대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 2, 321-340. May 2009

초등학교 2, 3학년 학생들의 길이 추론 능력 실태 조사

방 정 숙* · 지 혜 은**

본 논문은 초등학교 저학년 학생들의 길이 추론 능력을 살펴보고자, 측정 상황의 4가지 문제유형(단위 길이 비교하기, 단위의 수세기, 단위 길이 예상하기, 길이 비교하기)으로 구성된 검사지를 이용하여 375명(2학년 185명, 3학년 190명) 학생들의 반응을 분석하였다. 연구결과 학생들은 '단위 길이 비교하기'와 '단위의 수세기' 유형에서는 높은 정답률을 보인 반면에, '단위 길이 예상하기'와 '길이 비교하기' 유형에서는 상대적으로 낮은 정답률을 보였다. 또한 정답 및 오답 유형별로 대표적인 학생들의 반응과 추론을 관련지어 면밀하게 분석한 결과, 문제 유형에 따라 학생들에게 예상되는 추론의 수준이 있음이 드러났다. 본 연구 결과는 학생들이 길이를 비교하거나 측정할 때 어떻게 추론하는지에 대한 경험적 근거를 제공한다.

Ⅰ. 시작하는 말

측정은 일상생활과 매우 밀접하다. 예를 들면, 키가 가장 큰 사람을 뽑는다거나, 어느 가방이 더 무거운지를 비교해 본다거나, 100m 달리기를 몇 초에 뛰는지를 알아보는 일 등은 모두 일상생활 중 측정에 관련된 활동이다. 또한 측정 영역은 학생들에게 양적 관계의 이해를 지원하고 수학적 구조를 탐구하는 기회를 제공한다는 점에서 수학 학습에서도 중요하다 (Dougherty & Venenciano, 2007).

한편, 학생들은 초등학교 입학 전에 이미 길이 개념 및 그와 관련된 어휘들을 상당히 알고 있다. 실제 길이는 대상의 속성 중 가장 쉽게 지각되는 것 중의 하나이며, 초등학교 저학년의 측정활동에서 개념적 토대를 이루는 것으로써 가장 강조되어야 할 필요성이 있다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). 또한, Piaget, Inhelder, Szeminska의 연구(Baroody & Coslick, 1998에서 인용)에서 어린 학생들의 보존 개념이 길이, 넓이, 무게 등의 순서로 발달된다는 점을 고려해 볼 때, 여러 가지 대상의 속성 중 길이가 가장 기초가 된다는 것을 알 수 있다.

초등수학에서 다루는 길이 측정은 '길이 비교'라는 맥락에서 비롯되는 경우가 많다(교육인적자원부, 2006a; 교육과학기술부, 2009a; Barrett, Jones, Thornton, & Dickson, 2003). 따라서 학생들이 직접 비교와 간접 비교 활동을 경험하면서 측정의 성질과 측정의 기초 과정을 이해하는 것이 무엇보다 중요하다. 그런데, NCTM (2000)은 학생들이 형식적인 의미에서 측정의 의미와 속성을 이해하기 전에 물체를 직접 비교하고 다양한 단위로 재어보는 활동이 필요하다고 주장한다. 또한 Stephan과 Clements (2003)

* 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr
** 서울한산초등학교, inne5@hanmail.net

는 학생들이 단위의 중요성 및 필요성을 충분히 인식하기 전에 자를 활용한 측정 활동을 강조하다보면 길이 측정의 개념적 이해가 저해될 수도 있다고 경고한다. 실제 길이의 속성과 단위에 대한 일반적인 이해를 가지고 있는 학생일지라도, 측정 단위의 역할에 대한 이해가 부족하며 절차적으로만 측정 도구나 세기 단위를 사용하고 공식을 적용하는 경향이 있다 (Clements & Battista, 1992). 이와 같은 측면에서 자와 같은 구체적인 측정 도구를 사용하는 활동에 앞서 길이를 비교하는 활동 및 단위 길이에 대한 이해를 강조하는 것이 측정 영역에서 가장 중요하다고 볼 수 있다.

그러나 측정에 관한 선행 연구를 살펴보면 측정 도구를 사용하여 정확하게 측정하는 능력이나 양에 대한 어림 능력에 관련된 연구가 대부분을 차지하고 있는 반면에, 단위 길이에 관한 개념적 이해나 단위 길이를 통한 측정 능력에 관련된 연구는 미흡하다. 또한 고학년 학생들을 대상으로 한 실태조사 결과를 보면, 전반적으로 측정 도구를 사용하여 길이, 무게 등을 정확하게 재어 보는 문제의 성공률은 매우 높은 반면, 측정에 관한 어림 능력이나 측정 감각은 상대적으로 낮았다(이은호, 2006). 이러한 결과의 주요 원인을 측정의 개념적 토대가 되는 단위 길이에 대한 이해 부족으로 유추해본다면, 저학년 학생들의 단위 길이에 대한 이해와 단위 길이를 통한 측정 능력이 어떠한지 살펴 볼 필요가 있다.

한편, NCTM(1989, 2000)에서는 측정과 관련된 추론 능력의 중요성을 강조하였는데, 실제로 학생들의 길이에 대한 추론의 정당화 및 전략에 관한 많은 연구들이 진행되어 왔다(예: Barrett & Clement, 2003; Battista, 2006, 2007; Grant & Kline, 2003). 그러나 그동안의 국내 관련 연구를 살펴보면 길이, 넓이, 부피, 들이 등을 중심으로 측정의 정확성 혹은 측정에 대한 어림 전략을 중심으로 분석하였을 뿐, 가장 기본적인 속성인 길이에 대하여 학생들의 추론 정도나 추론의 정당화 수준을 살펴보는 연구는 찾아보기 어렵다.

이와 같은 연구 배경을 바탕으로 본 연구에서는 초등학교 2, 3학년 학생들을 대상으로 길이 측정 중 비교하기 활동에 초점을 두고, 다양한 문제(단위 길이 비교하기, 단위의 수세기, 단위 길이 예상하기, 길이 비교하기)를 제시하여 저학년 학생들이 길이를 비교할 때 어떻게 추론하며 추론의 정당화 수준은 어떠한지 면밀히 살펴보았다.

II. 이론적 배경

1. 길이 측정의 주요 개념과 학생들의 전반적인 이해

측정의 정의는 학자들마다 강조점이 다르지만, 공통적으로는 '크기나 양, 정도를 결정하는 사고력'이라 볼 수 있다. 특히, Dougherty와 Venenciano(2007)는 알려진 크기의 물체로 비교하기, 범위·양·부피 측량하기, 특정 기준단위로 비교하여 판단하기라고 측정을 정의함으로써 비교하는 활동을 강조하고 있다.

측정 중 가장 기본적인 길이 측정은 보존성, 추이율, 단위의 이해가 선행되어야 가능한데, 이러한 요소를 제대로 이해하지 못하면 학생들이 측정 학습에서 어려움을 겪게 된다(Wilson & Rowland, 1993). 보다 최근에 Lehrer, Jaslow와 Curtis(2003)는 이를 보다 세분하여 길이 측정에서 기초가 되는 주요한 개념에 대하여 '같은 단위, 반복, 덮기, 분할, 가법성, 영점, 정밀도'를 제시하였다(<표 II-1> 참조). Stephan과 Clements

(2003)는 길이 측정의 온전한 이해를 위해서는 '단위반복, 추이, 보존, 거리의 축적, 수와 측정 사이의 관계'가 토대가 되어야 한다고 주장하였다. 여기서 '단위반복'은 Lehrer 외가 설명한 '같은 단위'와 '반복'에 동등한 개념이라고 볼 수 있다. '추이'는 양의 상관관계를 이해하는 것으로 'a<b, b<c이면 a<c이다 혹은 a=b, b=c이면 a=c이다'임을 이해하는 것이며, '보존'은 물체의 위치를 바꾸거나 변형하여 합성하더라도 양의 크기는 변하지 않는다는 불변성을 의미한다. 한편, '거리의 축적(accumulation of distance)'은 단위 반복의 결과로 첫 시작점에서 끝점까지의 거리를 나타낸다는 의미로 Lehrer 외의 '덮기' 개념과 연관 지을 수 있다. 마지막으로 '수와 측정 사이의 관계'(relation to number)는 분리되지 않게 연속하여 단위를 반복한 수를 세는 것으로 수와 관련이 있음을 설명하는 것이다. 이러한 일련의 연구들은 저학년 학생들의 측정 활동에서 길이 측정의 개념적 기초를 형성하기 위해 교사가 기본적으로 어디에 초점을 두어야 하는지에 대한 시사점을 제공한다.

