대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 2, 307-319. May 2009

측정의 관점에서 본 덧·뺄셈의 통합적 이해

변 희 현*

현재 학교수학에서는 자연수로부터 실수에 이르는 덧·뺄셈을 자연수, 분수, 소수, 제곱근 등의 순서로 다루고 있다. 그런데 각 단계에서의 덧·뺄셈 계산 방법을 습득하는데 중점을 둔 나머지, 실수 체계 전반을 아우르는 덧·뺄셈의 통합적 원리에 대한 이해가 부족한 상태에서 학습·지도가 이루어지는 것으로 보인다. 본 연구는 이와 같은 덧·뺄셈 의 학습지도가 갖는 한계에 대한 문제의식으로부터 출발한다. 여기서는 수 개념 발생의 심리적 기원을 측정이라고 본 Dewey의 통찰을 확장하여, 덧·뺄셈을 측정활동 내에서 파악하고 이 때 드러나는 공통단위를 기반으로 하면 자연수에서 실수에 이르는 덧·뺄셈 연산의 서로 다른 알고리즘 외양 이면에 공통적인 본질이 있음을 밝힌다. 이러한 논의를 바탕으로 학교수학에서 덧·뺄셈 지도 개선의 필요성을 제시하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

수와 연산은 초등학교 수학 교육과정에서 가장 많은 부분을 차지하는 영역으로 크게 자연수, 분수, 소수의 개념과 그 사칙계산을 다루고 있다. 이어서 중학교에서는 집합, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산 그리고 근삿값을 다룬다(교육인적자원부, 2007, p.2). 교과서에서는 각 계산을 위해 필요한 절차를 제시하고 학생들은 이를 따라 하다보면 큰 어려움 없이 계산방식을 익히고 능숙하게 계산할 수 있게 된다.

그런데 사칙계산 중 덧·뺄셈을 하는 경우 분수는 먼저 통분을 해야 하고, 소수는 소수점을 중심으로 정렬해야하며, 제곱근은 근호안의 수를 정리한 후 근호안의 수를 같도록 할 수 있는지를 확인해야 한다. 즉, 분수, 소수, 제곱근의 덧·뺄셈을 위해 필요한 절차는 매우 상이하므로 학생들은 이들의 관련성을 깨닫지 못한 채 알고리즘에 따라 계산하는 경우가 많음을 흔히 볼 수 있다.

이와 관련한 선행연구들 중에는, 덧·뺄셈 계산 알고리즘의 개념적 이해 또는 효과적 지도 방안과 관련한 연구들이 있으나, 이는 다루는 수의 범위를 자연수(정주자, 2002) 혹은 분수(박재우, 2004; 김수원, 2006)로 제한한 것들이고, 덧·뺄셈의 오류 유형을 분석함으로써 지도 방안을 탐색하는 연구들도 다수 있으나, 각 연구들의 분석 범위도 자연수(서유미, 2008; 최진숙·유현주, 2006), 분수(추은영, 2003; 김선영, 2003), 혹은 소수(최은실, 2006; 양성윤, 2006) 등으로 분리되어 있다. 즉, 대부분의 선행 연구들은 특정한 범위의 수 계산에 국한된 논의를 하였을 뿐, 덧·뺄셈 알고리즘에 대한

* 한국교육과정평가원, bhhmath@kice.re.kr

실수체계 전반의 논의는 시도하지 않은 것으로 보인다. 또한, Vergnaud(1982)는 개념장 이론 (The theory of Conceptual field)을 통해 일반적인 가법적 구조(additive structure)를 논의하고 있는데, 그는 덧셈의 관계를 6가지 범주로 나누어 덧·뺄셈이 발생하는 상황을 분류한다. 이는 모든 수의 덧·뺄셈을 상황과 연결하여 의미 있게 다루고 관계에 대한 다양한 표현으로부터 점차 형식화할 수 있음을 보인다. 그러나 이를 구체적으로 자연수, 분수, 소수, 나아가 제곱근의 덧·뺄셈 알고리즘과는 연결시키지 않고 있다.

본 연구는, 수 개념의 심리적 발생 기원을 인간의 활동인 측정으로 보고 그 정확도가 증가함에 따라 내재적이고 본질적인 수 연산이 점차 드러난다고 본 Dewey(1901)의 생각을 확장하여 실수체계 전반의 덧·뺄셈 문제를 측정이라는 일관된 관점에서 다룸으로써, 개별적 계산 알고리즘 이면에 놓여있는 본질과 그 관련성을 파악하도록 하여 일관되고 통합적인 덧·뺄셈에 대한 안목을 키우고자 한다. 그리고 이러한 논의를 기반으로 학교수학에서 덧·뺄셈 학습지도 개선의 필요성을 드러내는데 그 목적이 있다.

이러한 연구의 목적을 달성하기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 연구 과제를 설정하였다. 첫째, 유리수 범위의 덧·뺄셈과 그 알고리즘을 측정의 관점에서 분석한다. 둘째, 무리수 발생의 개념적 근원에서 드러나는 두 크기 사이의 공통단위 문제를 분석한다. 셋째, 실수 범위의 덧·뺄셈을 측정의 관점에서 분석한다.

아래에서는 위 연구 과제에 관하여 차례로 살펴보기로 한다.

II. 측정의 관점에서 본 유리수 범위의 덧셈과 뺄셈

Dewey(1901)가 수 개념 발생의 심리적 기원으로 본 측정이란 모호한 전체를 명확한 전체로 만드는 것으로 이는 전체를 단위로 분해한 후 단위의 반복을 통하여 전체 양을 다시 재구성하는 것을 의미한다. 이 장에서는 이러한 Dewey의 관점에 기초하여 현재 초등학교에서 다루는 유리수 범위의 자연수, 분수, 소수의 덧셈과 뺄셈을 측정의 관점에서 살피고 이 때 공통단위의 필요성을 드러내고자 한다.

