

초등수학 영재교육원 학생들의 프랙탈 구성 방법 분석¹⁾

김 상 미*

본 논문은 영재교육원 초등수학분야 6학년 수업 시간에 진행되었던 프랙탈 활동을 중심으로 그에 따른 학생들이 보여준 프랙탈 구성 방법에 대한 사례연구이다. 첫째로, 프랙탈 카드, 색칠 규칙, 점종이를 활용하여 프랙탈 구성 규칙 만들기, 자연물을 프랙탈 구성 규칙으로 표현하기의 구성 활동 과정을 밝히고, 둘째로 초등수학 영재원의 5명 학생이 보여준 변형 과정을 분석하였다. 학생들은 프랙탈 구성 과정에서 기본 규칙의 높은 단계로 반복하기보다는 다른 비율, 사선과 곡선을 도입하여 변형 규칙으로 새로운 프랙탈 상을 얻으려고 하였다. 또한 프랙탈 상을 구현하는 것만이 아니라, 프랙탈의 특성인 '초기값 민감성'과 '소수 차원'을 제기하여 수학적으로 밝히고자 하였다. 끝으로 영재 수업과 그에 따른 학생들의 학습 과정에서 제기된 프랙탈 구성 방법을 논의하고, 더불어 영재 수업에서 수학적 의사소통의 중요성과 학생들의 수학적 접근에 대하여 제안하였다.

1. 서 론

수학교육은 모든 학생에게 자신의 가능성을 성취할 기회를 제공해야 하며, 영재 학생에게도 마찬가지이다(House, 1987, p.100). 이는 영재아도 일반 학생들과 마찬가지로 그들의 성장을 위한 교육적 혜택을 받아야 한다는 점을 강조하고 있다. 초등수학분야의 영재교육은 2000년 우리나라 영재교육법이 공포되면서 2002년부터 초등영재교육 대상 학생을 선발하여 실시되고 있다. 2009년 현재에는 초등수학 영재 학생을 대상으로 대학부설 과학영재교육원, 시도교육청 부설 영재교육원, 영재교육 중심학교의 영재학급에서 실시되고 있으며 더욱 확대될 예정이다.

수학 영재교육 연구는 크게 두 가지 측면으

로 볼 수 있다. 누구에게 실시할 것인가와 어떻게 영재교육을 실시해야 하는가라는 두 가지 큰 관심사이다. 영재성의 개념과 영재성의 측정 및 영재아 판별을 중심으로 판별도구 및 선발과정에 관한 연구가 시행되었고(김주훈 외, 1996a; 김홍원 외, 1996, 1997; 조석희 외 1997; 송상헌, 1998), 또 한편으로 영재교육원이 본격화되면서 수학 영재 학습프로그램 개발이 주요한 문제로 부각되었다(김주훈 외 1996b; 조석희 외 1996; 한국교육개발원, 2004). 수학영재교육을 접근하는 데 있어서, 영재를 대상으로 한 '영재교육'이라는 측면이 주로 강조되어 왔으며 영재의 특성에 비추어 보려는 많은 연구들이 보고되어 왔다. 그러나 수학 영재아에게 제공되어야 할 것이 '질 높은 수학'이라는 '수학교육'이라는 측면의 접근 즉, 어떤 수학내용들이 어떤 수학교육적 의의가 가

* 서울정목초등학교, metaphora@dreamwiz.com

1) 본 논문의 초안은 제14회 국제수학영재교육세미나(2009. 2)의 프로시딩을 통하여 발표됨.

지고 제공할 것이며 영재수업에서 어떻게 실제로 제공되고 있는지에 대한 연구는 미흡한 편이다. 수학영재교육의 시행을 위한 선발 또는 프로그램의 개발에 관한 연구들은 계속적으로 보고되고 있으나 반면에 수학영재교육의 핵심이라고 할 수 있는 영재수업 자체에 대한 연구는 찾아보기 어렵다. 또한 초등수학 영재교육이 더욱 확대되어 양에 대한 관심은 높아졌지만 그 질에 대한 실천 현황이나 평가는 드러나지 않고 있다. 특히 수학영재교육을 더욱 확대하려는 교육정책이 시도되고 있으며, 영재교육의 확대는 학생 선발은 물론 영재교육을 담당하게 될 교사와 제공되는 교육 프로그램이 수학영재교육의 질과 방향을 결정하는 주요한 문제이다.

본 논문은 초등수학분야 영재교육 프로그램의 실행에 대한 사례 연구로서, 시 교육청 부설 영재교육원 6학년 학생들이 프랙탈 수업에서 보여준 프랙탈 구성 방법을 분석하였다. 첫째로, 수학영재교육과 관련하여 프랙탈 기하를 살펴보고, 둘째로, 초등수학 영재교육원 6학년 학생들을 대상으로 실시했던 프랙탈 활동을 밝혔다. 셋째로, 프랙탈 카드 만들기, 색칠규칙과 프랙탈 곡선 구성으로 프랙탈 구성하기, 자연물을 프랙탈 구성 방법으로 표현하기 등을 중심으로, 영재교육원 프랙탈 수업 과정에서 학생들이 프랙탈 구성 규칙을 변형 또는 새로운 규칙을 추가해가는 방식을 분석하였다.