학생들의 초기 측정 경험은 일반적으로 세는 것으로부터 발생하는데 구체적으로 단위를 반복한 횟수를 세는 것과 연관된다. 그러나 측정할 속성은 연속량이기 때문에, 이전에 경험한 이산적인 '단위 세기'와 연결하려 할 때 어려움을 겪을 수 있다. 예를 들어, 길이를 측정할 때 저학년 학생들은 단위의 간격을 세는 것이 아니라 단위 간격이 표시된 지점(hash marks)을 세는 경향이 있으며, 0의 값 혹은 원점을 어디에 두어야 하는지 분명히 이해하지 못하는 경우가 많다(Barret et al., 2003). 또한 학생들은 지각과 표현의 발달이 미흡하거나 단위에 대한 이해가 부족한 상태에서 수적 단서나 공식을 지나치게 사용함으로써 어려움을 겪기도 한다(Wilson & Rowland, 1993).

이와 같은 어려움에 반하여 그동안 연구자들은 효과적인 교수·학습 방향을 제시해 왔다. 예를 들어, Kamii(2006)는 학생들의 단위길이의 이해 부족에 초점을 두어 무엇보다 측정 학습에서의 경험적인 절차와 추론을 강조한다.

Grant와 Kline(2003)은 측정 과정의 이해를

<표 Ⅱ-1> 길이 측정에서 기초가 되는 주요 개념

	개념	설명	Stephan과 Clements(2003)
단위	같은 단위(identical unit)	단위는 크기가 같다.	단위반복(unit iteration)
	반복(iteration)	물체의 길이를 잴 때, 몇 번 들어가느냐를 결정하는 과정이다.	
	덮기(tiling)	단위는 공간을 덮는다.	거리의 축적 (accumulation of distance)
	분할(partition)	단위는 나뉠 수 있다.	·
	가법성(additivity)	측정은 가법적이어서 10단위는 예를 들어 8단위와 2단위의 합성으로 생각될 수 있다.	
눈금	영점(zero-point)	어떠한 점도 원점 혹은 0으로 간주될 수 있다.	·
	정밀도(precision)	측정 대상에 대해서 어떤 단위를 선택하느냐는 측정을 얼마나 정확하게 하느냐를 결정한다.	·

주요 학습 목표로 부각시키면서 구체적으로 적당한 단위길이의 선택, 단위길이의 크기와 단위길이의 수 사이의 관계 탐구, 단위길이와 '~쯤'과 같은 기호 및 용어 다루기에 대하여 언급하였다. 이와 같은 연구들은 기본적으로 학생들의 길이에 대한 이해의 실태를 바탕으로 적절한 방안을 탐색한 것이라고 볼 수 있다. 이와 같은 측면에서 본 연구를 통해 우리나라 학생들의 길이 비교 능력 및 이에 대한 추론 과정을 면밀히 분석함으로써, 효과적인 교수 학습 방향에 대한 시사점을 도출할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 길이에 대한 추론

NCTM(2000)에 따르면, 지식의 양이 많지 않은 어린 학생들도 취학 전 논리적 추론이 가능하며 추론에 활용되는 모든 요소들이 발달되지 않았다고 하더라도 수학적 결과를 발견하고 그 결과가 참임을 확신하는 자신만의 고유한 방식을 가지고 있다. 비록 초등학교 저학년 학생들이 추론 과정에서 직관에 의존하거나, 제한된 경험으로부터 일반화함으로써 옳지 못한 결과를 도출하기도 하더라도, 지각과 경험을 결합하여 자신들의 답을 정당화할 수 있다. 또한 경험으로 받아들인 사실을 바탕으로 단순한 연역 추론을 할 수 있고 자신의 관점으로부터 논리적 설명이 가능하여 결론에 도달할 수도 있다.

한편, 우리나라 교과서의 측정 영역에서도 학생들의 추론과 정당화를 강조하고 있다. 예를 들어, 수학 1-가 <6. 비교하기> 단원을 살펴보면, 길이, 높이, 들이, 무게, 넓이의 순서로 직관적 비교 및 직접 비교하기 활동을 한 뒤, '왜 그렇게 생각했습니까?'와 같은 질문을 통하여 학생들의 추론에 대해서 정당화를 할 수 있는 기회를 제공하고 있다(교육인적자원부, 2006a).

<표 II-2> Battista(2006)의 길이 추론에 대한 정당화 수준과 예

수준			예
비측정 추론	N0	전체적인 시각적 비교	-처음과 끝 시점에만 주목하여 길이를 판단하는 유형 -경험적인 추리에 의해 '구불하면 길다'라고 판단하는 유형
	N1-1	직접 비교를 위한 부분들의 재배열	-직접 그리거나 상상하여 구부러진 길이를 펼쳐보는 유형
	N1-2	부분들의 일대일 대응	-단위 길이를 하나씩 대응시켜 수를 비교하는 유형
	N2	성질에 기초한 (property-based) 변환에 의한 비교	- 길이는 움직여도 변하지 않는다는 성질에 기초하여 필요에 따라 선분을 밀거나 뒤집거나 돌린 후, 변환된 도형으로 길이를 비교하는 유형
측정 추론	M0	단위 길이 반복과 연계되지 않는 수의 사용	-단위 길이에 대한 개념이 뚜렷하지 않아 단위가 같은 크기라는 것을 이해하지 못하는 유형 -단위 길이의 크기와 상관없이 단지 불규칙하게 점을 찍으면서 점의 수를 세는 유형
	M1	부정확한 단위 길이 반복	-단위길이 사용시 틈이 없이 메우지 못하거나 겹치는 유형 -기준이 되는 단위의 수를 포함시키지 않는 유형
	M2	정확한 단위 길이 반복	- 단위의 길이를 이해하여 같은 크기의 단위를 정확하게 세어 길이를 측정하는 유형
	M3	단위 길이 반복에 대한 수치적·논리적 조작	- 일부 단위 길이를 계속해서 세는 대신에, 이전에 측정한 결과 값(단위 길이를 반복해서 구한 값)을 이용해서 수치적으로나 논리적으로 길이를 찾아내는 유형
	M4	길이 측정값에 대한 수치적·논리적 조작	- 단위 길이를 반복하지 않고, 길이의 측정값에 대해서 수치적으로나 논리적으로 조작하는 유형

Battista(2006)는 학생들이 어떻게 추론하여 측정하는지를 탐색하고 이를 토대로 추론에 대한 정당화 수준(levels of sophistication in students' reasoning about length)을 정립하였다. 크게 비측정 추론(Nonmeasurement reasoning)과 측정 추론(Measurement reasoning)으로 구분하고[1] 각각의 하위 수준을 세분화하였는데, 각 수준에 대한 이해를 돕기 위해 구체적인 추론의 예를 소개하였다. 이를 요약하여 정리하면 <표 Ⅱ-2>와 같다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구를 위해 서울특별시에 소재한 6개의 초등학교를 표집하였다. 이 학교들은 학생들의 학력 및 가정의 사회·경제적 수준이 중간 정도에 속하는 지역에 위치하였다. 6개교에서 2학년, 3학년 각 1개 반씩을 선정하여 전체 12개 반을 대상으로 하였다. 구체적으로 2학년 185명과 3학년 190명, 총 375명이 연구 대상이 되었다.

한편, 길이 측정에서 주요한 개념이 되는 '단위반복'의 학습 경험에 주목하여 2-가 5. 길이재기 단원을 학습한 2학년과 3-가. 5. 도형 움직이기 단원을 학습한 3학년 학생들을 대상으로 하였다. 그 이유는 본 연구에서 제시되는 지필 검사지의 유형이 대부분 '단위의 개념적 이해'에 토대를 두고 있고, 특히 3학년에게만 제시되는 7-1번, 7-2번 문제는 '위치 변환에 대한 보존'의 개념이 문제해결에 주요한 단서가 될 수 있기 때문이었다.

2. 연구 방법 및 검사도구

본 연구는 초등학교 2, 3학년 학생들의 길이 비교의 추론 능력에 대한 실태를 파악하는 것을 목적으로 지필 검사지를 통한 조사 연구 방법을 적용하였다. 검사지의 문항은 Battista(2006)가 개발한 길이 관련 11개의 과제를 바탕으로 하였는데, 그 연구에서는 1학년에서 5학년을 대상으로 하였기 때문에 본 연구를 위해 일단 저학년 수준에 적합한 7문제만을 선정하였다. 또한 필요한 경우, 이해를 돕기 위해 문제에 간단한 상황을 제시하거나(예를 들어, 도형을 제시하고 '둘레'라는 용어를 사용하는 대신에 개미가 길을 따라 가는 상황으로 수정함), 수치를 작게 구성하였다(예를 들어, 40대신에 4로 대치함).