1. 자연수의 덧셈과 뺄셈

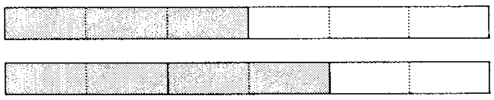
Dewey에 따르면 자연수의 덧·뺄셈은 가장 초보적인 측정단계인 미측정된 단위를 통한 측정 즉, 이산량의 세기 활동에서 나타나는 것으로 본다(McLellan & Dewey, 1901, p.96). 예를 들어, 사과 한 개가 정확히 얼마만큼인지는 규정되지 않았으나 (사과 1개)+(사과 3개)=(사과 4개) 혹은 (사과 4개)-(사과 3개)=(사과 1개) 와 같이 집성의 관념에 따라 덧셈과 뺄셈이 드러난다(강흥규, 2003, p.83).

교과서에서 덧셈을 도입하는 상황은 (남자 어린이 4명)+(여자 어린이 3명)=(어린이 7명), (흰 바둑돌 4개)+(검은 바둑돌 3개)=(바둑돌 7개)로 두 상황 모두 미측정된 그러나 개별적인 개체인 어린이와 바둑돌을 단위로 하여 전체에 단위가 몇 번 포함되는지를 알아보는 측정으로 볼 수 있다. 뺄셈을 도입하는 상황 또한 (비둘기 5마리)-(비둘기 3마리)=(비둘기 2마리) 으로 비둘기 1마리를 단위로 한 양의 측정으로 볼 수 있다(교육인적자원부, 2001a, pp.60-65). 여기서는 합과 차를 구해야 하는 두 양의 측정단위가 개별적 개체로 동일하므로 두 양의 공통단위에 대한 특별한 인

식없이 바로 세기활동을 통해 연산이 가능하다.

2. 분수의 덧·뺄셈

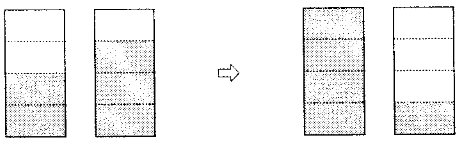
Dewey는 분수 지도는 정확한 측정단위를 통한 측정에서 이루어져야 하며, 분수 표기는 분석과 종합이라는 측정의 기본적인 과정을 의식 속에 더 분명하게 하고 더 명확한 형태로 표현하는 것을 돕는다고 한다(McLellan & Dewey, 1901, pp.126-127). 예를 들어, 어떤 길이를 측정하여 그것이 $\frac{7}{10}$ m가 됨을 발견했다면, 이는 원시단위가 1m이며, 분모인 10은 원시단위에 들어있는 파생단위의 개수를, 분자 7은 전체량을 구성하는 파생 단위의 개수를 나타낸다(강홍규, 2003, p.88). 이러한 맥락에서 분수의 덧셈을 생각해보자. 예를 들어, 두 길이 $\frac{1}{2}$m와 $\frac{2}{3}$m를 더하는 상황을 살펴보면, 두 양은 모두 원시단위 1m에 대한 파생단위 $\frac{1}{2}$m, $\frac{1}{3}$m가 각각 1번, 2번 포함됨을 의미하는 것으로 정확히 규정된 단위에 의한 정확한 양을 나타낸다. 그런데, 두 양의 합을 측정하기 위해서는 새로운 파생단위가 요구된다. 이는 두 양을 동시에 정확하게 측정할 수 있는 단위이어야 하는데, 이를 본 논문에서는 공통단위로 이름하기로 한다. 두 양 $\frac{1}{2}$m, $\frac{2}{3}$m의 파생단위는 서로 다르나 [그림 Ⅱ-1]과 같이 $\frac{1}{6}$m를 공통단위로 하여 $\frac{1}{2}$m와 $\frac{2}{3}$m을 재측정하면 각각 $\frac{3}{6}$m 와 $\frac{4}{6}$m가 된다. 따라서, 두 양의 합은 $\frac{1}{6}$m가 7번 포함되는 양으로 $\frac{7}{6}$m이다.



[그림 Ⅱ-1] $\frac{1}{2}$m와 $\frac{2}{3}$m 의 공통단위

앞서 자연수 덧셈에서는 합하는 두 양의 단위가 공통적인 개별적 개체이므로 특별히 공통단위를 인식할 필요성이 두드러지지 않으나, 분수 덧셈을 측정의 관점에서 볼 때는 일반적으로 두 양을 공통적으로 측정할 수 있는 새로운 파생단위 즉 공통단위를 찾는 과정이 필요하다.

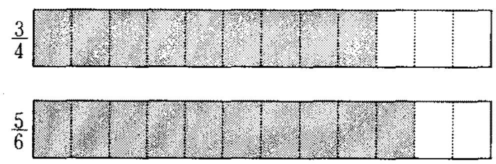
현재 교과서에서 분수의 덧셈은 4-나 단계에서 분모가 같은 분수의 덧셈을 다루고 5-가 단계에서 통분과 분모가 다른 분수의 덧셈을 다룬다. 먼저 분모가 같은 분수의 덧셈 $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$은 [그림 Ⅱ-2]와 같이 두 분수를 나타낸 그림을 보고, 이들이 나타낸 분수를 이어서 색을 칠하는 활동으로 분수의 합을 알아보게 하고 있다(교육인적자원부, 2001b, p.8).



[그림 Ⅱ-2] $\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$의 표현

[그림 Ⅱ-2]의 왼쪽은 각 분수가 나타내는 양으로 원시단위를 4등분한 새로운 단위가 두 양에 각각 2번, 3번 포함됨을 나타낸 것이고 오른쪽 부분에서 이를 이어서 색칠하는 활동은 전체에 포함된 파생단위가 5개이므로 이는 분수로 $\frac{5}{4}$ 또는 $1\frac{1}{4}$로 나타낼 수 있음을 직관적으로 알게 하는 것으로 생각된다.