II. 수학영재교육에서 프랙탈 기하

프랙탈은 유클리드 기하의 관점으로는 이상한 병적인 대상으로 취급되어 ‘괴물곡선’이라고 불리웠으나, 1975년 만델브로트가 라틴어 ‘fractus’로부터 만들어낸 단어이다. 자연을 모델

링 하는데 점, 선, 삼각형, 평면, 원, 구 등의 도형을 사용하는 고전적인 유클리드 기하학이 규칙적, 불규칙적인 자연현상을 설명하는 데에는 한계가 있다는 것을 인식한 Mandelbrot (1982)는 자연을 모델링하는 새로운 도구로서 프랙탈을 소개하며 “구름은 구가 아니고, 산은 원뿔이 아니며, 해안선은 원이 아니다. 번개는 직선으로 내려치지 않는다. 자연의 많은 패턴은 매우 불규칙적이고, 조각이 나 있다. 자연은 고도로 복잡하고, 그 복잡함 정도는 모두 다르다.”라고 지적하였다(윤세연, 1999). 실제로 프랙탈이 출현한 것은 19세기였으며, 칸토르 집합, 페아노 곡선, 코흐 곡선, 코흐 눈송이, 시어핀스키 삼각형 등을 들 수 있다. 오늘날에는 수학뿐만 아니라 물리, 화학, 생물, 기상학, 의학, 컴퓨터 과학, 카오스 현상 등 여러 분야에서 활발히 논의되고 있다.

프랙탈의 큰 특징으로는 자기닮음(self-similarity)과 소수차원(fractal dimension)을 말한다. 첫째로 자기닮음이란 어떤 도형의 부분들이 전체의 모습과 닮은 작은 부분을 갖는 것을 말한다. 즉, 도형의 일부를 확대하면 다시 전체의 모습이 되는 성질이다. 나뭇가지, 구름의 모습, 해안선 등 우리 주변에서 자기 유사성을 갖는 것을 쉽게 관찰할 수 있다. 나뭇가지의 일부는 전체 나뭇가지와 유사하고, 일부 해안선은 전체 해안선의 모습과 유사하다. 둘째로 프랙탈의 특징으로 소수차원은 들 수 있다. 유클리드 기하의 차원에서는 보통 축의 수라는 개념으로 점은 0차원, 직선은 1차원, 평면은 2차원, 공간은 3차원이라고 하고 시간을 넘나드는 4차원의 세계를 그려보기도 한다. 그렇다면 면을 가득 채우는 선은 1차원일까 아니면 2차원일까? 또는 공과 같이 구겨진 종이는 2차원일까 아니면 3차원일까? 이 물음에 대하여 유클리드 기하는 불규칙한 도형을 나타낼 수 없

기 때문에 답하기 어려워진다. 프랙탈 기하에서는 이 물음에 대하여, 면을 가득 채우는 선은 선이 채워진 정도에 따라 1와 2사이의 소수로, 공과 같이 구겨진 종이는 구겨진 정도에 따라 2와 3사이의 소수로 그 차원을 나타낼 수 있다. 이와 같이 소수 차원은 거칠은 정도, 불규칙의 정도, 공간을 채우는 정도 까지도 나타낼 수 있는 측도이다. 프랙탈의 소수 차원은 특정 도형의 넓이, 부피의 측도 뿐만아니라 복잡한 형태의 도형까지도 수학적으로 다룰 수 있게 된 것이다.

프랙탈은 시각적으로 아름다운 상을 통하여 풍부한 수학의 탐구를 보여준다. 수학은 단지 계산이나 공식으로 가득한 학문이 아니며, '자유로운 정신'에 그 힘이 있다. 수학 영재아에게 프랙탈 기하는 새로운 수학의 측면을 접하는 주제로서, 단순한 반복 알고리즘이 단계를 더해가면서 시각적으로 화려하고 복잡한 상을 보여줌으로써 수학의 규칙성을 새롭게 경험할 수 있는 기회를 제공한다. 동시에 프랙탈 기하로 표현되는 자연물을 접하고 자연을 프랙탈 구성 방식으로 표현하면서 자연을 수학화하는 새로운 방식을 경험할 수 있다.

III. 사례의 수집 및 분석 대상

1. 영재교육원의 프랙탈 수업 수집 및 분석 대상

본 연구에서 소개하는 사례는 시 교육청 소속의 영재원에서 실시했던 프랙탈 수업 결과에 관한 것으로서, 본 연구의 연구자가 지도 교사로 수업했던 프랙탈 활동으로서 참여 학생들의 활동 과정에서 보여준 프랙탈 구성 방법의 변화와 학생들의 결과물을 분석한 것이다. 참여 학생들은 2004학년도 영재원 5학년 정규 프로그램을 통하여 프랙탈의 기본 특성과 구성 활동에 대하여 학습하였으며, 2005학년도 여름캠프 프 활동의 하나로서 프랙탈 카드 만들기에 참여하였다. 이 학생들이 6학년으로 그대로 진급하였으며 2005년 10월에 3차시에 걸친(10월 26일, 10월 29일, 10월 30일) 프랙탈 구성이라는 주제의 영재원 수학 수업이 실시되었다.

1, 2차시의 프랙탈 수업은 6학년 15명의 학생을 대상으로 한 정규 수업 과정이었고, 3차시는 프랙탈 기하에 관심을 가지고 심화 수업 참여를 희망한 5명의 학생을 대상으로 한 수업

<표 III-1> 프랙탈 구성 분석에 포함된 학생들의 수업 태도 및 역할

학생A	도전적으로 수학 문제 해결에 참여하며 새로운 것을 추구하려고 한다. 특히 컴퓨터 활용 능력이 우수하여 프랙탈 기하를 컴퓨터로 표현하는 활동에 적극적이었다.
학생B	끈기있게 수학 문제를 해결하였으며 프랙탈 기하의 구성을 더 높은 단계까지 마무리하여 그 복잡성을 드러내는데 주요한 역할을 하였다. 한 단계를 더하여 상상하지 못한 새로운 상을 만들어진다는 것을 시각적으로 보여주었다.
학생E	프랙탈에 구성하는 방식에 관심이 있고 여러 가지 자료를 활용하려고 시도하며 새로운 구성 아이디어를 제시하였다. 새로운 구성 방법이 프랙탈을 나타낼 수 있는가를 논리적으로 조정하고 대안을 제시였다.
학생G	수 감각이 뛰어나며 프랙탈의 소수 차원에 관심을 보였다. 다른 학생들의 구성 방식을 소수 차원으로 설명하고 자기 유사성 차원을 구하였다.
학생L	입체 기하 구성 능력이 우수하여 프랙탈 카드를 변형하는 활동에서 적극적이었다. 접기 이전에 그 변형 규칙을 보고 어떤 프랙탈 카드가 완성될 것인지를 미리 예견하여 다른 학생들에게 도움을 주었다.

