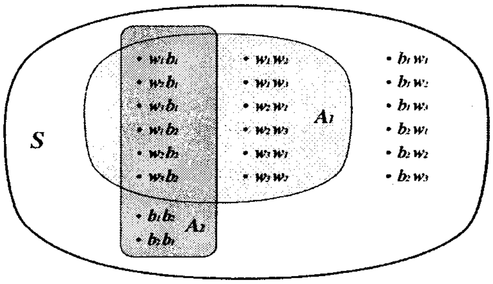
Harten & Steinbring(1983)은 독립성의 수학적 개념(mathematical concepts)을 적용하기 위해서는 직관적 관념(intuitive notion)을 가지고 있어야 하며 직관적 관념이 부적절할 수 도 있는 문제에서 수학적 개념은 독립성의 파악을 위해 도구적으로 사용될 수 있다고 하였다. 여기에서 '직관적 관념'은 '서로 영향이 없다'는 것이

직관적으로 받아들여지는 것을 말하며, 도구적인 역할을 강조하고 있는 '수학적 개념'은 '곱셈정리'를 말한다고 할 수 있다[10]. 이런 맥락에서 교사용지도서(최봉대 외, 2002)의 지도상의 유의점에는 '사건의 독립성을 직관적으로 알 수 없는 경우에는 곱셈정리를 활용하게 한다.' 라고 명시되어 있다.

Harten & Steinbring(1983)에 따르면, 확률은 직접적인 추론과 관련이 있었기 때문에 독립성에서의 이러한 차이점은 18세기 이전에는 존재하지 않았으며, 이러한 문제로 인해 독립성에서 실제 상황에 더 적합하거나 덜 적합할 수 있는 모델을 구조화 할 필요가 있으며, 이를 위해 독립성의 이론과 적용 사이에 다른 점을 상기시킬 필요가 있다고 하였다. 그러나 그들은 직관을 벗어난 독립성의 애매한 적용에 도구적인 역할의 수학적 개념을 강조하고 있기는 하나 이러한 확장의 원인에 대한 구체적인 해명을 위한 수학적 분석은 하지 않았다. 조차미, 박종률(2008)은 '동시발생 사건'과 '양립하는 사건'의 두 유형의 문제를 통해 독립성의 직관적 개념과 형식적 정의의 적용에 있어 수학적으로 일관된 구조를 파악하였다. 기본 아이디어는 '동시발생 사건'을 적공간(표본공간)에서 곱셈정리를 적용하는 것으로써 '양립하는 사건'과 일관된 구조를 갖는 것임을 알 수 있었다. 그러나 이러한 노력이 확률적 사고를 위한 것이라고 할 수 있는가를 묻는다면 긍정적인 답변을 하기가 어렵다. 이러한 방법은 오히려 확률적 사고를 역행함을 아래의 예를 통해 알 수 있다.

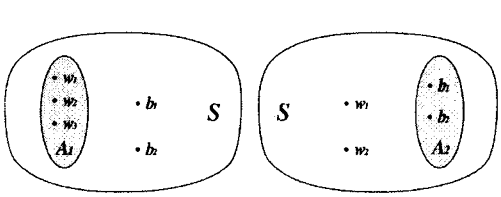
Guenther(1965)는 그의 저서 Concepts of statistical inference에서 적공간에서의 곱셈정리의 '유용성'을 설명하기 위해 다음과 같은 예를 들고 있다.

세 개의 흰 공과 두 개의 검은 공이 들어 있는 주머니에서 두 개의 공을 비복원추출한다고 하자. 첫 번째 꺼낼 사건이 A_1, 두 번째 검은 공을 꺼낼 사건이 A_2일 때, $P(A_1 \cap A_2)$을 구하여라.



[그림 Ⅲ-4] 정의에 따른 표본공간과 사건

풀이) 세 개의 흰 공을 w_1, w_2, w_3로, 두 개의 검은 공을 b_1, b_2 라 한다. 적합한 표본공간은 20개의 근원사건들로 구성되어 있다. 그림에서 직접 $P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{20}$ 임을 알 수 있다. 이것을 곱셈정리를 사용해서 구해보자. 추출을 개별적으로 고려한다면 처음 추출에 대한 표본공간은 5개의 근원사건들로 구성된다. 사건 A_1이 일어날 확률은 $P(A_1) = \frac{3}{5}$ 이다. 사건 A_1이 일어났다면 흰 공은 두 개가 남게 되고 그것들을 다시 W_1, W_2라고 한다면 두 번째 추출에서의 표본공간은 네 개의 근원사건으로 구성된다. 즉, $P(A_2|A_1) = 2/4$ 이므로 $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ 이다.