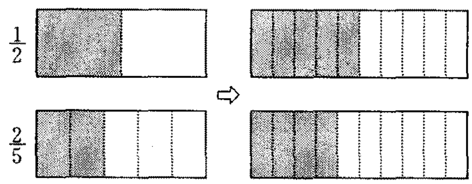
이어서 5-가 단계에서 통분은 두 양 $\frac{3}{4}$L와 $\frac{5}{6}$L의 비교라는 맥락에서 그 필요성을 나타내고 두 분수를 [그림 Ⅱ-3]에 색칠하는 활동으로 두 양을 비교하고 있다(교육인적자원부, 2002a, p.44).



[그림 Ⅱ-3] $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$의 비교

[그림 Ⅱ-3]은 $\frac{3}{4}$L과 $\frac{5}{6}$L를 각각 원시단위 1L를 4등분한 것이 3번, 1L를 6등분한 것이 5번 포함되는 양으로 해석할 경우 직접 비교가 어려우므로 두 양을 정확하게 비교, 측정하기 위해 공통단위가 필요하며 그것이 $\frac{1}{12}$L 임을 나타내는 것으로 볼 수 있다.

또 분모가 다른 분수의 덧셈 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$은 [그림 Ⅱ-4]의 왼쪽 부분과 같이 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$를 각각 색칠하여 나타낸 후 이로부터 정확한 값을 말할 수 없음을 드러내어 이를 위해서는 앞서 배운 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{5}$의 통분이 필요함을 오른쪽 부분과 함께 제시하고 합은 $\frac{9}{10}$임을 나타낸다(교육인적자원부, 2002a, p.70).



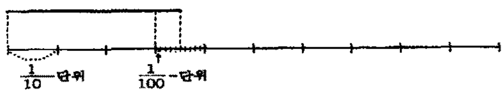
[그림 Ⅱ-4] $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$의 표현

앞서 배운 통분의 필요성을 그림 오른쪽 부분과 함께 제시한 것은 통분을 단순한 산술적 조작의 산물이 아닌 정확한 측정의 맥락에서 공통단위와 관련지어 직관적으로 이해할 수 있도록 한 배려로 판단된다. 분모가 다른 분수의 뺄셈도 같은 방식으로 지도함을 확인할 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 분모가 다른 분수의 덧·뺄셈을 측정의 맥락에서 살펴보면 공통단위의 필요성을 직관적으로 이해할 수 있고 분수의 덧셈에 필요한 통분은 두 양의 합이나 차를 정확하게 측정하는데 필요한 공통단위를 찾는 과정에 대응하는 형식화된 알고리즘으로 파악할 수 있다.

3. 소수의 덧·뺄셈

소수를 측정의 맥락에서 살펴보면 크게 분수적 관점과 십진기수법의 관점으로 나누어 파악할 수 있다(변희현, 2005, p.40). 분수적 관점은 소수를 십진분수의 다른 이름으로 보아 분수와 같은 방식으로 이해하는 것으로 예를 들어, 0.35m는 $\frac{35}{100}$m로 주어진 길이에는 파생단위 $\frac{1}{100}$m가 35번 포함되는 것으로 생각한다. 비교하여 십진기수법의 관점은 [그림 Ⅱ-5]에 나타난 바와 같이 주어진 길이를 측정하기 위해 단위를 10등분하여 얻은 첫 번째 파생단위 $\frac{1}{10}$ m가 3번 포함되고 약간 남는 부분이 생겨 이를 측정하기 위해 $\frac{1}{10}$ m를 다시 10등분하여 얻은 두 번째 파생단위 $\frac{1}{100}$ m가 5번 포함되는 것으로 생각한다.



[그림 Ⅱ-5] 측정에서 소수의 기수법적 관점

즉, 십진기수법의 관점이란 단위보다 작은 양의 측정에서 이전 단계의 측정단위로 잴 수 없는 나머지 부분을 자동적이고 기계적인 방식

으로 원시단위 1m를 계속 10등분하여 순차적으로 얻은 파생단위 $\frac{1}{10}$ m, $\frac{1}{100}$ m, … 등으로 측정하는 과정에 대응하여 이해하는 것이다.

이러한 소수의 두 가지 관점에 따라 덧·뺄셈의 방식도 차이를 드러낸다. 예를 들어 두 길이 0.12m와 0.23m를 더하는 상황을 분수적 관점에서 살펴보면, 파생단위 $\frac{1}{100}$ m가 각각 12, 23번 포함되므로 전체는 $\frac{1}{100}$ m를 35번 포함하는 양으로 0.35m이다. 비교하여 십진기수법의 관점에서는 두 길이에 첫 번째 파생단위인 $\frac{1}{10}$ m가 각각 1, 2번 포함되고 두 번째 파생단위인 $\frac{1}{100}$ m는 각각 2, 3번 포함되므로 합한 양에는 $\frac{1}{10}$ m가 3번, $\frac{1}{100}$ m가 5번 포함되므로 0.35m 임을 안다.

현재 우리나라 교과서 4-나 단계에서 다루어지는 소수의 덧·뺄셈은 <표 Ⅱ-1>과 같이 분수적 관점에서 소수 한 자리의 수의 덧셈은 각 소수에 포함된 0.1의 개수, 소수 두 자리의 수의 덧셈은 각 소수에 포함된 0.01의 개수로부터 계산함을 알 수 있다[1]. 이 때 그 개수를 세는 0.1과 0.01은 두 소수의 공통단위이다.

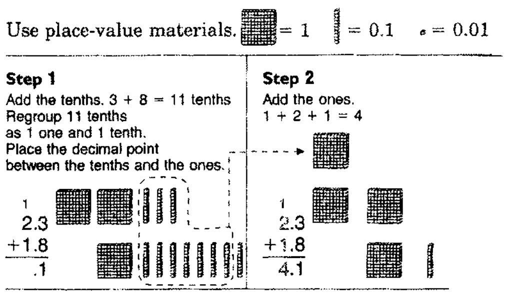
비교하여 소수점 아래의 자리수가 다른 소수의 덧셈 2.724+4.35에서는 아래와 같이 4.35를 4.350으로 고쳐 각 소수에 포함된 0.001의 개수의 합으로부터 두 소수의 합을 이해하게 한다. 이 때 소수 두 자리의 수 4.35를 동치인 4.350으로 바꾸어 표현한 것은 두 소수의 자리수를 같게 함으로써 공통단위 0.001을 찾는 과정이다.