이었다. 5명의 학생들은 새로운 프랙탈 구성 방법이라는 주제로 영재원 산출물 대회에 참가를 희망하여 추가적으로 심화 수업 한 차시가 실시되었고, 본 연구에서 수집 및 분석한 프랙탈 구성의 일부 예들은 5명 학생들이 참가한 2005학년도 영재원 산출물 대회에서 소개되었다. 본 연구는 학생들의 프랙탈 구성 방법의 분석을 중심으로, 3차시의 지도교사의 수업 일지와 전 과정에 모두 참여한 6학년 5명의 학생들의 학습 결과물을 분석 대상으로 한다.

프랙탈 정규 수업과 심화 수업에 참여한 5명의 학생들은 자신들의 프랙탈 구성 방법을 적극적으로 제시한 학생들이었다. 지도 교사가 제시한 프랙탈의 기본 구성 방법을 반복 실행하는 것에 머물지 않고 학생 각자의 규칙을 추가하고 계속 변형해가면서 새로운 프랙탈 상을 만들려고 시도하였다. 다음 <표 III-1>은 교사의 수업 일지에 나타난 것으로, 5명의 학생들의 프랙탈 수업에서의 태도 및 역할이다.

2. 프랙탈 수업 활동 내용

수업 활동은 프랙탈을 구성해가는 과정에 초점을 두고 크게 3차시로 이루어졌으며, 각 차시는 기본적인 프랙탈 구성 활동을 소개하고 이를 자신의 규칙으로 변형해가면서 새로운 프랙탈 상을 얻는 것이었다. 1차시는 프랙탈 카드의 기본형을 만들고 규칙을 변형하여 자신의 프랙탈 카드를 구성하기였다. 2차시는 점중이를 활용한 프랙탈 구성 방법과 색칠 규칙을 통한 프랙탈 구성 방법을 소개하고 이를 변형하여 자신의 프랙탈 구성하는 것이었다. 3차시는 자연물들을 보여주는 프랙탈 상을 프랙탈 구성 방식으로 표현하는 것이었다.

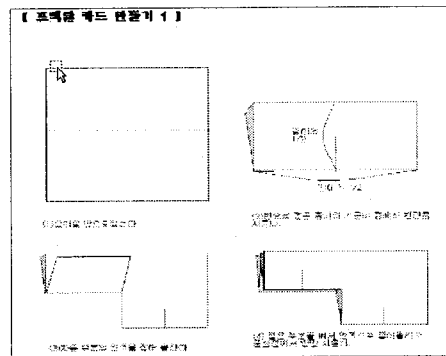
가. 프랙탈 카드 만들기

[1차시] 2005년 10월 26일

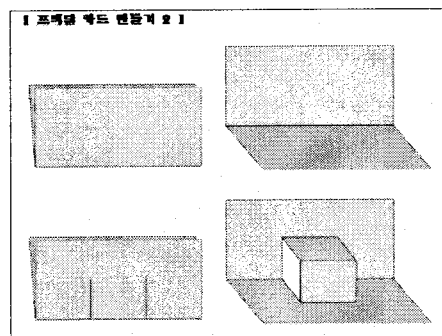
(6학년 15명 대상의 영재원 정규 수업)

일상에 감추어진 프랙탈 - 사람의 몸이나 자연의 프랙탈을 여러 사진 자료를 활용하여 보여주고, 현재 의학과 과학 분야에서 활용되는 사례들이 소개되었다.

프랙탈 카드 만들기 및 변형하기 - 시어핀스키 삼각형(학생용 활동지 [그림 III-1])과 시어핀스키 사각형(학생용 활동지 [그림 III-2])²⁾의 모양으로 프랙탈 카드를 만들고, 이를 변형하는 방법들을 서로 논의하고 변형해면서 다른 규칙으로 카드 만들기를 실시하였다.



[그림 III-1] 시어핀스키 삼각형 만들기



[그림 III-2] 시어핀스키 사각형 만들기

2) 프랙탈 카드 만들기의 수업 내용은 <http://user.chollian.net/~badang25/fcard/fcard01.html>과 <http://user.chollian.net/~badang25/fcard/fcard02.html>에서 다운받은 자료이다.

1차시는 프랙탈 기본 구성 과정 및 프랙탈의 주요한 특성에 대한 것이었다. 프랙탈 기하가 나타나는 신체와 자연의 사례들을 중심으로 도입되었다. 기본적인 프랙탈 기하의 특성인 소수차원과 자기 유사성을 중심으로 프랙탈의 기초 개념을 형성하고, 프랙탈 카드 만들기 활동을 통하여 간단한 자르기와 접기를 반복하여 형성되는 시어핀스키 삼각형을 만드는 과정이었다. 주어진 규칙으로 프랙탈 카드를 만들고, 규칙을 변형하면서 자신들의 프랙탈 카드를 만들어가는 것이었다.