[그림 Ⅲ-5] 분리된 시행으로 본 표본공간과 사건

10) Harten & Steinbring(1983)이 말한 수학적 개념(mathematical concepts)과 직관적 관념(intuitive notion)은 조차미, 박종률(2008)에서 비교한 형식적 정의(formal definition)와 직관적 개념(intuitive concept)과 그 의미가 일치한다.

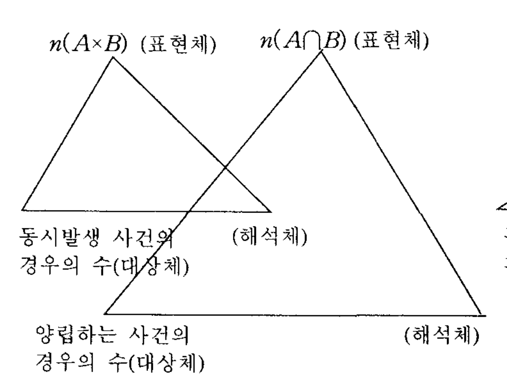
Guenther(1965)는 처음 20개의 사건으로 구성된 표본공간에서의 풀이는 정의(definition)를 이용한 풀이라 하였고, 각각의 시행을 나누어서 곱셈정리로 푼 것은 정리(theorem)를 이용한 풀이라 하였다. 정리를 이용한 것보다 정의를 이용한 것이 더욱 간단해 보이나 이것은 표본공간이 단지 20개의 근원사건을 갖기 때문이다. 만일 35개의 흰 공과 15개의 검은 공이었다면 표본공간은 2,450개의 근원사건을 갖게 되고 이것은 지루한 작업일 것이다. 그러나 곱셈정리는 보다 빠른 확률 값을 제공한다(Guenther, 1965). Guenther의 두 가지 풀이는 그가 말한 정의와 정리로 구분되기 보다는 풀이 과정을 곱셈정리의 형식에 중점을 두느냐 그 의미에 중점을 두느냐로 나뉘는 것이 더 옳을 것이다. 의미란 실제 직관의 저변에서 살아있는 $P(A_1 \times A_2)=P_1(A_1)P_2(A_2)$, $A_1 \in \Omega_1$, $A_2 \in \Omega_2$ 를 말하며 Guenther가 정리를 이용해서 풀었다는 개별적인 추출에서의 계산이다.

3. Peirce의 기호학을 통해 바라본 독립성의 이중적 관점

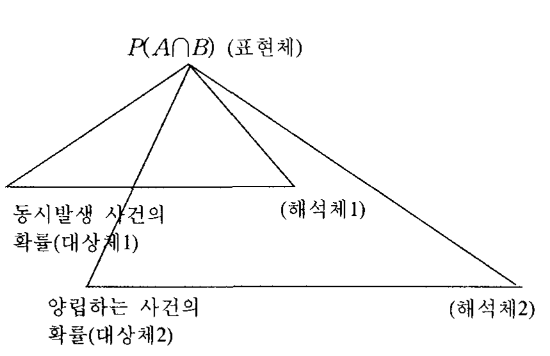
독립성이 곱셈정리로 정의되면서 개념의 확장을 불러왔다면 그 원인의 중심에 놓여있는 교집합기호를 보는 시각에 대한 두 가지 관점을 기호학적인 측면에서 바라 볼 필요가 있다. 합의 법칙에서 '두 사건이 동시에 일어나지 않을 때~'의 기호인 $A \cap B = \emptyset$에서의 교집합 기호와 곱의 법칙에서 '두 사건이 동시에 일어날 때의 확률'인 $P(A \cap B)$에서의 교집합 기호는 그것의 실제적이고 논리적인 관계는 그대로 둔 채 사고과정에서 두 가지 다른 방향으로 발화된 상징기호로 사용되는 듯하다. 본 절에서는 이러한 이중적 관점의 구조를 Peirce의 기호학을 사용하여 제시한다. 기호학은 상징체의 창조와 의미작용이 어떻게 이루어지는가를 연구하는 학문이다. 다른 한편으로는 연구의 대상이 되는 상징체가 어떤 구조로 만들어져 있으며, 어떤 의미를 품고 있는가를 분석하는 것이 기호학이다(김경용, 1994). 기호는 그 기호를 만들어낸 대상과 그것의 의미와 유기적으로 연결되어 있다. 이러한 삼분법적 기호학의 시초는 Peirce에 의해서이다.

Peirce의 기호 모델(Trabant, 2001)은 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적 요소를 가지고 있다. 기호는 표현체와 대상체의 지시관계가 어떤 해석체에 의해 해석될 때 존재한다.