2.724 → 0.001이 2724
+ 4.35 → 0.001이 4350
7.074 ← 0.001이 7074

(교육인적자원부, 2001c, p.123)

위와 같이 우리나라 교과서에서 소수의 덧셈은 분수적 관점에서 두 소수에 포함된 공통단위의 개수를 생각하여 자연수의 덧셈으로 환원하여 계산한 뒤 이를 다시 소수로 변환하도록 하는 과정을 밟도록 하고 있다.

비교하여 미국 교과서에서는 [그림 Ⅱ-6]에 나타난 바와 같이 소수 한 자리 수의 덧셈 2.3+1.8을 위해 다음 모델을 사용한다(Burton, Kaplan, Hopkins, Kennedy, Johnson & Schultz, 1994a. p.374)



[그림 Ⅱ-6] 2.3+1.8의 표현

이는 십진블록을 사용하여 우선 2.3과 1.8에는 각각 원시단위가 2, 1번 포함되고 첫 번째

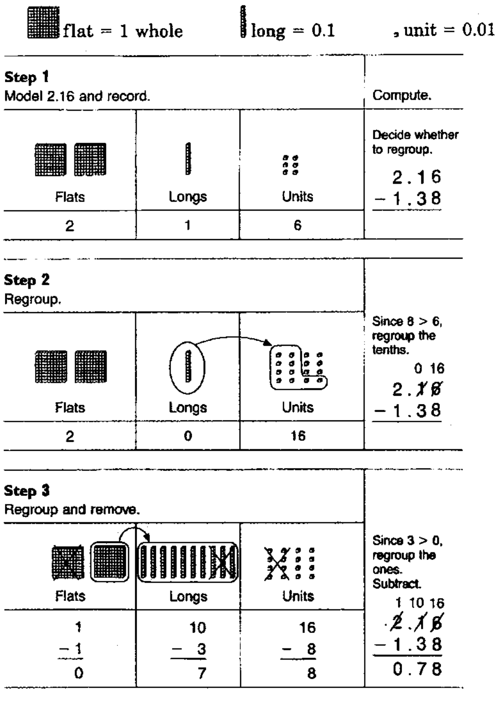
<표 Ⅱ-1> 4-나 교과서의 소수 덧셈 설명 방식

· 0.7+0.5	· 0.25+0.31	· 3.75 + 7.48
0.7 → 0.1이 7 + 0.5 → 0.1이 5 1.2 ← 0.1이 12	0.25 → 0.01이 25 + 0.31 → 0.01이 31 0.56 ← 0.01이 56	3.75 → 0.01이 375 + 7.48 → 0.01이 748 11.23 ← 0.01이 1123

(교육인적자원부, 2001c, pp.119-123)

1) 소수의 뺄셈도 같은 방법으로 설명하므로 이하에서는 소수의 덧셈만을 다룰 것이다.

파생단위인 0.1-원시단위는 3, 8번 포함되므로 두 수의 합에는 원시단위가 3번, 0.1-원시단위가 11번 포함됨을 나타낸다. 그리고 10개의 0.1-원시단위는 1개의 원시단위와 같음을 이용하여 4.1이 됨을 드러낸다. 이는 소수의 자리값은 측정에 사용된 원시단위 또는 파생단위의 크기를 나타내는 것으로 소수의 합은 각 자리값을 공통단위로 하여 자리값별로 더할 수 있음을 드러낸다. 소수 두 자리 수의 뺄셈 $2.16-1.38$ 도 같은 모델을 사용하여 직관적인 방식으로 [그림 Ⅱ-7]과 같이 설명한다(Burton et al. 1994b. p.60).



[그림 Ⅱ-7] 2.16-1.38의 표현

측정의 맥락에서 소수는 두 가지 관점으로 파악할 수 있고 이는 덧·뺄셈의 방식에도 영향을 준다. 즉, 두 소수의 합과 차를 분수적 관점에서는 두 소수에 대한 하나의 공통단위를 상정하고 이의 개수를 파악하나, 십진기수법의 관점에서는 측정에 사용된 각각의 파생단위 별로 개수를 파악하는 차이가 있다.

이상 우리나라 초등 교육과정에서 다루는 유리수 범위의 자연수, 분수, 소수의 덧·뺄셈을 모호한 전체를 명확한 전체로 만드는 측정 활동에 기반하여 살펴보면 덧·뺄셈 방식의 외양은 서로 다르지만 그 본질은 모두 두 양 또는 두 수의 공통단위를 드러내어 합과 차에 포함된 공통단위의 개수를 파악하는 것임을 알 수 있다.

Ⅲ. 임의의 크기 사이의 공통단위 문제

앞서 Ⅱ장에서는 공통단위를 두 양을 동시에 정확하게 측정할 수 있는 단위로 정의하였다. 즉 두 크기 a, b 의 공통단위를 e라고 하면 a와 b에 포함된 e의 개수가 각각 자연수로 나타내짐을 의미한다. 그러면 임의의 두 크기 사이에는 공통단위가 항상 존재할까? 이 문제를 해결하기 위해 이 장에서는 유클리드 원론에서 다룬 임의의 크기 사이에 공통단위를 구하는 방법을 살펴보고 이를 토대로 공통단위가 존재하지 않는 두 선분의 증명을 다루고자 한다.

1. 공통단위를 구하는 방법

임의의 두 크기 사이에 공통단위를 찾는 방법을 유클리드 원론에서는 다음 명제에서 다룬다.