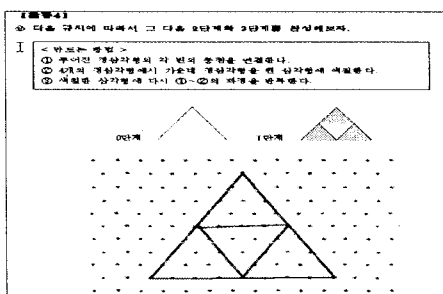
나. 자신의 규칙으로 프랙탈 구성

[2차시] 2005년 10월 29일

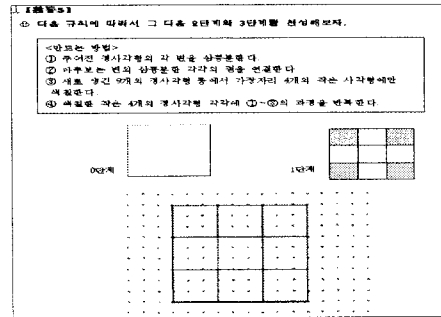
(6학년 15명 대상의 영재원 정규 수업)

점종이에 자신의 규칙으로 프랙탈 구성하기 - 점종이에 칸토르 집합, 코흐 곡선, 코흐 눈송이, 시어핀스키 삼각형([그림 III-3]), 시어핀스키 사각형([그림 III-4]),³⁾ 지그재그 곡선([그림 III-5])⁴⁾ 등을 소개하였다.

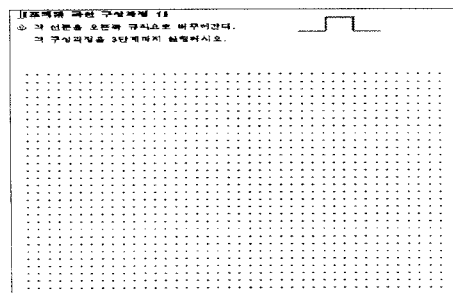
자신의 색칠 규칙으로 프랙탈 구성하기 ([그림 III-6]) - 파스칼 삼각형 색칠 규칙을 반복하여 규칙이 만들어지는 것을 소개하였고 주 활동은 색칠 규칙을 변형하여 프랙탈을 얻는 것이었다.



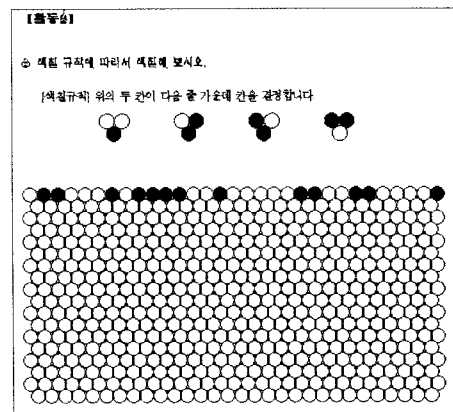
[그림 III-3] 시어핀스키 삼각형 활동지



[그림 III-4] 시어핀스키 사각형 활동지



[그림 III-5] 점종이에서 프랙탈 구성하기



[그림 III-6] 색칠규칙으로 프랙탈 구성하기

2차시는 기본적인 프랙탈의 구성 과정을 직접 그려보는 활동을 통하여 완성하고 규칙을 변형하는 활동들이 이루어졌다. 프랙탈 기하를

3) [그림 III-3]과 [그림 III-4]의 프랙탈 구성 학습지는 김상미(1997)의 활동지에서 발췌한 것이다.

4) [그림 III-5]와 [그림 III-6]은 신인선·류희찬(역)(1998)의 활동 일부를 재구성한 것이다.

접하는 초기 경험으로서 4학년 수학 교과 과정에서 다루었던 색칠 규칙을 소개하고 파스칼 삼각형과의 관계를 탐구하였다. 색칠하는 단순한 규칙을 통하여 형성되는 프랙탈의 기본 구성을 자신의 규칙을 정하여 변형해 보는 과정이었다.

다. 일상의 프랙탈을 자신의 규칙을 정하여 나타내는 활동

[3차시] 2005년 10월 30일

(6학년 5명 대상의 프랙탈 심화 수업)

자연물에서 프랙탈 탐구하기 - 자연의 모습은 프랙탈에 가깝다는 여러 사례를 보고 서로 토론하여 몇 가지 사례를 찾았다.

자신이 찾은 프랙탈을 여러 가지 구성 방법으로 표현하기 - 프랙탈을 표현하는 다양한 방법에는 제한을 두지 않았으며, 여러 규칙들을 어떤 방법으로 표현할 수 있는지 서로 논의하였다. 점종이를 활용하기도 하였고, 엑셀 프로그램으로 구현하기도 하였다.

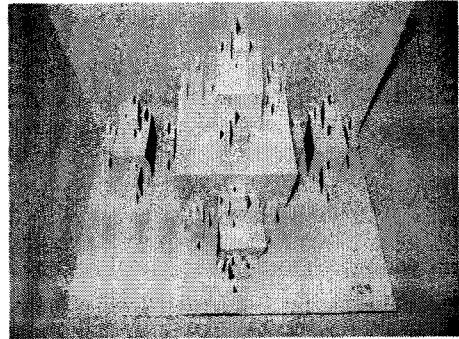
3차시는 영재원 산출물 참여를 희망한 5명의 학생을 대상으로 한 심화 수업이었다. 일상에서 찾을 수 있는 프랙탈을 설정하고 이를 여러 가지 방식으로 구현하는 것이었다. 점종이를 이용하여 구성 과정을 반복하거나 색칠규칙을 이용하여 규칙을 적용하였다. 두 명의 학생은 컴퓨터 활용을 제안하였고, 그들이 설정한 그림판과 엑셀 컴퓨터 프로그램이 활용되었다.