한편, Battista(2006)의 연구는 문항별로 검사지를 구성한 것에 비해 본 연구에서는 문제의 특징에 따라 4개의 문제 유형으로 요목화하였다. 구체적으로 '단위 길이 비교하기' 유형(일정한 간격이 주어진 두 대상의 길이 비교하기), '단위의 수세기' 유형(주어진 대상의 길이를 단위 길이의 수로 나타내기), '단위 길이 예상하기' 유형(주어진 단위 길이를 보고 다른 길이 예측하기), '길이 비교하기' 유형(일정한 간격이 주어지지 않은 두 대상의 길이 비교하기)이다 (<표 III-1> 참조).

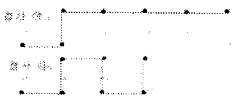
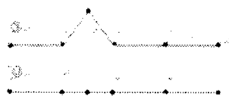
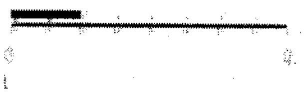
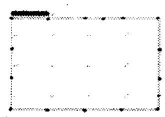
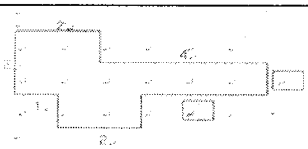
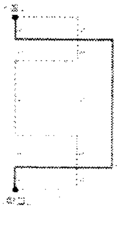
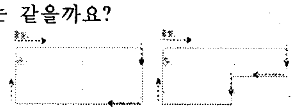
문항의 적합성 및 검사 실시에 대한 제반 정보를 얻기 위해 예비 검사를 실시한 결과, 2학

1) 비측정 추론은 수를 사용하지 않는 대신에 직접·간접 비교, 변환 상상하기, 도형의 성질에 기초하여 시각적-공간적으로 추론하는 것인 반면에, 측정 추론은 단위 길이의 반복을 통하여 추론하는 것이다. 학생들은 대개 측정 전략보다 비측정 전략을 먼저 사용하는 경향이 있지만, 측정 추론이 나타난 이후에도 비측정 추론은 계속해서 발달하게 된다. 이런 측면에서 길이에 관한 가장 세련된 추론은 비측정 추론과 측정 추론의 통합을 포함한다. 실제, 가장 높은 측정 추론의 4수준(M4)에 있는 학생들은 비측정 추론의 2수준(N2)의 과정을 완벽하게 통합하고 적용할 수 있어야 한다(Battista, 2006, 2007).

년 학생들의 7-1번 문제에 대한 정답률(0.5%)이 매우 낮았기 때문에[2] 2학년 학생들을 위한 검사 문항은 전체 6문항으로 구성하였다. 반면, 3학년의 경우는 정답률이 약 33%로 다른 문제에 비해 상대적으로 낮았으나, 학생들이 주어진 상황에서 길이를 어떻게 비교하는지, 특히 어떠한 어려움을 겪는지를 보다 세밀히 분석할 필요성이 있다고 판단되었다. 결과적으로, 3학년 학생들에게는 7-1 외에 비슷한 유형인 7-2 문항을 추가적으로 제시하였다.

한편, 길이 비교에 관한 학생들의 정당화 수준을 분석하기 위해 지필 검사지에 왜 그렇게 생각하는지에 대한 이유를 서술하게 하였다. 분석은 선행 연구를 참조하여 <표 II-2>를 바탕으로 하였으나, 예비 검사 결과 수정·보완할 필요성이 있었다. 즉, 학생들은 길이의 속성을 제

<표 III-1> 검사 문항

문제 유형	문항 번호 및 문제	
단위 길이 비교하기	1. 다음 두개의 철사를 곧은 선으로 만든다면, 더 긴 철사는 어느 것일까요? 그렇지 않다면, 두 개의 철사의 길이는 같을까요? (점 사이의 간격은 모두 같습니다.) 	2. 개미가 ㉮와 ㉯의 길을 각각 기어간다면, 길이가 더 긴 쪽은 어디일까요? 혹은 ㉮와 ㉯의 길이는 같을까요? 
단위의 수세기	3. ㉮에서 ㉯까지의 길을 덮으려면 막대기(▬)가 모두 몇 개 필요할까요? 	4. 아래의 사각형 둘레를 덮으려면, 막대기(▬)가 모두 몇 개 필요할까요? 
단위 길이 예상하기	5. 다음 □ 안에 들어갈 수는 얼마일까요? 	
길이 비교하기	6. 집에서 학교까지 가는 길 중 더 짧은 길은 점선과 실선 중 어느 길일까요? 	7-1 다음 개미가 길을 따라 갈 때 ㉮와 ㉯의 길이를 비교해 보세요. 어느 쪽이 더 길까요? 아니면 두 길의 길이는 같을까요?  7-2 ㉯와 ㉰도 비교해 보세요. 

2) 0.5%에 해당하는 2학년 학생들은 비교하는 두 대상의 선분 위를 동시에 손가락을 따라가는 활동을 통하여 두 대상의 둘레길이가 같음을 확인하였다. 그러나 일부 학생들은 우리 생활에서 큰 길과 골목길로 연관지어 ㉯의 꺾어진 부분이 지름길이라 생각하여 ㉯의 경우가 더 짧다고 결론지었다. 반면 다른 일부의 학생들은 넓이와 연관지어 ㉮의 둘레가 차지하는 면적이 더 크기 때문에 ㉮의 둘레도 더 길다고 생각하였다.

대로 이해하지 못하여 넓이의 속성과 혼동하고 있거나, 길이를 나타내는 '숫자'에만 초점을 두고 문제를 해결하기도 하였다. Battista(2006)가 제시한 추론의 정당화 수준에 비추어 보았을 때 길이와 넓이를 혼동하는 유형은 전체적인 시각적 판단에 따른 N0으로 판단되며, 길이를 나타내는 '숫자'에만 초점을 두는 유형은 단위 길이 반복과 연계되지 않는 수를 사용하는 M0로 보인다. 그러나 Battisa(2006)의 연구에서 이러한 예에 대한 구체적인 언급이 없었고, 우리나라 학생들을 대상으로 한 본 연구에서 새롭게 파악된 것으로 여겨져 <표 Ⅲ-2>와 같이 N0-1과 M0-1을 추가하였다.

3. 자료의 수집 및 분석

지필검사는 실험 대상 학교의 담임 교사의 도움으로 40분 동안 정규 수업시간에 실시하였다[3]. 수집된 검사지는 학생들의 길이 비교에 관한 추론 능력을 살펴보기 위해 면밀히 분석되었다. 이를 토대로 지필 검사지에 나타난 학생들의 응답을 <표 Ⅲ-3>과 같이 정답(a)과 오답(b, c, d)으로 구분하였고, 문항 및 학년별로 나타난 정답 및 오답에 대한 빈도와 백분율로 나타내었다. 문항 및 학년별로 나타난 추론의 정당화 수준은 빈도수로 나타내었으며 이러한 것을 바탕으로 학생들의 길이 비교 측정에 대한 이해 정도와 어려움을 파악하였다.

<표 Ⅲ-3> 문항별 응답 유형

문항	(a)	(b)	(c)	(d)
1	같다	가	나	기타 및 무응답
2	가	나	같다	기타 및 무응답
3	4	3	5	기타 및 무응답
4	14	13	15	기타 및 무응답
5	1,3	1,4	연산/ 규칙 관련	기타 및 무응답
6	실선	점선	같다	기타 및 무응답
7-1	같다	가	나	기타 및 무응답
7-2	같다	나	다	기타 및 무응답

또한, 학생들의 정당화 수준에 대한 결과를 알아보기 위해 연구자를 포함한 3인의 분석자를 선정하고 분석자간 일치도 통계를 산출하였다. 연구자를 제외한 분석자는 대학과 대학원에서 초등수학교육을 전공한 교육경력 4년과 5년의 여교사이다. 분석에 앞서 본 연구의 목적과 연구 문제를 설명하고 문항의 내용과 분석 기준을 알려주었고 상호 독립적으로 분석이 이루어졌다. 본 연구의 분석은 정당화 수준을 결정하는 것이므로, 신뢰도를 추정하는 방법으로 일치도 통계법을 적용하였다.(성태제, 2002).

<표 Ⅲ-2> 길이 추론에 대한 정당화 수준 분석의 추가사항

구분			예비 검사지에서 나타난 학생의 추론의 예
비측정 추론	N0-1	길이와 넓이의 혼동	-'길다, 넓다, 크다'의 속성에 대한 이해가 부족하여 '넓기 때문에 길다' 또는 '넓이가 작기 때문에 짧다'라고 생각하는 유형
측정 추론	M0-1	길이의 속성을 배재한 수의 조작	-문제에 제시된 수를 단순하게 비교하여 길이를 측정하는 값이 아닌 수들 사이의 규칙성을 찾거나 덧셈이나 곱셈으로 계산하는 유형

3) 검사 상황에서는 담임교사들이 학생들에게 측정도구(예, 자나 기타 길이를 측정할 수 있는 도구)의 사용에 대하여 별도의 언급을 하지 않았다. 다만, 학생들이 자발적으로 측정 도구를 사용하고자 할 때는 허용하였다. 사전에 측정도구에 대한 언급을 별도로 하지 않은 이유는 외부의 영향을 받지 않은 상태에서 학생들이 스스로 길이를 어떻게 비교하고 측정하는지를 파악하고자했기 때문이다.