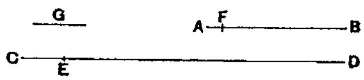
명제 3. 공통단위로 잴 수 있는 두 양이 주어졌을 때, 가장 큰 공통단위 찾기

공통단위로 잴 수 있는 두 양을 AB, CD라

하고 AB가 더 작은 양이라 하자;
AB, CD의 가장 큰 공통단위를 찾아야 한다.
AB는 CD를 재거나 또는 재지 못할 것이다[2].

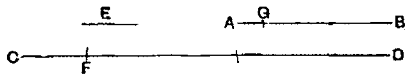
AB가 CD를 잰다면 AB는 AB 자신을 재므로, AB는 AB, CD의 공통단위이다. AB가 가장 크다는 것은 자명하다. 왜냐하면 AB보다 큰 양은 AB를 잴 수 없기 때문이다.

다음, AB가 CD를 재지 못한다고 하자. 큰 양에서 작은 양을 빼는 일을 되풀이하면, 언젠가는 남는 양이 그 이전 양을 잰다. 왜냐하면 AB, CD는 공통단위로 잴 수 있기(commensurable) 때문이다;



AB가 ED를 재고 EC가 남았다고 하자.
EC가 FB를 재고 AF가 남았다고 하자.
그리고 AF는 CE를 잰다고 하자.
그러면 AF가 CE를 재고 CE가 FB를 재므로, AF는 FB를 잰다.
그런데, AF는 자신을 재므로 AF는 AB를 잰다.
또, AB는 DE를 재므로 AF는 ED를 잰다.
또, AF는 CE를 재므로, AF는 CD 전체를 잰다.
따라서, AF는 AB와 CD의 공통단위이다.
(이하 AF가 최대임을 밝히는 증명은 생략)
(Heath, 1956b, pp.20-21)

위의 명제는 원론 10장에 제시된 것으로 이에 대응하여 임의의 두 수에 대한 최대공통단위는 7장 명제2에서 다루는데 두 수를 아래와 같이 선분 AB, CD로 두고 앞서 살핀 10장의 명제3과 똑같은 방식으로 구한다(Heath, 1956a, p.298).



단, 크기와 관련하여 유클리드 원론 10권 명제2에서는 가장 큰 공통단위를 찾는 과정에서 생긴 나머지가 계속 그 이전 양을 재지 못할 때에는 공통단위로 잴 수 없는 양임을 밝히고, 원론 7권 명제1에서는 같은 과정에서 나머지로 단위가 남을 때까지 계속된다면 두 수는 서로 소임을 밝힌다. 이는 기하와 산술에서 다루는 크기와 수의 공통단위에서 나타나는 가장 큰 차이로, 자연수 범위에서는 1이상의 공통단위가 반드시 존재하나 크기사이에는 공통단위로 잴 수 없는 것이 있음을 분명히 한다.

그런데 두 크기 사이에 공통단위가 존재하지 않아 큰 양에서 작은 양을 빼는 과정이 무한히 계속되는 것이 가능하다고 해도 마지막에 얻게 될 것이 무엇인지 모르는 가운데 끝없이 계속하게 되는 형태의 인지는 적절하지 않다. 또, 눈과 손이 갖는 한계로 인해 경험에 의해서는 주어진 두 크기 사이에 공통단위가 존재하지 않음을 결코 알 수 없다고 한다(Moreno-Armella & Waldegg, 2000, p.188). 즉, 경험적, 물리적 측정 단계에서는 두 크기 사이에 항상 공통단위가 존재한다고 판단할 것이므로, 두 크기 사이에 공통단위가 존재하지 않음은 사람의 눈과 손이 갖는 한계를 뛰어넘는 이론적 측정 단계에서의 수학적 증명으로 인식할 수 있음을 알 수 있다.

---

2) 여기서 '잰다'는 의미는 원문의 'measure'를 번역한 것으로, AB가 CD를 잰다는 의미는 $CD=(자연수)\times AB$로 표현됨을 의미한다. 즉, AB를 단위로 CD를 측정할 때 CD에 포함된 AB의 개수가 자연수이고 나머지가 생기지 않음을 의미한다. 따라서, AB가 CD를 재지 못한다는 것은 AB를 단위로 CD를 측정할 때 AB보다 작은 나머지가 생김을 의미한다.

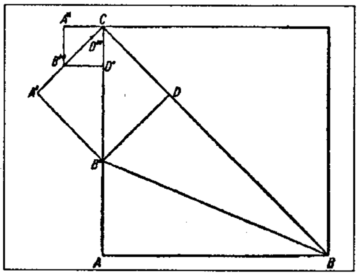
2. 공통단위로 잴 수 없는 두 선분의 증명

공통단위로 잴 수 없는 두 선분의 존재에 대한 증명은 여러 문헌에서 확인할 수 있으나 그 중 Toeplitz(1963)는 정사각형의 한 변과 대각선 사이에 공통단위가 존재하지 않음을 다음과 같이 증명한다(pp.4-6)

먼저, 선분 AC와 BC사이에 공통단위가 있다고 가정하고, 위와 같은 방식으로 공통단위를 찾는다고 하자.

첫째, 선분 AC로 BC를 측정할 때 생긴 나머지를 DC라고 하자.

둘째, 선분 DC로 AC를 측정할 때 생긴 나머지를 D'C로 라고 하자. 이 때, D'C의 길이는 DC를 한 변으로 하는 정사각형의 한 변과 대각선의 차이임을 보일 수 있다.



위의 그림과 같이 점 D에서 수선을 그어서 변 AC와 만나는 점을 B'이라고 두고, B'과 B를 연결하면, $\triangle ABB' \equiv \triangle DBB'$ 이므로, AB'= DB'
또한, $\angle B'CD=45°$이므로 $\triangle B'CD$는 직각이등변삼각형이다. 따라서, DB'=DC
$\therefore$ AB'=B'D=DC
따라서, D'C는 정사각형 A'B'DC의 대각선과 한 변의 차이이다.

셋째, D'C로 A'C (=DC)를 측정할 때 생긴 나머지를 D″C라고 하자. 이 때, D″C의 길이는 D'C를 한 변으로 하는 정사각형의 한 변과 대각선의 차이임을 둘째 단계에서와 똑같은 방식으로 보일 수 있다.