IV. 영재원 학생들의 프랙탈 구성 사례 분석

1. 프랙탈 카드에 나타난 구성 방법

1차시에는 프랙탈 기하를 볼 수 있는 다양

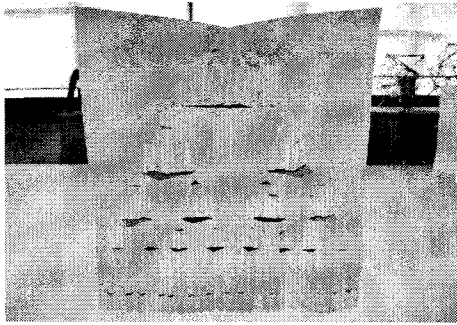
한 사례가 소개되었는데, 학생들이 가장 관심을 갖은 것은 몸의 허파를 가지고 건강의 정도를 확인할 수 있다는 것이었다. 소수 차원을 도입하여 의학에서도 이용된다는 점에 깊은 관심을 보였다. 프랙탈 카드의 기본형 만들기는 단계가 더해가면서 조각이 어려움을 표현하였다. 대부분의 학생들이 3단계에서 프랙탈의 상이 나타나기 시작하자 조각활동을 멈추었다. 이에 반하여 학생B는 4단계([그림 IV-1])까지 완성하였다. 한 단계를 더 실시한 것으로도 프랙탈 상이 더욱 화려해진다는 점을 시각적으로 보여주었다.



[그림 IV-1] 기본형 만들기

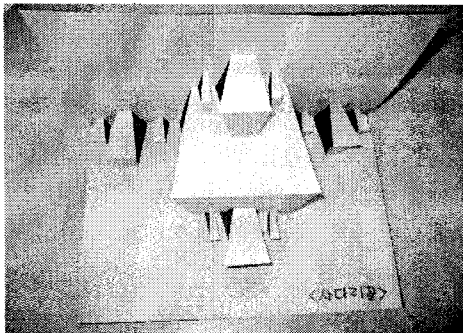
프랙탈 카드 만들기에서 학생들은 기본 규칙을 따라 기본형을 완성하는 것보다 규칙을 변형하여 카드가 변형되는 과정에 더욱 관심을 기울였다. 프랙탈 카드를 변형하는 활동 초기에는 자르는 선의 길이나 위치를 1/3이나 1/4 등으로 변형하기로 시작하였고, 몇 개의 프랙탈 카드가 만들어지면서 한 학생이 사선으로 넣는 방법을 나타내자 또 다른 학생이 곡선으로 넣는 방법으로 프랙탈 카드를 보여주었다.

프랙탈 카드 구성은 세 가지 방식으로 변화하였다. 초기에는 주어진 규칙에서 자르는 부분의 비를 변형하거나([그림 IV-2]), 가위집을 넣는 위치를 바꾸는 것이었다.



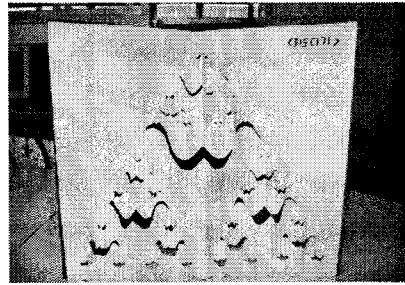
[그림 IV-2] 자르는 선의 비율 변형

두 번째 나타난 변형은 직선을 사선으로([그림 IV-3]) 변형하는 것이었다. 학생들이 비스듬히 자르는 각도에 따라서 겹쳐지는 선분이 생기고 그 다음 단계를 계속할 수 없게 되자 어려움을 겪었다. 반복 규칙이 계속될 수 있는 각도를 찾는 것에 관심을 기울였고 여러 가지로 각도와 비율의 변형을 시도하였다.

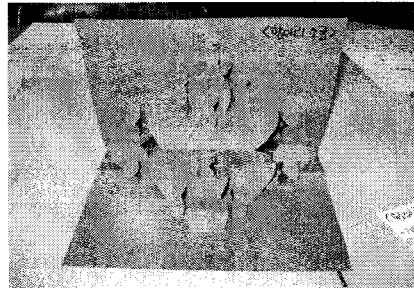


[그림 IV-3] 자르는 선을 사선으로 변형

세 번째로 나타난 변형은 학생E가 비스듬하게 자른 변형 카드를 보면서, 곡선으로([그림 IV-4], [그림 IV-5]) 자르는 규칙을 도입하면서 나타났다. 여러 가지 곡선을 넣으면서 자르는 각도와 비율이 변형되어 새로운 규칙이 추가되면서 프랙탈 카드는 다양한 상으로 변형되었다.

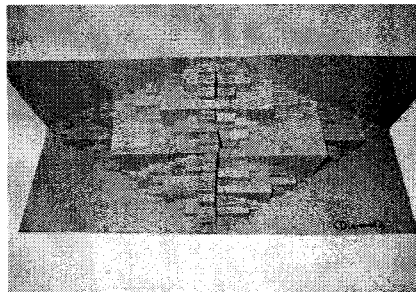


[그림 IV-4] 자르는 선을 곡선으로 변형



[그림 IV-5] 자르는 선을 곡선으로 변형

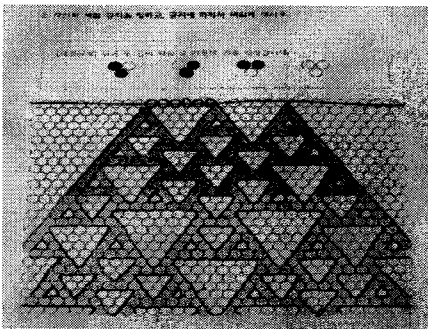
학생A는 처음에는 의도하지 않고 실수로 두 번 접은 상태에서 프랙탈 기본 규칙을 적용하였다. 중간에 이 사실을 알았지만 3단계까지 규칙을 적용하였고, 가운데에 가위집을 넣어서 한쪽을 반대편으로 접어올렸고 결과는 예상치 못했던 두 개의 시어핀스키가 모인 다이어몬드 모양([그림 IV-6])이 만들어졌다. 초기의 접기 자체를 달리하여 새로운 상이 만들어지자 또 다른 학생은 처음의 반으로 접기를 대각선으로 접어서 변형을 시도하였다.