SPSS/WIN 10.1을 사용하여 교차분석한 결과는 <표 Ⅲ-4>와 같다.

<표 Ⅲ-4> 정당화 수준에 대한 분석자간 일치도

	분석자 1	분석자 2
분석자 2	0.947	
분석자 3	0.902	0.933

<표 Ⅲ-4>에서 분석자 1과 분석자 2의 일치도는 0.947이며, 분석자 2와 분석자 3의 일치도는 0.933, 분석자 1과 분석자 3의 일치도는 0.902이다. 일반적으로 분석자간 일치도 통계가 .85이상일 때 높다고 할 수 있으므로(성태제, 2002) 본 연구의 신뢰도는 높다고 할 수 있다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 길이 비교에 대한 결과 분석

가. 학년별 · 문항별 정답률에 따른 분석

학생들의 길이 비교하기의 문제 수행 정도를 정답의 빈도수와 백분율로 나타내면 <표 Ⅳ-1>과 같다. 미비하지만 전반적으로 2학년에 비해 3학년 학생들의 정답률이 약간 높았다[4]. 정답률이 높은 순으로 나열해 보면, 2학년은 2번 > 3번 > 1번 > 4번 > 5번 > 6번이며 3학년은 2번 > 3번 > 1번 > 4번 > 5번 > 6번 > 7-1 > 7-2의 순이다. 즉, 1-6번 문항에서는 2, 3학년 학생들의 문항에 따른 정답률이 같은 양상으로 나타났다. 또한 문제 유형별로는 단위 길이 비교하기, 단위의 수세기, 단위 길이 예상하기, 길이 비교하기의 순으로 정답률이 높았다.

한편, 1번 문항과 2번 문항에서 2학년은 각각 70.8%, 88.1%, 3학년은 78.9%, 86.3%의 정답률을 보였다. 그러나 같은 유형의 비슷한 문제라는 측면에서 정답률의 차이에 주목할 필요가 있다. 이러한 차이의 원인을 생각해 보면 다음과 같다. 2번 문항은 두 대상의 시작과 끝의 위치가 같기 때문에 시각적으로 판단하여 쉽게 비교할 수 있지만, 1번 문항은 시작의 위치는 같으나 끝의 위치가 다르기 때문에 직관적인 판단보다는 단위 길이의 개념적 이해를 바탕으로 일대일로 대응하거나 펼쳐보는 과정이 필요

<표 Ⅳ-1> 학년별 정답률

문항 \ 학년		2 (N=185명)		3 (N=190명)	
		정답	오답	정답	오답
단위길이 비교하기	1	131(70.8)	54(29.2)	150(78.9)	40(21.1)
	2	163(88.1)	22(11.9)	164(86.3)	26(13.7)
단위의 수세기	3	155(83.8)	30(16.2)	159(83.7)	31(16.3)
	4	130(70.3)	55(29.7)	144(75.8)	46(24.2)
단위길이 예상하기	5	125(67.0)	60(33)	134(70.5)	56(29.5)
길이비교 하기	6	108(58.4)	77(41.6)	112(58.8)	78(41.2)
	7-1	·	·	58(30.5)	132(69.5)
	7-2	·	·	37(19.5)	153(71.7)
전체		811(73.1)	299(26.9)	958(63.0)	562(37.0)

* ( )안의 수는 %를 나타냄

4) 3학년 학생들의 정답률이 2학년 학생에 비해 큰 차이를 보이지 않는 원인은 본 연구에서 다루는 검사 문항이 단위길이에 대한 측정 감각에 초점을 이루고 있는 반면, 3학년의 길이 학습내용은 cm, km, mm의 길이 단위의 환산을 중점적으로 다루기 때문에, 본 연구의 문항을 해결하는 데 직접적으로 영향을 끼치지 않은 것으로 보인다.

하기 때문인 것으로 유추된다.

단위의 수세기 유형인 3, 4번 문제에서도 2학년은 각각 83.8%, 70.3%, 3학년은 83.7%, 75.8%의 정답률을 보여 동일한 유형간 차이가 드러났다. 이러한 차이는 여러 가지 측면에서 해석될 수 있다. 첫째, 3번 문항은 수학 2-가, 5. 길이재기 단원에서 다루어지는 문제인데 반해(교육인적자원부, 2006b, pp.76-77), 4번 문항은 해당 교과서에서 직접적으로 다루지 않은 유형이기 때문이다. 특히, 2학년에서 사각형과 같은 도형을 다루기는 하지만, 측정 영역에서 단위의 수 세기 유형의 경우는 선분으로만 한정되어 있다는 것과 연결하여 생각해 볼 수 있다. 둘째, 문제에서 제시되는 단위 간격에 주목하여 살펴 볼 필요가 있다. 3번 문항은 모두 일정한 간격으로 점들이 표시되어 있는 반면, 4번 문항은 일정하지 않은 간격을 이루는 점들이 있다. 학생들은 일정한 점 사이의 간격으로서 '단위'의 수를 세는 것이 아니라, 점의 수만을 세어 답을 구할 수도 있기 때문이다.

길이 비교하기 유형의 문제인 6번 문항, 7-1번 문항, 7-2번 문항의 정답률은 모두 60% 미만이다. 구체적으로 살펴보면, 6번 문항의 정답률은 2학년 58.4%, 3학년 58.8%이며, 7-1번과 7-2번 문항의 정답률은 각각 30.5%와 19.5%로 매우 낮다. 이러한 결과를 보이는 이유는 우선, 다른 문제와는 달리 3문항 모두 단위 길이의 간격이 전혀 주어지지 않았기 때문이다. 또한 이 문제를 해결하기 위해서는 길이 비교를 위한 자신의 전략이 있거나, 적절한 단위길이를 선택하여 단위 반복 및 보존의 개념을 종합적으로 이해할 수 있는 사고력을 요구하기 때문인 것으로 생각해 볼 수 있다.

나. 문항별 오답 유형 분석

문항별 오답 유형 분석은 오답률이 20%이상 되는 문항에 대해 학생들이 어려움을 겪는 이유가 무엇인지 면밀하게 살펴보았다. 이에 해당되는 문항은 1번, 4번, 5번, 6번, 7-1번, 7-2번인데, 오답 유형별 빈도수 및 백분율은 <표 Ⅳ-2>와 같다.

1번 문항의 오답 유형 중 빈도가 가장 높은 것은 '㉮가 더 길다'고 답한 경우였다. 구체적으로 살펴보면, 2학년 중 36명(19.5%), 3학년 중 28명(14.8%)은 시작과 끝점에만 주목하여, 길게 늘어져 끝점이 더 멀리 있는 ㉮가 더 길다고 판단하였다. 한편, '㉯가 더 길다'고 답한 학생은 2학년 13명(7%), 3학년 8명(4.2%)으로 소수에 해당하였는데, 이 학생들은 대개 '꺾여있으면 더 길다'고 생각하였다. 이는 '길이 비교하기' 학습에서 구불구불한 것이 실제로는 길었던 반례를 많이 접하였기 때문인 것으로 유추된다.

4번 문제의 오답 유형 중 가장 많은 빈도수

<표 Ⅳ-2> 문항별 오답 유형에 따른 빈도수 및 백분율

문항 / 학년 / 오답유형	1번 문항		4번 문항		5번 문항		6번 문항		7-1번 문항	7-2번 문항
	2학년	3학년	2학년	3학년	2학년	3학년	2학년	3학년	3학년	3학년
(b)	36(19.5)	28(14.8)	29(15.7)	27(14.2)	11(5.9)	6(3.2)	55(29.7)	64(33.8)	59(31.1)	41(21.5)
(c)	13(7.0)	8(4.2)	8(4.3)	1(0.5)	35(19.5)	29(15.3)	4(2.1)	3(1.6)	64(33.7)	99(52.1)
(d)	5(2.7)	4(2.1)	18(9.7)	18(9.5)	14(7.6)	21(11.1)	18(9.7)	11(5.8)	9(4.9)	13(6.8)
계	54(29.2)	40(21.1)	55(29.7)	46(24.2)	60(33)	56(29.5)	77(41.6)	78(41.2)	132(69.5)	153(71.7)

*( )안의 수는 %를 나타냄

를 보인 것은 주어진 단위의 수를 제외한 '13개가 필요하다'라고 답한 경우이다. 2학년 29명(15.7%), 3학년 27명(14.2%)의 학생들이 여기에 해당되었다. 이러한 결과는 단위 길이와 측정할 대상을 함께 제시하는 경우, 학생들이 주어진 단위 길이에 해당되는 부분은 배제한 채 나머지만 세는 경우가 많음을 드러낸다.