'동시발생 사건'과 '양립하는 사건'의 두 가지 표현체는 '경우의 수'와 '확률'에서 다르게 나타남을 보았다. '경우의 수'에서는 '동시발생



[그림 Ⅲ-6] '경우의 수'에서 동시발생 사건과 양립하는 사건



[그림 Ⅲ-7] '확률'에서 동시발생 사건과 양립하는 사건

사건'과 '양립하는 사건'의 표현이 다르나[그림 8], '확률'에서는 같은 기호가 허용된다. '동시발생사건'과 '양립하는 사건'에 모두 허용된 교집합기호를 Pierce의 삼원적 요소 중 표현체를 중첩시켜 [그림 Ⅲ-7]과 같이 나타낼 수 있다.

교집합의 이중적 관점이 고스란히 들어있는 곱셈정리에서 기호의 두 가지 기능에 의해 '동시발생 사건'과 '양립하는 사건'이 연결된 독립성을 볼 수 있다.

(해석체1)은 동일한 가지를 뻗는 수형도를 만들어내는, 즉 한 사건의 결과에 대해 다른 사건이 동일한 가능성을 갖는다는 전제에 의한 가정으로서의 독립성을 의미하며, (해석체2)는 그러한 가정으로서가 아닌 곱셈정리로 판단하는 독립성이다. 또한 (해석체1)은 Guenther가 말한 곱셈정리의 '유용성'이 적용되나 (해석체2)에서는 그렇지 못하다.

만약 확률에서 '양립하는 사건'과 '동시발생사건'을 다루기 직전에 학생들 나름대로의 기호로 표현할 기회[11]를 주었다면 이들이 같은 기호를 부여받을 수 있었을까? 아마 그렇지 못했을 것이다. 왜냐하면 같은 기호가 허용되기 위해서는 두 가지 전제조건이 필요하다. 하나는 '동시발생 사건'을 발생시키는 두 시행의 적공간을 표본공간으로 하는 것과 다른 하나는 그 표본공간에서 측도를 하나로 통일시키는 것으로서 이것은 확률의 역사에서도 획기적인 시도를 통한 발전이었기 때문이다.

IV. 맺으며

본 연구의 주제는 독립성의 개념 확장과 이중적 관점에 대해서다. 첫째, 독립성은 처음에는 단순한 직관적인 사실로 출발하였으나 측도와 표본공간의 개념 등이 정의되면서 형식적인 정의로 완성되었음을 알 수 있었다. Kolmogorov와 von Mises의 독립성의 정의를 비교해 본 결과 분리된 시행에서 발생하는 동시발생사건의 독립성은 당연한 가정으로부터 출발하지만 적공간을 표본공간으로 정의함으로서 동시발생사건을 교집합으로 연결하면서 형식적 정의가 완성되고 이것이 양립하는 사건으로 확장된 것으로 볼 수 있었다. 둘째, 이러한 확장의 중심에 확률이라는 측도에서 교집합기호의 이중적 사용이 주목되었으며 이는 확률의 언어와 집합의 기호의 대응관가 일대일관계가 성립하지 않는다는 것을 알 수 있게 하였다. Kolmogorov의 공리적 체계를 근간으로 한 현 수학교육과정에서 이러한 독립성의 이중적 관점과 곱셈정리에 들어 있는 교집합 기호에 대한 이중적 관점을 은닉한 채 가르쳐왔다. 확률에서의 집합기호의 역할은 일상적 확률 상황의 수학적 대상화에 있다고 할 수 있다. 그러므로 학교수학에서 확률의 언어와 집합의 기호와의 상응관계에 관한 분석의 시도는 집합이 확률의 어느 범주까지 개입할 것인가에 관한 확실한 한계를 명확히 할 것을 요구한다.

이러한 연구는 "확률에서의 집합기호는 실제로 어떻게 사용되는가?"라는 질문으로부터 시작되었으나 결과적으로 "학생들에게 기호의 의미를 얼마만큼 드러내야 하는 것인가?"라는 과제를 남기게 된다.

Skemp(1987)는 수학의 힘에 접근하는 수단이 바로 수학적 기호라고 언급하며, 기호 표현의 이해를 강조하였다. 독립성에서의 오해는 동일

11) 학생들에게 자신들의 아이디어를 그들 나름대로의 기호로 표현할 기회를 준 다음 다시 표준화된 기호로 안내하여야 하는데(Harel & Kaput, 1991), 이런 절차 없이 표준화된 기호로 너무 빨리 의사소통을 요구하기 때문에 수학 기호가 발달의 장애 원인이 되기도 한다(Rubenstein & Thompson, 2001; 한길준, 정승진, 2002:44, 재인용).