[그림 IV-6] 두 개의 시어핀스키삼각형

2. 색칠 규칙에 따른 프랙탈 구성 방법

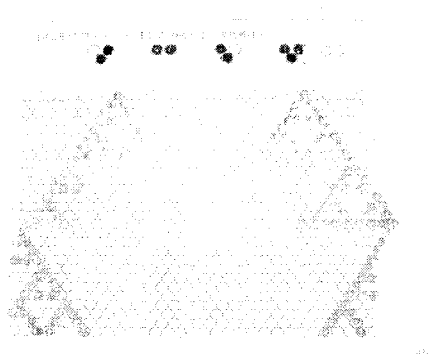
파스칼 삼각형에 짝수와 홀수 각각에 다른 색으로 색칠 규칙을 넣는 활동이 이루어졌다. 파스칼 삼각형이라는 유명한 삼각형에 색칠 규칙을 정하여 색칠할 때 프랙탈이 된다는 것에 학생들은 큰 관심을 보였다. 프랙탈을 구성하는 작업은 한 단계만 더해도 시각적으로 놀라운 프랙탈 상이 나타나지만, 조작 과정이 복잡해지면서 수업 활동에서는 3단계 정도를 완성하고 있었다. 그러나 학생B는 그 다음은 어떤 상이 만들어지는지에 관심을 보였고 스스로 그 다음을 계속 실행하였다(그림 IV-7). 그 결과 다른 학생들에게 그 다음의 시각적인 상을 보여주었다. 색칠규칙을 변형하는 활동의 초기에는 두 셀 사이의 색을 변형하여 설정하고 규칙에 따라 실행하였다. 실행과정에서 첫줄을 어떻게 정하는가에 따라서 프랙탈을 얻지 못할 수도 있음을 찾아내었다. 프랙탈 기하의 큰 특징인 '초기값 민감성'에 따라 나타나는 현상에 대하여 학생들이 언급하였다.



[그림 IV-7] 규칙을 따라 확장하기

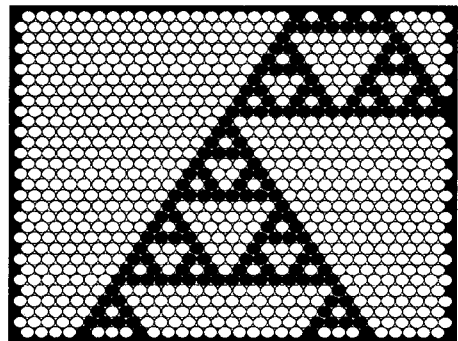
초기값을 변형하는 활동을 하면서 학생E는 도리어 프랙탈 상에서 초기값을 찾아가는 방식으로 거꾸로 규칙을 찾아가는 전략을 활용하였다. 시어핀스키 삼각형이 만들어지는 중간 지

점을 뒷줄에서 칸 수를 세어서 정한 후에 색칠 규칙을 실행하여(그림 IV-8) 거꾸로 초기값을 찾았다. 색칠규칙을 정하는 방법을 변형하여 윗 칸의 두 셀이 아래 칸을 정하는 방법에서 윗 칸 세 개의 셀이 아래 칸을 정하는 방법으로 확대하여 색칠 규칙을 정하고 프랙탈 상을 얻을 수 있도록 초기값을 거꾸로 찾아가는 방법을 사용하였다.

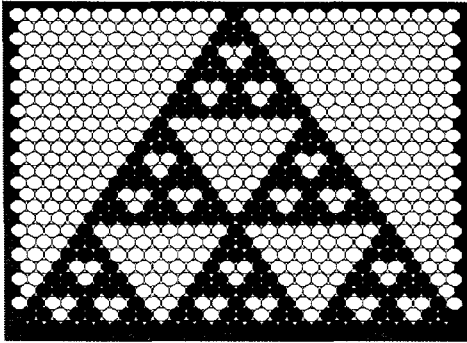


[그림 IV-8] 초기값 거꾸로 찾기

학생L은 색칠하고 지우기가 불편해지자 영재 교실에 비치되어 있는 컴퓨터를 활용하였다. 간단한 그림판의 조작으로 색칠 규칙을 적용했으며(그림 IV-9), 여러 가지 색칠 규칙을 적용하면서 다른 진법에 의한 변형 시어핀스키 삼각형(그림 IV-10)을 만들었다.

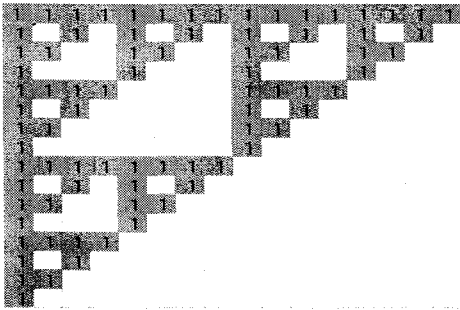


[그림 IV-9] 그림판을 활용한 색칠 규칙



[그림 IV-10] 변형 시어핀스키 삼각형 구성

학생A는 엑셀을 이용하여 시어핀스키 삼각형을 만들고([그림 IV-11]), 진법을 달리하여 프랙탈 상을 얻으려고 시도하였다.



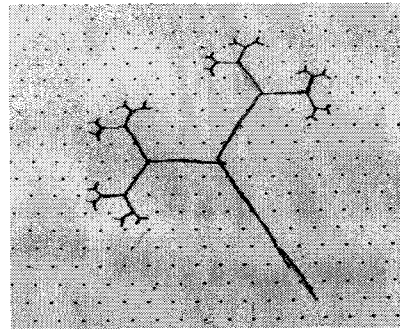
[그림 IV-11] 엑셀을 활용한 구성

학생B는 자연물을 프랙탈 구성 규칙으로 표현하는 활동을 하면서 소수 차원을 구하는 방법을 질문하였고, 지도교사는 자기 유사성 차원 구하는 방법을 예로 소개하였다. 학생B는 다른 학생의 작품에서 자기 유사성 차원으로 소수 차원을 밝혀주고 구성 방법에 문제점을 지적하거나 대안을 제시하였다.