5번 문항은 학생들의 응답이 가장 분산되어 있는 문제였다. 학생들은 1과 4, 2와 4, 2와 2, 6과 3 등 다양하게 답했지만, 결과 분석을 효율적으로 하고자 3가지의 오답 유형으로 범주화하였다. 오답 유형 (b)는 구하려는 빈칸의 길이가 가장 짧은 길이라고 판단하여 '1'이라는 값은 쉽게 구하였으나, 다른 빈칸의 값은 제시된 도형의 변의 길이(1, 2, 4) 중 가장 큰 '4'를 택한 경우이다. 유형 (c)는 제시된 수에만 주목하는 것을 넘어서서 적절히 계산하거나 규칙성을 찾은 경우이다. 예를 들면, 일부 학생들은 세로 길이에 주목하여 2+1=3, 가로 길이에 주목하여 2+4=6이기 때문에 3, 6이라고 답하거나 또는 2×1=2, 2×4=8이기 때문에 2, 8이라고 응답하였다. 또한, 2→4→6과 같이 2칸씩 뛰어 세고 1→2→3과 같이 1칸씩 세는 규칙을 찾아 6, 3이라고 응답하기도 하였다. 유형 (d)는 다른 문항과 일관성을 유지하기 위해 기타 및 무응답으로 정하였다. 오답 유형 중 가장 빈번한 것은 유형 (c)로 2학년 35명(19.5%), 3학년 29명(15.3%)이 해당되었다. 즉, 학생들은 주어진 길이의 상대적인 차이에 주목하지 않고 문제에서 제시된 수를 대상으로 의미 없는 덧셈 혹은 곱셈을 수행하거나, 길이에 상관없이 배열된 수 자체에서 규칙성을 찾는 경향이 있었다.

6번 문제의 오답 유형 중 가장 많은 빈도수를 보인 것은 (b)유형이었는데, 2학년 55명(29.7%), 3학년 64명(33.8%)이 해당되었다. 이들 대부분의 학생들은 적절한 단위 길이를 선택하여 합리적으로 비교하기보다는 경험에 의존하여 잘못 추론한 경우가 많았다. 예를 들어, 학교와 집까지 걸어서 통학한 경험에 비추어, '길게 뻗어있는 길을 가는 것 보다 골목으로 다녀보니 더 빨리 도착한다'거나 '짧게 여러 번 가는 것이 더 빨리 가는 것'이라고 응답하였다.

7-1번과 7-2번의 오답 유형은 다른 문항에 비해 유형 (b)와 (c)의 빈도가 상대적으로 매우 높게 나타났다. 구체적으로, 7-1번의 경우 유형 (b)와 (c)의 빈도는 각각 59명(31.1%), 64명(33.7%), 7-2번의 경우 각각 41명(21.5%), 99명(52.1%)이었다. 주목할 것은 비슷한 유형의 문제였음에도 불구하고 7-2번에서 (b)와 (c)의 응답 유형이 현저한 차이를 드러내고 있다는 점이다. 학생들은 7-1번에서 '꺾어진 부분이 있어서 (나)가 더 길다'라고 생각한 경우도 있었고, '넓이가 넓어서 (가)가 더 길다'라고 생각한 경우도 있었는데, 빈도는 비슷했다. 그러나 7-2번에서는 '(다)가 더 길다'라고 생각한 경우가 2배 이상 많았다.

2. 길이 비교에 대한 추론의 정당화 수준 분석

가. 학년별 · 문항별 추론의 정당화 수준 분석

학생들의 길이 비교하기에 대한 추론의 정당화 수준의 빈도수는 각각 <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>와 같다. 각 문항별 정당화 수준의 최대 반응수가 나타나는 수준을 문항별로 차례로 나열해 보면, 2학년의 경우 N1-2(61명), N1-1(97명), M2(155명), M2(127명), M3(66명), N0(132명)이고 3학년은 N1-2(52명), N1-1(86명), M2(156명), M2(145명), M3(69명), N0(97명), N0(64명),

N0(83명)이다. 학생 수에 약간의 차이는 있지만, 2학년과 3학년의 문항에 따른 추론의 정당화 수준은 동일한 양상을 보인다.

또한 문제 유형별 학생들이 선호하는 추론의 수준도 동일하였다. 단위비교하기 유형에서는 N1-1과 N1-2수준, 단위의 수세기 유형에서는 M2, 단위 길이 예상하기에서는 M3, 길이비교하기에서는 N0이었다.

나. 응답 유형별 추론의 정당화 수준 분석

정답과 오답에 따라 학생들이 가장 많은 빈도수를 보이는 추론의 정당화 수준이 무엇인지 알아보고, 특히, 학생들이 어려움을 겪었던 문항에 관하여 오답 유형에서 나타나는 정당화 수준을 면밀히 분석하였다. 학생들의 응답 유형별 추론의 정당화 수준의 분포는 편의상 문

<표 Ⅳ-3> 2학년 학생들의 문항별 추론의 정당화 수준 빈도수

문제유형 / 정당화 수준	단위 길이 비교하기		단위의 수 세기		단위길이 예상하기	길이 비교하기	합계
	1번	2번	3번	4번	5번	6번	
N0	50	63	2	0	0	132	247
N0-1	0	0	0	0	0	0	0
N1-1	32	97	0	0	0	29	158
N1-2	61	1	0	0	0	0	62
N2	5	1	0	0	0	2	8
M0	31	8	4	22	27	4	96
M0-1	0	0	0	0	41	0	41
M1	1	4	22	36	6	9	78
M2	5	6	155	127	40	9	342
M3	0	2	0	0	66	0	68
M4	0	0	0	0	5	0	5
합계	185	182(3)	183(2)	185	185	185	1105(5)

* 음영부분은 각 문항별 정당화 수준의 최대 반응수를 표시한 것이다.
** ( )안에 수는 무응답 학생의 수이다.

<표 Ⅳ-4> 3학년 학생들의 문항별 추론의 정당화 수준 빈도수

문제유형 / 정당화 수준	단위 길이 비교하기		단위의 수 세기		단위길이 예상하기	길이 비교하기			합계
	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7-1번	7-2번	
N0	26	37	0	0	0	97	64	83	307
N0-1	0	0	0	0	0	2	37	28	67
N1-1	36	86	0	0	0	33	16	11	182
N1-2	52	19	0	0	0	1	0	0	72
N2	5	5	0	0	0	4	39	33	86
M0	28	11	2	6	23	11	5	3	89
M0-1	0	0	0	0	24	0	0	0	24
M1	1	5	20	30	7	8	10	14	95
M2	39	16	156	145	38	20	7	4	425
M3	1	5	3	1	69	2	3	1	85
M4	0	0	0	0	15	1	0	0	16
합계	188(2)	184(6)	181(9)	182(8)	176(14)	179(11)	181(9)	177(13)	1448(72)

제 유형별로 나누어 살펴보았다.

단위길이 비교하기 유형에서 응답 유형별 정당화 수준의 빈도수는 <표 Ⅳ-5>와 같다. 정답에서 가장 높은 빈도수를 보인 수준은 1번 문항에서는 N1-2(2학년 59명, 3학년 51명), 2번 문항에서는 N1-1(2학년 95명, 3학년 82명)이었다.

여기에 해당하는 학생들은 문항의 ㉮와 ㉯에 나타난 단위길이를 일대일로 대응시켜보거나 길이의 일부를 펼쳐 생각하여 추론하였다. 오답의 경우 1번 문항에서는 학생들은 직관으로 길이를 판단하는 N0(2학년 31명, 3학년 21명) 수준에 해당하거나, 2번 문항에서는 단위가 같은 크기라는 것을 이해하지 못하는 M0(2학년 6명, 3학년 7명)수준에 해당하였다. 한편, 여기서 주목해야 할 점은 1번 문항 정답에서 나타난 M0와 M2의 반응 빈도수이다. 먼저 2, 3학년의 M0의 빈도수는 각각 28명, 26명으로 비교적 높은 빈도수에 해당한다. 이 학생들의 반응은 정

<표 Ⅳ-5> 단위 길이 비교하기 유형 문제의 응답 유형별 추론의 정당화 수준

문항	응답유형 / 수준	2학년 정답 (a)	2학년 오답 (b)	2학년 오답 (c)	2학년 오답 (d)	2학년 오답 합계	3학년 정답 (a)	3학년 오답 (b)	3학년 오답 (c)	3학년 오답 (d)	3학년 오답 합계
1번 문항	N0	19	19	7	5	31	5	16	3	2	21
	N0-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1-1	18	11	3	0	14	23	10	3	0	13
	N1-2	59	2	0	0	2	51	0	1	0	1
	N2	3	2	0	0	2	5	0	0	0	0
	M0	28	0	3	0	3	26	2	0	0	2
	M0-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M1	0	2	0	0	2	0	0	1	0	1
	M2	4	0	0	0	0	39	0	0	0	0
	M3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	합계	131	36	13	5	54	150	28	8	2(2)	38(2)
2번 문항	N0	57	3	3	0	6	33	4	0	0	4
	N0-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	N1-1	95	0	2	0	2	82	1	3	0	4
	N1-2	1	0	0	0	0	19	0	0	0	0
	N2	1	0	0	0	0	4	1	0	0	1
	M0	2	3	3	0	6	4	0	7	0	7
	M0-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M1	0	0	4	0	4	2	0	3	0	3
	M2	5	0	1	0	1	15	0	1	0	1
	M3	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0
	M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	합계	163	6	13	0(3)	19(3)	164	6	14	0(6)	20(6)

* 문항별로 정답과 오답의 가장 높은 빈도수를 각각 음영으로 표시하였다.