이 때, 각 단계에서 생기는 나머지는 그 단계에서 사용하는 측정단위를 한 변으로 하는 정사각형의 대각선과 한 변의 길이의 차이와 같으므로, 공통단위를 찾는 위 과정은 결코 끝이 나지 않으며 각 단계에서 생기는 나머지의 길이는 점점 작아진다.

$$CD > CD' > CD'' > \cdots$$

만약, AC와 BC 사이에 공통단위 e가 존재한다면 CD, CD', CD″, …은 모두 e의 배수가 되어야 하나, 고정된 선분 CD보다 점점 작아지면서 이들이 무한히 e의 배수가 되는 것은 불가능하다. 즉, 이는 AC와 BC 사이에 공통단위가 존재한다는 가정과 모순이 된다. 따라서 정사각형의 한 변과 대각선 사이에 공통단위는 존재하지 않는다.

Ⅳ. 측정의 관점에서 본 실수 범위의 덧셈과 뺄셈

Ⅲ장에서는 임의의 두 크기 사이에 공통단위를 구하는 방법과 공통단위로 잴 수 없는 두 선분에 대한 증명을 살펴보았다. 이 장에서는 Ⅲ장의 내용을 토대로 실수 범위에서의 덧·뺄셈을 측정의 관점에서 이해하고자 한다.

이를 위해 먼저 실수 범위에서의 덧·뺄셈과 관련하여 서울 소재 ○○중학교에서 수학을 가르치는 경력 17년 교사와 ○○대학교에서 교직을 전공하는 예비교사인 수학과 4학년 학생과 간단한 면담을 실시하였는데, 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

면담 1)

연구자 : $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$을 더 간단히 하고

싶어 하는 학생들이 있나요?

교사 : 있지요. 식 $2a+3$을 $5a$로 나타내고 싶어 하는 것처럼요.

연구자 : 학생들은 이와 관련하여 어떤 질문을 하나요?

교사 : 예를 들어, $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$과 같이 제곱근의 곱셈은 하나의 수로 나타내는데 왜 덧셈은 간단히 하지 않는지를 많이 질문하지요.

연구자 : 그러면 선생님은 학생들에게 어떻게 지도하시는지요?

교사 : $1+\sqrt{2}$ 는 수가 아닌 식처럼 생각하여 동류항을 정리하는 것처럼 훈련하고 각인시키는….

연구자 : 유리수 범위의 덧·뺄셈과는 관련지어 설명하지는 않는지요?

답변 : 특별히 둘을 연결시키지는 않아요.

면담 2)

연구자 : $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$은 간단히 할 수 없나요?

예비교사 : 네.

연구자 : 그 이유가 뭘까요?

예비교사 : 그게 학교 다닐 때 참 답답했던 것 중의 하나였구요. 여전히 그게 잘 이해가 가지 않아요.

위의 면담 결과에서 알 수 있듯이, 학생들은 수 계산의 결과를 하나의 수로 나타내고 싶어 하며, 이를 위해 교사는 학생들이 $1+\sqrt{2}$를 수가 아닌 식의 계산처럼 인식하는 것에 익숙해지도록 지도하고 있음을 알 수 있다. 또, 유리수 범위의 덧·뺄셈과는 별개의 것으로 지도하고 있음을 알 수 있는데, 예비교사도 실수 범위의 제곱근 덧·뺄셈은 여전히 이해가 부족함을 나타낸다.

본 연구자는 그 원인이 유리수 범위의 덧·뺄셈을 측정의 관점에서 일관되고 통합적인 방식으로 이해하는 경험 또는 시각이 부족했기 때문에 실수 범위에서 이를 확장 적용하려는 시도가 이루어지지 않은 것에 있다고 본다. 더욱이 실수 범위에서의 연산을 측정의 맥락에서 이해하기 위해서는 공통단위로 잴 수 없는 양을 인식하는 것이 연결 고리의 역할을 하나 교과서에서는 이를 직접 다루지 않으므로 학생들은 이에 대한 이해가 거의 없는 상태이다[3].

Klein(1924)에 따르면 무리수의 어원은 '두 자연수의 비로 표현할 수 없는'의 의미를 담고 있는 것이라고 한다. 이는 공통단위로 잴 수 없는 두 크기 사이의 관계와 직결되는 것으로 유리수와 무리수의 개념을 측정의 맥락에서 파악하면, 유리수는 단위와 주어진 크기사이에 공통단위가 존재하는 경우이고 무리수는 단위와 주어진 크기사이에 공통단위가 없는 경우에 해당한다고 할 수 있다. 또, Ⅱ장에서는 Dewey (1901)의 생각을 적용하여 측정의 맥락에 기반하여 개별적인 물체를 세는 가장 초보적인 단계의 측정에서 자연수의 덧·뺄셈을, 나아가 단위보다 작은 양의 측정이 요구되는 상황에서 분수와 소수의 덧·뺄셈을 분석하였다. 이 때 두 수의 합과 차가 산술적으로 하나의 수로 대치되는 것은 공통단위를 바탕으로 재측정되는 과정으로, 두 양의 합과 차에 포함된 공통단위의 개수를 세는 것에 대응함을 알 수 있다.

여기서는 Ⅱ장의 범위를 벗어나는 덧셈, 예를 들어 $1+\sqrt{2}$ 등을 측정의 관점에서 분석의 대상으로 삼는다. 두 수 1과 $\sqrt{2}$의 관계는 정사각형의 한 변과 대각선의 길이의 관계에 대응하는 것으로 Ⅲ장에서 두 길이 사이에는 공통단위가 없음을 증명하였다. 공통단위가 없음은 산술적으로 Ⅱ장에서와 같이 두 수의 합에 포함된 공통단위의 개수를 파악하여 그 결과를 하

3) 한 연구에서는 고등학생을 대상으로 무리수를 공통단위로 잴 수 없는 양의 측정과 관련지어 이해하는지를 조사한 결과 이러한 방식으로 이해하는 학생은 거의 없음을 드러내었다(변희현, 2005, p.121).