3. 자연물을 표현하는 프랙탈 구성 방법

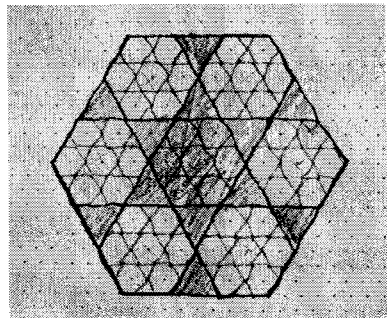
프랙탈의 도입에서 우리 주변에서 자주 볼 수 있는 자연현상과 사물의 프랙탈 구성을 보

면서 학생들은 신기해하였고 프랙탈을 친숙하게 느꼈다. 학생B는 학생일지를 통하여 자신들이 수학과 함께 살아가는 것 같다고 말하였다. 일상생활에서 프랙탈을 찾는 활동은 쉽지 않았으며, 이를 다시 프랙탈 구성 방법을 적용하여 표현하는 것도 쉬운 작업은 아니었다. 초기에는 전형적인 프랙탈의 모습인 나뭇가지([그림 IV-12]), 번개 등을 선분에서 시작하여 분지하는 규칙으로 구성하였고, 주로 기본 선분을 특정 비율로 확장해 가는 규칙이 나타났다.

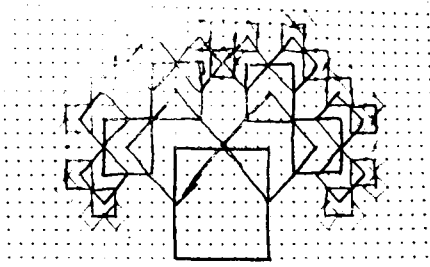


[그림 IV-12] 학생A의 나뭇가지

두 번째로 나타난 구성들은 면의 분할 또는 확장으로 변형 하는 규칙이었다. 시어핀스키 삼각형이나 시어핀스키 사각형의 기본형에서 다루었던 방식을 도입하여 육각형의 면을 구성하고 그 안으로 규칙을 적용해가면서 별집([그림 IV-13])을 구성하였다. 또는 기본 사각형에서 면을 확장해 가면서 나무([그림 IV-14])을 구성하였다.

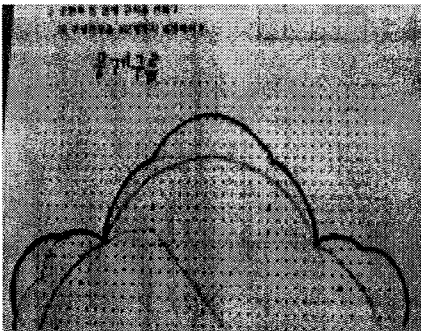


[그림 IV-13] 학생B의 별집



[그림 IV-14] 학생L의 나뭇가지

탐구가 심화되면서 학생E는 뭉게 구름([그림 IV-15])과 같이 곡선을 이용하는 방법을 도입하였다. 학생E는 프랙탈 카드를 변형하는 활동에서도 곡선을 제안했던 학생으로 점종이에서도 곡선을 시도하였다. 뭉게구름이라는 제목을 설정하고 처음에는 선분 위에 반원 세 개를 그려서 규칙을 적용하다가 프랙탈의 자기 유사성이 나타나지 않자 한참을 고민하였다. 결국은 초기의 선분을 반원으로 수정하면서 곡선을 도입하여 프랙탈 구성 규칙을 실행하였다.



[그림 IV-15] 곡선으로 구성한 뭉게 구름

다음은 수업 활동을 마치고 지도교사가 작성했던 수업 일지에서 발췌한 것이다. 프랙탈 수업 활동을 하면서 갖게 된 수학 수업에 대한 생각과 학생의 프랙탈 구성에 대한 느낌이 나타나 있다.

프랙탈의 구성 방법을 집중적으로 탐구하면서

간단한 규칙들이 학생의 아이디어를 통하여 새롭게 변형되는 것을 경험하였다. 프랙탈의 기본 개념을 배우려고 시도한 프랙탈 카드 만들기는 학생들의 아이디어를 통하여 놀랍게 변형하였으며 학생들은 새로운 규칙에 끊임없이 도전하려고 하였다. 다른 친구들의 새로운 단서들을 다시 자신의 구성 전략으로 변형하면서 구성 방법은 다양해져갔다. 수학 영재아의 아이디어는 어디에서 불현 듯 나타나는 것이 아니며 작은 단서들과 친구들의 아이디어를 귀기울이면서 논의하는 과정에서 이루어졌다. 프랙탈 활동을 통하여 교사에게도 다양한 구성방법을 경험하는 계기가 되었으며, 교사도 상상하지 못한 다양한 프랙탈의 상이 구성되었다. 수학은 그 누구의 머리 속에 화석처럼 있는 것이 아니라 우리의 교실에서 학생과 교사 자신의 삶 속에 뿌리깊이 숨쉬고 있었다.(지도교사의 수업 일지 중에서)

학생들의 프랙탈 구성하는 방법으로 카드 만들기, 색칠 규칙으로 표현하기, 점종이에 기본 규칙을 만들기라는 기본형을 시작으로 단순한 규칙들이 프랙탈 기하의 아름다운 상을 만든다는 경험에서 시작되었다. 학생들은 기본 규칙을 높은 단계로 기본 규칙을 적용하는 것에 그치지 않고 자신들의 규칙으로 변형하는 것에 더욱 적극적이었다.