답으로 분류는 되었으나 단위 길이에 주목하기 보다는 비교할 선분에 제시된 점만 세어 ㉮와 ㉯의 점의 수가 같기 때문에 길이도 같다고 생각하였다. 반면에, 2, 3학년의 M2의 빈도수는 각각 4명, 39명으로 차이가 드러난다. 즉, 상대적으로 많은 3학년 학생들이 단순히 점의 수에 의존하지 않고 단위길이의 반복을 통해서 길이를 비교할 수 있음을 반영한다.

단위의 수세기 유형에서 나타난 추론의 정당화 수준의 빈도수는 <표 Ⅳ-6>과 같다. 정답에서 높은 빈도수를 보인 수준은 2, 3학년 모두 M2이다. 3번 문항에서 2, 3학년의 M2의 빈도수는 각각 155명, 156명이고 4번 문항에서는 127명, 143명이다. 즉, 대다수의 학생들은 측정하는 대상에 단위 길이(본 문항에서는 막대기)가 주어졌을 때, 정확하게 단위 길이를 반복하여 사용할 수 있었다.

한편, 오답에서 가장 높은 빈도수를 보인 수준은 2, 3학년 모두 M1수준이다. 3번 문항에서 2, 3학년의 빈도수는 각각 22명, 20명이며 4번 문항에서는 각각 33명, 30명이었다. 특히 M1 수준에서의 (b) 유형의 학생에 주목할 필요가 있다. 3학년의 경우 3, 4번 문항에서 19명의 학생들이 M1의 (b)에 해당하는데 이들은 단위 길이를 기본적으로 이해하고 있음에도 불구하고 단위의 수를 세는 과정에서 일관된 오류를 범하였다. 대상(본 문항에서는 길 또는 둘레)을 덮을 때 단위 길이가 제시된 부분은 세지 않고,

<표 Ⅳ-6> 단위의 수 세기 유형 문제의 응답 유형별 추론의 정당화 수준

2학년							3학년						
문항	응답유형 / 수준	정답 (a)	오답 (b)	오답 (c)	오답 (d)	오답 합계	문항	응답유형 / 수준	정답 (a)	오답 (b)	오답 (c)	오답 (d)	오답 합계
3번 문항	N0	0	2	0	0	2	3번 문항	N0	0	0	0	0	0
	N0-1	0	0	0	0	0		N0-1	0	0	0	0	0
	N1-1	0	0	0	0	0		N1-1	0	0	0	0	0
	N1-2	0	0	0	0	0		N1-2	0	0	0	0	0
	N2	0	0	0	0	0		N2	0	0	0	0	0
	M0	0	0	1	3	4		M0	0	2	0	0	2
	M0-1	0	0	0	0	0		M0-1	0	0	0	0	0
	M1	0	19	0	3	22		M1	0	19	1	0	20
	M2	155	0	0	0	0		M2	156	0	0	0	0
	M3	0	0	0	0	0		M3	3	0	0	0	0
	M4	0	0	0	0	0		M4	0	0	0	0	0
	합계	155	21	1	6(2)	28(2)		합계	159	21	1(2)	0(7)	22(9)
4번 문항	N0	0	0	0	0	0	4번 문항	N0	0	0	0	0	0
	N0-1	0	0	0	0	0		N0-1	0	0	0	0	0
	N1-1	0	0	0	0	0		N1-1	0	0	0	0	0
	N1-2	0	0	0	0	0		N1-2	0	0	0	0	0
	N2	0	0	0	0	0		N2	0	0	0	0	0
	M0	0	11	1	10	22		M0	0	6	0	0	6
	M0-1	0	0	0	0	0		M0-1	0	0	0	0	0
	M1	3	18	7	8	33		M1	0	19	1	10	30
	M2	127	0	0	0	0		M2	143	2	0	0	2
	M3	0	0	0	0	0		M3	1	0	0	0	0
	M4	0	0	0	0	0		M4	0	0	0	0	1
	합계	130	29	8	18	55		합계	144	27	1	10(8)	38(8)

나머지 부분만을 덮어서 단위 길이가 몇 번 들어갔는지 생각하여 '3개'라고 답한 학생은 4번 문항에서도 동일한 이유로 '13'개라고 응답하였다. 이와 같은 경향은 2학년의 경우에도 매우 비슷하게 반복되었다.

단위길이 예상하기 유형에 대한 정당화 수준의 빈도수는 <표 Ⅳ-7>과 같다. 학생들의 정당화의 수준은 다른 문제 유형과 달리 측정 추론에 집중되어 있었다. 정답의 경우 2학년의 정당화 수준은 M3(59명), M2(40명), M0(13명)이고, 3학년은 M3(68명), M2(37명), M0(12명)으로 학년간 동일한 양상을 보인다. 다른 문항과 달리 학생들의 정당화가 측정 추론에 집중되어 있는 이유는 문항에 수가 제시되어 있기 때문에 학생들이 이 수를 자연스럽게 사용했기 때문인 것으로 유추된다.

한편, 오답에서 빈번하게 사용되는 추론에 주목할 필요가 있는데 2학년과 3학년 모두 M0-1수준으로 해당 학생은 각각 36명, 21명이었다. 이 학생들은 길이라는 속성보다 제시된 '수'에 초점을 두어 의미 없는 계산이나 규칙성을 찾는 오류를 보였다.

길이 비교하기 유형에 대한 정당화 수준의 빈도수는 <표 Ⅳ-8>과 같다. 6번 문항의 경우 정답과 오답에서 학생들이 가장 빈번하게 사용하는 수준은 N0이었다. 정답의 경우, 2학년 74명, 3학년 67명은 예를 들어 '처음(시작점)과 끝(끝점)이 같기 때문에 더 많이 구불한 점선의 길이가 더 길다'라고 시각적으로 판단하였다. 여기서, 시작점과 끝점이 같기 때문에 더 많이 꺾인 점선의 길이가 길다고 판단한 것은 본 문제 상황에서는 옳으나, 모든 상황에서 항상 옳지는 않다는 점에 주목할 필요가 있다(예를 들어, 7-1문항과 7-2문항). 한편, 동일한 N0 수준에 의해 오답도 많이 나타났는데, 대표적으로 (b) 유형에서 2학년 37명, 3학년 30명이 이에 해당되었다. 이 학생들은 예를 들어, 통학 시 골목길처럼 짧게 여러 번 꺾인 길을 가 본 경험에 비추어 직관적으로 '점선이 더 짧다'라는 잘못된 추론을 하였다.

7-1번과 7-2번 문항에서 정답의 빈도수가 가장 많은 것은 N2이다. 정답에 해당하는 학생들

<표 Ⅳ-7> 단위 길이 예상하기 문제의 응답 유형별 추론의 정당화 수준

2학년							3학년						
문항 \ 수준 \ 응답유형		정답	오답				문항 \ 수준 \ 응답유형		정답	오답			
		(a)	(b)	(c)	(d)	합계			(a)	(b)	(c)	(d)	합계
5번 문항	N0	0	0	0	0	0	5번 문항	N0	0	0	0	0	0
	N0-1	0	0	0	0	0		N0-1	0	0	0	0	0
	N1-1	0	0	0	0	0		N1-1	0	0	0	0	0
	N1-2	0	0	0	0	0		N1-2	0	0	0	0	0
	N2	0	0	0	0	0		N2	0	0	0	0	0
	M0	13	4	8	2	14		M0	12	2	3	6	11
	M0-1	5	2	23	11	36		M0-1	3	1	19	1	21
	M1	3	2	0	1	3		M1	0	2	5	0	7
	M2	40	0	0	0	0		M2	37	0	1	0	1
	M3	59	3	4	0	7		M3	68	0	1	0	1
	M4	5	0	0	0	0		M4	14	1	0	0	1
	합계	125	11	35	14	60		합계	134	6	29	7(14)	42(14)