나의 수로 나타내는 것이 불가능함을 의미한다. 이것이 바로 $1+\sqrt{2}$를 유리수처럼 덧셈 결과를 하나의 수로 대치할 수 없는 주요한 이유이다.

그런데, 9-가 교과서에서는 제곱근의 덧·뺄셈을 근호 안의 수가 같은 것은 동류항으로 보아 아래와 같이 다항식의 덧·뺄셈을 이용하여 계산함을 밝힌다.

$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(5-3)\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

또한, $5\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ 이나 $5\sqrt{2}-3\sqrt{3}$과 같이 서로 다른 제곱근을 포함하는 식은 $5a+3b$를 더 이상 간단히 할 수 없는 것과 같이 더 이상 간단히 할 수 없음을 밝힌다(이준열·장훈·최부림·남호영·이상은, 2003, pp.30-31).

즉, 교과서에서는 다항식의 덧·뺄셈을 이용해 제곱근의 덧·뺄셈을 설명하고 있다. 물론 다항식의 계산에서 동류항끼리 간단히 나타내는 것을 문자부분을 공통단위로 보고 공통단위의 개수를 세는 방식의 확장 또는 일반화라고 파악한 후 서로 다른 제곱근의 덧·뺄셈도 같은 방식으로 이해할 수 있다. 그러나 무리수에 내재한 공통단위 부재의 문제를 직접적으로 다루지는 않음으로써 면담결과에서 알 수 있듯이 $1+\sqrt{2}$가 하나의 수로 대치할 수 없음에 대한 충분한 이해를 기대하기는 어려울 것으로 판단된다.

V. 결론 및 제언

Dewey는 모호한 전체를 명확한 전체로 만드는 측정활동을 수 개념 발생의 심리적 기원이라고 보고 정확성이 증가함에 따라 내재적이고 본질적인 수 연산이 점차 드러난다고 보고 양을 측정하는 양식으로 자연수와 분수에는 다른 정신적 과정이 들어있지 않음을 설명하였다. 본 논문은 Dewey의 이러한 생각을 확장하여 덧·뺄셈을 측정활동 내에서 파악하고 이 때 드러나는 중요한 공통단위 문제를 기반으로 자연수에서 실수에 이르는 덧·뺄셈 연산을 일관된 방식으로 이해할 수 있음을 밝히고자 했다.

즉, 자연수의 덧·뺄셈은 가장 초보적인 미측정된 단위에 의한 측정에서, 분수와 소수의 덧·뺄셈은 정확한 측정단위에 의한 경험적 측정에서, 실수범위에서의 덧·뺄셈은 사람의 눈과 손이 갖는 한계를 뛰어넘는 이론적 측정에서 드러나는 것임을 알 수 있다. 그리고 유리수 범위까지의 덧·뺄셈에서는 항상 공통단위를 찾을 수 있으므로 공통단위의 개수를 세어 연산의 결과를 하나의 수로 대치할 수 있는 반면 실수 범위에서 공통단위가 존재하지 않는 두 수의 덧·뺄셈은 그 결과를 하나의 수로 대치하여 간단히 나타낼 수가 없다. 이 때 많은 학생들은 이전의 산술적 경험 때문에 $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 등을 완결되지 않은 식으로 인식하고 이들을 하나의 대상으로 파악하는데 어려움을 나타낸다.

지금까지의 논의를 바탕으로 학교 수학에서 덧·뺄셈의 교수학습 상황을 개선하기 위한 개략적인 두 가지 방향을 제시하면 다음과 같다. 본 연구에서 제시하는 방향이 수의 연산 지도 개선에 보다 실질적인 기여를 하기 위해서는 학생들이 덧·뺄셈을 이해하는 방식에 대한 심층적인 조사 연구와 현실적인 지도 방안에 관한 보다 구체적인 연구가 이루어져야 하나 이는 후속연구의 과제로 남겨두기로 한다.

첫째, 유리수 범위의 수 연산에서는 공통단위의 필요성을 충분히 경험하도록 한 후 알고리즘화를 시도하는 것이 필요하다.

교과서에서는 분수와 소수의 덧·뺄셈을 다루는 경우 도입부분에서만 그림이나 간단한 질문을 통해 공통단위의 필요성을 드러내고 바로 통분에 의한 분수 계산, 소수점을 기준으로 정

렬한 세로셈 소수 계산방법을 형식화한다. 공통단위와 관련된 내용이 도입부에서만 매우 요약된 형태로 제시되므로 학생들이 측정의 관점에서 공통단위의 필요성을 충분히 경험하기 보다는 곧바로 제시되는 알고리즘을 습득하여 숙달하는데 집중하게 된다. 이 과정에서 학생들은 유리수 범위의 자연수, 분수, 소수 등의 덧·뺄셈의 계산 방법을 개별적으로 적용해야 하는 것으로 이해하기 쉽다.

하지만 II장에서 살펴본 바에 같이 자연수, 분수, 소수 등의 덧·뺄셈 계산 방식은 그 외양이 서로 다르나 그 본질은 모두 공통단위를 파악하고 합과 차에 포함된 공통단위의 개수를 파악하는 것 이상의 어떤 것도 포함하지 않음을 알 수 있다. 따라서 덧·뺄셈 연산의 통합적 이해를 위해서는 보다 정확한 측정을 위한 과정에서 공통단위의 필요성을 인식하고 이를 찾는 과정이 통분이나 세로셈으로 형식화해가는 것으로 이해하는 것이 필요하다.

둘째, 학교수학에서 무리수를 다룰 때에는 공통단위로 잴 수 없는 크기를 적극적으로 다루는 것이 필요하다.