한 의미를 일상 언어와 기호로 모두 표현할 수 있을 때 표현간의 번역에서 문제가 되거나 기호의 심층적 의미를 파악하지 않고 표면적 관계만을 기억할 때 발생할 수 있다. 서로 다른 의미의 사건('양립하는 사건'과 '동시발생 사건')에 확률이라는 특별한 측도에서 동일한 기호(교집합)가 허용되면서 독립성의 의미를 공유하게 된 것이 von Mises가 비판한 확장된 독립성의 원인이라고 추측한다면 현 교육과정에서 독립성에 대한 혼란은 기호에 대한 지나친 형식적인 지도와 학습을 강조함으로서 확률적 사고를 그 자체로 표현이 가능한 형식화된 기호로 주로 다루었던 점과 이러한 기호와 확률적 사고가 분리되지 않은 채 인지될 수도 있는 학생들의 인지 과정을 외면한 채 효과적인 지도를 제공하지는 못하였음을 인정할 수밖에 없다.

참고문헌

김경용(1994). **기호학이란 무엇인가: 기호의 우리, 우리의 기호.** 민음사 .

김선희 · 이종희(2003). 중학생들의 수학적 언어 수준. **대한수학교육학회지 수학교육학 연구, 13**(2), 123-141.

조차미 · 박종률(2008). 확률의 독립성, 그 직관적 개념과 형식적 정의의 갈등. **한국수학교육학회지 시리즈A:수학교육, 47**(3), pp.373-386

조차미(2008). Fischbein의 직관에 기초한 독립성에 관한 확률지도. **대한수학교육학회지 학교수학, 10**(3), pp.319~337

김원경 · 박석윤 · 이성덕 · 황선영 · 정상일 · 이종학(2003). **고등학교 확률과 통계.** 교육인적자원부.

김원경 · 박석윤 · 이성덕 · 황선영 · 정상일 · 이종학(2003). **고등학교 확률과 통계 교사용지도서.** 교육인적자원부.

최봉대 · 강옥기 · 황석근 · 이재돈 · 김영욱 · 홍진철(2002). **고등학교 수학I.** (주)중앙교육진흥연구소.

최봉대 · 강옥기 · 황석근 · 이재돈 · 김영욱 · 홍진철(2002). **고등학교 수학I 교사용지도서.** (주)중앙교육진흥연구소.

한길준 · 정승진(2002). 언어적 접근에 의한 수학적 기호의 교수-학습지도 방법 연구. **수학교육 논문집 14,** 43-60.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). USA: Springer.

Boroditsky, L. (2001). Does Language Shape Thought? Mandarin and English Speakers' Conceptions of Time. *Cognitive Psychology,* 43, 1-22.

Borovcnik, M., & Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia and M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters : Probability in Education,* 135-167. London: Kluwer Academic Publisher.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: preface to a science of mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Guenther, W. C. (1965). *Concepts of statistical inference.* New York: McGraw-Hill.

Harel, G., & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publishers, 82-94.

v. Harten, G., & Steinbring, H. (1983). Randomness and Stochastic Independence(On the Relationship between Intuitive Motion Mathematical Definition), *Decision Making under Uncertainty*(edited by Scholz. R. W.). Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland).

Kac, M. (1964). *Statistical Independence in Probability,* Analysis and Number Theory. London u. a.

Kolmogorov, A. (1956). *Theory of Probability*(Translation edited by Vathan Morrison). Chelsea Publishing Company, New York.

Lund, N. (2007). **언어와 사고.** (이재호 김소영 역). 학지사. (영어 원작은 2003년 출판).

Mises, R. von (1952). *Probability, statistics and truth* (J. Neyman, O. Scholl., & E. Rabinovitch, Trans.). London: William Hodge and company. (Original work published 1928).

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: language as(slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds), *Language and communication in the mathematics classroom,* 7-29. Virginia: NCTM.

Rubenstein, R. N., & Thompson D. R. (2001). Learning mathematical symbolism: Challenges and instructional strategies. *Mathematics Teacher,* 94, 265-271.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향.** (안정오 역). 서울: 인간사랑. (독어 원작은 1996년 출판).

A Study on Twofold Interpretation and Concept Extension of Stochastic Independence

Cho, Cha Mi (Yongdu middle school)

Stochastical independence is separated into two. *One can be intuitively judged and the* other is not. Independence is a concept based on assumption. However, It is defined as multiplication rule and it has produced extension of concept. Analysis on this issue is needed, assuming the cause is on the intersection sign which is used for both simultaneous events and compatible events. This study presented the extension process of independence concept in detail and constructed twofold interpretation of simultaneous events and compatible events which use the same sign $P(A \cap B)$ with Pierce Semiotics.

* Key words : stochastic independence(확률의 독립성), simultaneous events(동시발생사건), compatible events(양립하는 사건)

논문접수: 2009. 4. 10
논문수정: 2009. 5. 19
심사완료: 2009. 5. 22