이(7-1 문항에서 39명, 7-2 문항에서 29명) 주어진 도형의 변의 일부분을 이동시키거나 대응해 보는 변환을 통하여 대상의 둘레가 같음을 확인하였다[5]([그림 Ⅳ-1]의 (a) 참조). 한편, 오답에서 가장 높은 빈도수를 보인 것은 7-1번과 7-2번 문항 모두 N0 수준이었다. 7-1과 7-2번에서 학생들의 선호하는 추론 수준이 동일한 양상을 보이지만, N0-1 수준에서 나타나는 차이

<표 Ⅳ-8> 길이 비교하기 유형 문제의 응답 유형별 추론의 정당화 수준

2학년							3학년						
문제	수준 \ 응답유형	정답	오답				문제유형	수준 \ 응답유형	정답	오답			
		(a)	(b)	(c)	(d)	합계			(a)	(b)	(c)	(d)	합계
6번 문항	N0	74	37	3	18	58	6번 문항	N0	67	30	0	0	30
	N0-1	0	0	0	0	0		N0-1	1	1	0	0	1
	N1-1	19	9	1	0	10		N1-1	18	13	2	0	15
	N1-2	0	0	0	0	0		N1-2	0	0	1	0	1
	N2	2	0	0	0	0		N2	2	2	0	0	2
	M0	2	2	0	0	2		M0	6	5	0	0	5
	M0-1	0	0	0	0	0		M0-1	0	0	0	0	0
	M1	3	6	0	0	6		M1	0	8	0	0	8
	M2	8	1	0	0	1		M2	17	3	0	0	3
	M3	0	0	0	0	0		M3	1	1	0	0	1
	M4	0	0	0	0	0		M4	0	1	0	0	1
	합계	108	55	4	18	77		합계	112	64	3	0(11)	67(11)
7-1 문항*	N0	6	15	43	0	58	7-2번 문항*	N0	2	12	69	0	81
	N0-1	0	37	0	0	37		N0-1	0	18	10	0	28
	N1-1	3	1	12	0	13		N1-1	2	6	3	0	9
	N1-2	0	0	0	0	0		N1-2	0	0	0	0	0
	N2	39	0	0	0	0		N2	29	1	3	0	4
	M0	0	2	3	0	5		M0	0	3	0	0	3
	M0-1	0	0	0	0	0		M0-1	0	0	0	0	0
	M1	1	3	6	0	9		M1	0	1	13	0	14
	M2	7	0	0	0	0		M2	4	0	0	0	0
	M3	2	1	0	0	1		M3	0	0	1	0	1
	M4	0	0	0	0	0		M4	0	0	0	0	0
	합계	58	59	64	0(9)	123(9)		합계	37	41	99	0(13)	140(13)

* 7-1과 7-2 문항 분석은 3학년 학생들을 대상으로 함.

5) 이러한 결과는 수학 3-가 5. '도형 움직이기' 단원을 학습한 학생들이 필요에 따라 도형의 일부를 이동시켜 추론할 수 있음을 드러냈다고 볼 수 있다(교육인적자원부, 2006c).

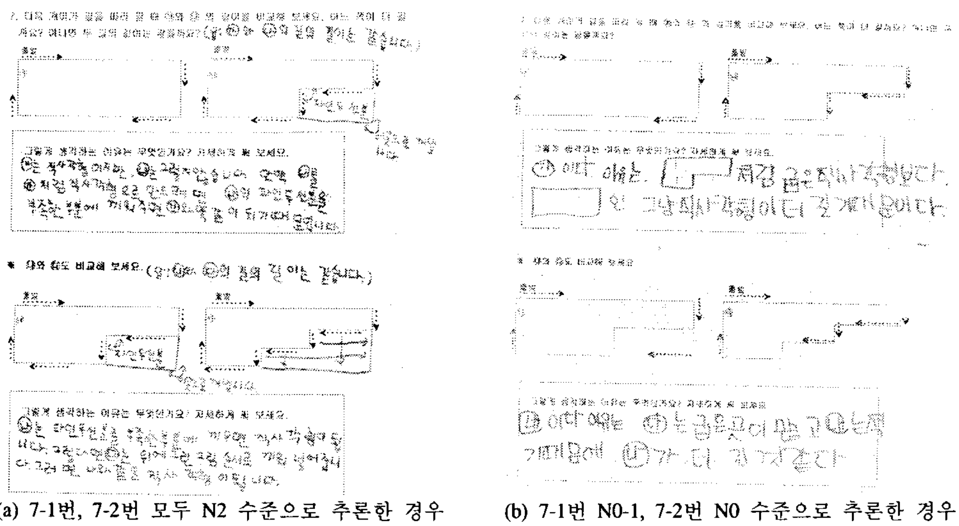
에 주목할 필요가 있다. 7-1번 문항에서 둘레를 비교하는 대신 넓이를 비교한 N0-1수준에 해당하는 37명은 모두 '㉮가 ㉯에 비해 더 넓고 따라서 더 길다'라고 반응한 반면, 7-2번 문항에서는 N0-1 수준에 해당하는 28명의 학생 중 18명은 '㉯의 넓이가 더 넓기 때문에 길이도 더 길다'라고 하였고 10명은 '㉰의 넓이가 넓기 때문에 ㉰의 길이가 더 길다'라고 응답하였다. 즉, 학생들은 7-1번 문항에 비해 7-2번 문항에서 넓이를 직관적으로 판단하기 어려웠기 때문에 (b)와 (c) 유형으로 나누어 응답하였음을 알 수 있다.

반면, [그림 IV-1]의 (b)와 같이 7-1번 문항에서 '㉮의 넓이가 ㉯에 비해 크다'라는 판단으로 길이와 넓이 속성을 혼동하였던 학생들이(N0-1 수준) 7-2번 문항에서는 일관되게 ㉯와 ㉰의 넓이를 비교하지 않고 '꺾어진 부분이 많아서 ㉰가 더 길다'라는 시각적 판단에 의존하기도 하였다(N0수준). 이러한 측면에서 저학년 학생들은 길이와 넓이를 혼동하기도 하지만, 문항에 따라(7-1번에서는 넓이, 7-2번에서는 길이) 직관적으로 비교하기 쉬운 속성에 주목하는 경향이 있다고 판단된다.

Ⅴ. 논의

본 연구는 초등학교 2, 3학년 학생들을 대상으로 길이를 비교하는 문제에서 학생들의 반응과 추론을 통하여 저학년 학생들의 추론에 대한 정당화 수준을 살펴보고자 하였다. 분석 결과를 통해 길이 비교하기와 관련된 교수·학습에 대한 몇 가지 시사점을 탐색하고자 한다.

첫째, 길이 비교 문제의 수행 정도는 단위길이 비교하기, 단위의 수세기, 단위길이 예상하기, 길이 비교하기 순으로 정답률이 높았다. 이는 학생들이 단위 길이가 주어졌을 때 보다 단위 길이가 주어지지 않는 길이 비교하기 문제 유형을 더 어려워한다는 사실을 드러낸다. 또한 이러한 결과는 특히 길이를 비교하는 상황에서 단위길이를 적절하게 선택하는 능력이 부족하다는 점을 드러낸다.



(a) 7-1번, 7-2번 모두 N2 수준으로 추론한 경우 (b) 7-1번 N0-1, 7-2번 N0 수준으로 추론한 경우

[그림 IV-1] 7-1, 7-2번 문제에 대한 학생 반응

제7차 교육과정에서는 자를 도입하기 전, 임의의 단위를 이용하여 길이를 비교하거나 재어 보는 활동이 3차시에 걸쳐 제시되고 있다(교육인적자원부, 2006b). 제시되는 소재로는 연필, 클립, 막대, 보폭, 팔 너비, 뼘 등이 있다. 그러나 두 대상의 길이를 비교하거나 측정할 때 학생들은 교과서에서 제시되고 있는 임의 단위를 이용하여 비교 혹은 측정해 보거나(예, 교실의 폭을 발걸음으로 재어보시오) 또는 질문에 제시된 임의 단위 길이의 단위의 수세기에 관련된 활동만 있을 뿐(예, 빨대의 ~배입니까?), 측정하고자 하는 대상에 적절한 단위길이가 될 수 있는 소재들을 스스로 생각해서 측정해 보는 활동은 미비하다. 이러한 교육과정의 내용 구성이 본 연구의 결과와도 관련이 있다고 생각되므로, 길이재기에 대한 학생들의 더 깊은 이해를 위해서 학생들이 적절한 단위 길이를 스스로 선택하게 하는 상황을 교과서에 제공할 필요가 있다고 판단된다. 이러한 측면에서 개정 교과서에서는 "길이를 잴 때 막대 외에 어떤 것을 사용할 수 있습니까?"라는 발문을 제공하여(교육과학기술부, 2009b, p.67) 긍정적인 변화를 추구하고는 있으나, 발문 직후 연필, 뼘, 줄자, 젓가락의 그림을 제시하고 있다. 따라서 이러한 예시가 발문에 대한 답으로 활용되기보다는 학생들이 더 많은 임의 단위를 선택하게 하는 촉진제가 되도록 수업에서 구현되어야 할 것이다.