역사적으로 무리수 발생의 개념적 근원은 공통단위로 잴 수 없는 두 양의 발견에 있으나 교과서에서는 이를 직접적으로 다루지 않는다. 즉, 분수로 표현할 수 없는 수 $\sqrt{2}$의 존재성을 대수적으로 증명하거나 제곱근을 소수로 수치화하는 과정에서 이 문제를 함축적으로 다루고 있어 학생들이 무리수를 공통단위로 잴 수 없는 두 양과 관련지어 이해하는 정도는 매우 낮다. 그리고 제곱근 덧·뺄셈은 다항식의 계산에서 동류항을 기반으로 설명하나 이를 공통단위의 관점에서 해석하는 것은 학생 스스로 연결시켜야 하는 부분으로 남겨진다.

공통단위로 잴 수 없는 양의 존재를 이론적 측정의 단계에서 인식한다면 유리수로 표현할 수 없는 측정의 영역이 있다는 점을 알 수 있다. 이는 무리수 개념 발생의 핵심적 아이디어에 기반하여 유리수로부터 실수로의 개념적 확장을 경험하게 하는 것이다. 또한 이전의 산술 경험과 달라서 많은 학생들이 어려움을 겪는, 더 이상 간단히 할 수 없는 $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 등의 표현에서 두 수의 덧·뺄셈 결과를 하나의 수로 간단히 대치할 수 없는 이유를 공통단위의 관점에서 이해할 수 있다. 왜냐하면 유리수 범위의 덧·뺄셈은 공통단위를 기준으로 합과 차에 포함된 그 개수를 세는 것으로서 연산 결과를 하나의 수로 나타낼 수 있었던 것은 공통단위가 있었기 때문이다. 또 $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 등이 더 이상 간단히 될 수 없는 이유를 이해한다면 이를 과정인 동시에 대상으로 받아들이는 것이 좀 더 용이할 것으로 판단된다. 이는 대수 학습에서 필요한 조작적 관점에서 구조적 관점으로의 진전과도 밀접한 관계가 있다.

참고문헌

강홍규(2003). **Dewey의 경험주의 수학 교육론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

교육인적자원부(2001a). **초등학교 수학 1-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001b). **초등학교 수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2001c). **초등학교 교사용지도서 수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002a). **초등학교 수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사.

김선영(2003). **분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 오류 유형 분석 및 효과적인 지도방안 연구**. 국

민대학교 교육대학원 석사학위논문.

김수원(2006). **구체물을 이용한 분수지도 효과에 관한 연구 : 패턴블록을 중심으로.** 단국대학교 석사학위논문.

박재우(2004). **측정 활동을 통한 분수 계산 알고리즘의 이해에 관한 연구.** 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

변희현(2005). **소수 개념의 교수학적 분석.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

서유미(2008). **구체적 조작활동을 통한 덧셈과 뺄셈의 오류 유형별 지도 방안 : 2학년을 중심으로.** 광주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

양성윤(2006). **소수 덧셈·뺄셈 오류 유형의 진단과 교정지도.** 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2003). **중학교 수학 9-가.** (주) 도서출판 디딤돌.

정주자(2002). 수학화 이론에 기초한 초등학교 저학년에서의 덧셈과 뺄셈 지도 방안. **靑藍數學敎育, 10,** 91-113.

최은실(2006). **소수의 덧셈과 뺄셈의 오류 분석을 통한 지도 방안 연구.** 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

최진숙 · 유현주(2006). 덧셈·뺄셈의 오류유형 분석 및 지도방안에 대한 연구 : 초등학교 3학년을 중심으로. **교과교육학연구, 10** (2), 303-327.

추은영(2003). **이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 오류와 원인 분석.** 춘천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Burton G. M., Kaplan J. D., Hopkins M. H., Kennedy L. Johnson H. C. & Schultz K. A. (1994a). *MATHEMATICS PLUS, Pupil's Edition, Grade 3.* NY: Harcourt Brace & Company.

Burton G. M., Kaplan J. D., Hopkins M. H., Kennedy L. Johnson H. C. & Schultz K. A. (1994b). *MATHEMATICS PLUS, Pupil's Edition, Grade 5.* NY: Harcourt Brace & Company.

Heath T. L. (1956a). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* volⅡ. NY: Dover Publications.

Heath T. L. (1956b). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* volⅢ. NY: Dover Publications.

Klein, F. (1924). *Elementary Mathematics from an advanced standpoint..* NY: Dover Publications

McLellan, J. A. & Dewey, J. (1901). *The Psychology of Number and its applications to methods oh teaching arithmetic.* NY: D. APPLETON AND COMPANY.

Moreno-Armella, L. E. & Waldeg, G. C. (2000). An Epistemological History of Number and Variation. In Katz, V. J. (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective.* Washington : Mathematical Association of America.

Toeplitz, O. (1963). *The Calculus: A Genetic Approach,* The University of Chicago Press.

Vergnaud, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* (pp.39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Coherent Understanding on Addition/Subtraction from the Viewpoint of Measuring

Byun, Hee Hyun (KICE)

Current school mathematics introduces addition/subtraction between natural numbers, fractions, decimal fractions, and square roots, step-by-step in order. It seems that, however, school mathematics focuses too much on learning the calculation method of addition/subtraction between each stages of numbers, to lead most of students to understand the coherent principle, lying in addition/subtraction algorithm between real numbers in all. This paper raises questions on this problematic approach of current school mathematics, in learning addition/ subtraction. This paper intends to clarify the fact that, if we recognize addition/subtraction between numbers from the viewpoint of 'measuring' and 'common measure', as Dewey did when he argued that the psychological origin of the concept of number was measuring, then we could find some common principles of addition/subtraction operation, beyond the superficial differences among algorithms of addition/subtraction between each stages of numbers. At the end, this paper suggests the necessity of improving the methods of learning addition/ subtraction in current school mathematics.

* **Key words** : measuring(측정), addition and subtraction(덧셈과 뺄셈), common measure(공통단위), commensurable(공통단위로 잴 수 있는), incommensurable(공통단위로 잴 수 없는)

논문접수: 2009. 4. 26
논문수정: 2009. 5. 18
심사완료: 2009. 5. 25