둘째, 문제 유형에 따라 학생들이 주로 사용하는 추론의 정당화 수준이 다르게 나타났다. 예를 들면, 단위 길이 비교하기 유형에서는 직접 비교를 하기 위해 일부를 재배열하거나 일대일로 대응시켜 보는 N1 수준의 학생들이 많았으나, 단위의 수세기 유형에서는 단위길이를 정확하게 반복하는 M2 수준에 해당되는 학생들이 많았다. 이러한 결과는 본 연구에서 새롭게 드러나는 점이며, 길이 측정의 문제 유형에 따라 학생들에게 예상되는 추론의 수준이 있음을 암시한다. 제7차 교과서 및 개정교과서에서는 "왜 그렇게 생각했습니까?"라는 질문을 통해 비교하는 활동에 대한 추론의 기회를 제공하고 있지만(교육과학기술부, 2009a, p. 87; 교육인적자원부, 2006a, pp. 82-91), 교사들의 입장에서 학생들의 추론 양상을 다양하게 예측하기가 어렵다. 이런 측면에서 본 연구의 결과는 학생들이 길이를 비교하거나 측정할 때 어떻게 추론하는지에 대한 경험적 근거를 제공한다는 측면에서 의미 있다고 생각된다.

셋째, 학생들은 일정한 간격으로서 '단위'의 수를 세는 것이 아니라 선분에 나타난 점의 수만 세는 경향이 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 이러한 경향은 1번 문항과 같이 점 사이의 간격이 일정할 경우에는 정답을 구할 수 있으나 2번이나 4번 문항과 같이 점 사이의 간격이 일정하지 않을 경우 길이를 비교할 때 학생들에게 오류를 유발하게 된다. 이는 선행연구에서 저학년 학생들이 단위 간격이 표시된 지점을 세기 때문에 길이 측정에서 어려움을 겪는다는 것과 연결된다(Barret et al., 2003). 이러한 측면에서 무엇보다 길이 재기 단원에서 '단위 길이'에 대한 개념적 이해를 강조할 필요가 있다(Barret et al., 2003; Kamii, 2006; Lehrer et al., 2003).

넷째, 현행 교육과정에서 도형의 둘레는 5학년 때 도입되지만(교육인적자원부, 2006d), 본 연구에서 2, 3학년 학생들도 도형의 둘레와 관련된 문제를 수행할 수 있는 능력을 지니고 있음을 알 수 있다. 예를 들면, 4번 문항에서 70% 이상의 학생들이 단위 길이의 반복을 통하여 둘레를 구하였다. 본 연구에서 '둘레'를 학습하지 않은 2학년과 3학년 학생들의 정답률이 비교적 높은 것은 일상생활의 경험을 통하

여 비형식적으로나마 둘레의 의미를 알고, 단위 길이의 개념을 이해하여 직사각형의 둘레를 구할 수 있는 능력이 있음을 드러낸 것으로 해석할 수 있다.

이와 같은 측면에서 직사각형이나 정사각형의 둘레를 5학년에서 처음 도입하는 것에 대한 재고가 필요하다. 더욱이 '평면도형의 둘레와 넓이'라는 단원에서 둘레는 1차시에 간단하게 소개되고 나머지 차시에서는 넓이만을 집중적으로 다루고 있음에 주목할 필요가 있다. 특히, 본 연구에서 학생들이 길이의 속성인 '길다'와 넓이 속성인 '넓다, 크다'를 혼동하는 경향이 있음을 고려해볼 때(예를 들어, 7번 문항), 한 단원에서 길이와 넓이를 다른 비중으로 동시에 다루는 것은 타당성이 부족하다고 생각된다. 오히려 단위 길이의 심도 깊은 이해라는 측면에서 저학년에서 여러 가지 모양(예를 들어 사각형과 삼각형)의 둘레를 탐구해보는 것을 고려해 볼만하다[6]. 또한 학생들에게 새로운 속성을 제시할 때, 이미 배운 속성과 어떻게 다른지 비교하게 함으로써 학생들이 측정해야 할 속성 자체를 혼동하지 않도록 도와야 할 것이다.

마지막으로, 본 연구에서 학생들은 수리적인 단서에 지나치게 주목하여 단위 길이를 예상하는 데 어려움을 겪었다. 5번 문항에서 일부 학생들은 주어진 길이의 상대적인 차이에 주목하지 않고 문제에서 제시된 수를 대상으로 의미 없는 덧셈 혹은 곱셈을 수행하거나 길이에 상관없이 배열된 수 자체에서 규칙성을 찾으려고 하였다. 이러한 경향은 학생들의 높은 계산 성향이나 수의 조작, 단위 길이에 대한 이해의 부족과 관련하여 설명될 수 있다. 또한 저학년에서 수와 연산, 규칙성은 비중 있게 다뤄지는 반면에, 측정은 상대적으로 덜 다뤄지고 있다는 점과 연결해 볼 수도 있다(교육과학기술부, 2008). 본 연구의 결과에서 2, 3학년 학생들이 겪는 어려움에 비추어 볼 때, 저학년에서 측정 영역이 보다 중요하게 다뤄질 필요가 있고, 단위 길이 자체에 대한 이해를 증진할 필요가 있다고 생각된다.

참고문헌

교육인적자원부(2006a). **초등학교 수학교과서 1-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

__________(2006b). **초등학교 수학교과서 2-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

__________(2006c). **초등학교 수학교과서 3-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

__________(2006d). **초등학교 수학교과서 5-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육과학기술부(2008). **초등학교 교육과정 해설Ⅳ: 수학, 과학, 실과**. 서울: 대한교과서 주식회사.

__________(2009a). **초등학교 수학교과서 1-1**. 서울: (주) 두산.

__________(2009b). **초등학교 수학교과서 2-1**. 서울: (주) 두산.

성태제(2002). **타당도와 신뢰도**. 서울: 학지사.

이은호(2006). **6학년 학생들의 측정감각과 측정능력에 대한 실태 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998).

6) 수학 2-가를 살펴보면, 3. 도형과 도형 움직이기, 5. 길이재기 단원 순서로 구성되어 있다. <도형과 도형 움직이기> 단원에서 여러 가지 도형에 대한 개념을 간략하게 다루고 있는데, <길이 재기> 단원에서는 길이의 반복을 통해 길이를 구하는 대상으로 책상, 수학책 등의 가로 또는 세로와 같이 선분만을 제시한다(교육인적자원부, 2006b). 개정 교과서를 살펴보면 단원명과 소재의 차이는 있으나 이러한 경향은 동일하다(교육과학기술부, 2009b).

Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 Mathematics instruction. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Barrett, J. E., Jones, G., Thornton, C., & Dickson, S. (2003). Understanding children's developing strategies and concepts for length. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 17-30). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students's thinking about length. *Teaching Children Mathematics, 13*(3), 140-147.

________________(2007). The development of geometric and spatial thing. In F. K. Lester, Jr. (Ed). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of national council of teachers of mathematics* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Dougherty, B. J., & Venenciano, L. (2007). Measure up for understanding. *Teaching Children Mathematics, 13*(9), 452-456.

Grant, T. J., & Kline, K. (2003). Developing the building blocks of measurement with young children. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 46-56). Reston, VA: NCTM.

Kamii, C. (2006). Measurement of length : How can we teach it better?. *Teaching Children Mathematics, 13*(3), 154-158.

Lehrer, R., Jashow, L., & Curtis, C. (2003) Developing understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 100-121). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school matjematics.* Reston, VA: Author.

__________(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The Author.

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM.

Wilson, P. S., & Rowland, R. E. (1993). Teaching measurement. In R. J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom : Early childhood mathematics* (pp. 171-193). Reston, VA: NCTM.

A Survey on the Second and the Third Graders' Reasoning Ability of Length

Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)
Ji, Hye Eun (Seoul Hansan Elementary School)

The purpose of this study was to analyze how lower graders in elementary school might respond to 4 different problem types in the context of measuring length: unit-length comparison, units and unit counting, unit-length expectation, and length comparison. A total of 375 students (185 second graders and 190 third graders) were surveyed and analyzed. The results showed that students were good at 'unit-length comparison' and 'units and unit counting', whereas they were not as to 'length comparison', This paper includes detailed analysis of students' responses as to both correct answer and incorrect one in conjunction with their typical answers and reasoning behind the answers. This paper suggests that teachers be sensitive to the certain level of reasoning tied to each type of problems and attend to students' difficulties in comparing length.

* **Key words** : Reasoning ability of length(길이 추론 능력), Length measurement(길이 측정), Unit length(단위 길이), Comparison(비교하기)

논문접수: 2009. 4. 26
논문수정: 2009. 5. 20
심사완료: 2009. 5. 25