1차시에 활동한 프랙탈 카드에서는 초기의 변형은 자르는 비율이나 자르는 위치를 변경하는 것이었고, 사선이 나타나고, 곡선이 등장하였다. 2차시의 색칠 규칙을 변형하는 활동은 규칙을 바꾸면서 프랙탈이 나타나지 않자 초기 값을 변경하는 전략으로서 거꾸로 색칠하거나 프랙탈 상에서 규칙을 유도해내는 방식을 보였다. 특히 색칠 과정이 단순해지자 컴퓨터를 활용하여 그림판이나 엑셀 등을 구성하려고 시도하였다. 이 과정에서 색칠 규칙을 적용하는 것이 간단해지면서 여러 가지 변형 규칙을 적용하기 쉬워졌고, 변형된 진펄의 시어핀스키 삼

각형도 나타났다.

3차시의 자연물을 표현하는 데에 가장 어려움을 나타냈고 1~2차시에서 다루었던 표현 방법 중에서 점종이에 기본 규칙을 정하여 변형해 가는 방법을 주로 사용하였다. 활동 초기에는 나무와 번개 등을 표현하는 기본 선분을 분할 또는 확장해 가는 방식으로 프랙탈 상을 만들어갔으나, 다음 실행에서는 시어핀스키 삼각형을 구성하는 방식으로 면의 내부를 분할하거나 나무를 확장해가는 방식으로 면을 확장해 가는 방법을 보여주었다. 다음으로는 곡선을 도입하려고 시도하면서 반원으로 분할해가는 규칙이 나타났고, 이때 0단계를 선분으로 시작하여 어려움을 규칙이 반복하여 유지되지 않음을 고민하였다. 0단계 자체를 반원으로 표현하면서 멩게구름을 나타내는 프랙탈 구성 규칙을 만들어냈다. 이 과정에서 소수 차원에 관심을 갖고 한 학생은 자기유사성 차원을 구하여 학생들의 프랙탈 구성에 문제점이나 변형을 제안하기도 하였다.

영재교육원 5명의 학생 사례에서 두드러진 특징은 프랙탈 기본 규칙을 여러 단계 실행하여 프랙탈을 얻는 것에 그치지 않고 학생 각자의 규칙 만들기에 집중한다는 것이었다. 또한 그 과정에서 자신들이 설정한 변형 규칙을 따라 나타나는 프랙탈과 수학적 특성들을 제기하였다. 학생들의 관심사는 표면적으로 프랙탈 구성이 보여주는 시각적인 상에 있는 듯하지만, 활동이 계속 되어감에 따라 변형 규칙이 만들어내는 프랙탈을 수학적으로 밝히거나 설명하려고 하였다.

V. 결 론

영재교육에 대한 관심이 더욱 높아지면서 다

양한 영재 수업 프로그램이 개발 및 보급 되고 있지만 그러한 영재 수업이 어떻게 진행되고 그 결과 학생들은 어떤 수학적 경험을 하게 되는지의 보고는 미흡한 실정이다. 반면에 영재 대상자는 더욱 확대될 계획이며, 이를 담당할 교사에게는 영재 수업에 대한 관심도 더욱 높아져있다. 이에 대하여 본 논문은 영재원 학생들의 수업 실체에 대한 구체적인 사례들을 밝히고 그 과정에서 학생들이 나타내는 학습 사례를 밝혀보고자 시도된 것이었다.

본 논문은 영재교육원 초등수학분야 6학년 수업 시간에 진행되었던 프랙탈 활동을 중심으로 5명의 학생의 프랙탈 구성 방법에 대한 사례연구이다. 본 사례 연구는 영재 수업 현장에서 이루어지고 있는 프랙탈 활동 사례와 그 결과물을 밝히고, 초등수학 영재학생을 위한 프랙탈 활동이 어떻게 전개될 수 있으며 그 과정에서 학생들이 보여준 학습 결과를 논의하였다. 첫째로, 프랙탈 카드, 색칠 규칙, 점종이를 활용하여 프랙탈 구성 규칙 만들기, 자연물을 프랙탈 구성 규칙으로 표현하기의 활동 과정을 밝히고, 둘째로, 활동 과정에서 학생들이 규칙을 변형해 가는 방법을 집중적으로 논의하였다. 학생들은 프랙탈 구성 과정에서 기본 규칙의 반복 적용에서 시작하여 보다 새로운 규칙 만들기에 집중하였고, 자신들의 변형 규칙을 통하여 더욱 아름다운 프랙탈 상을 구현하였다. 뿐만 아니라 프랙탈의 수학적 특성인 초기 값 민감성과 소수 차원에 대하여 제기하였다.

학생들의 프랙탈 구성 방법을 분석한 결과, 초등수학 영재아를 위한 교육 프로그램에 대하여 다음과 같이 두 가지 측면에서 제안하고자 한다.

첫째로, 학생들의 프랙탈 구성 방법을 찾아가는 과정에 대한 것으로서, 주어진 프랙탈의 기본 구성 방법을 그대로 높은 단계로 반복하

는 활동보다는 기본 구성에서 비율, 각도, 곡선 등으로 변형하면서 자신의 규칙을 만드는 것에 관심을 보였다. 변형한 자신의 규칙이 어떤 프랙탈 상을 만들 수 있는지를 직접 반복 실행하고 다른 친구들의 규칙과 의사소통하면서 자신의 규칙을 변경하여 갔다. 새로운 구성으로 변경하는 데에 있어서 다른 학생의 규칙이 강하게 영향을 주었으며 수업 과정에서 계속적으로 새로운 규칙들이 생성되었다. 프랙탈 규칙들은 한 명의 기발한 아이디어가 활동 초기에 나타난 것이 아니라, 여러 명의 학생이 서로 자신의 규칙을 친구들과 의사소통하는 가운데 자신들의 또 다른 규칙으로 만들어졌다. 프랙탈 구성 과정을 분석한 결과를 보면, 학생들은 서로의 규칙을 공유하면서 새로운 규칙을 생성해가면서 또 다른 규칙을 만들 수 있음을 경험하였다. 새로운 규칙이 활동 초기에 뛰어난 한 학생을 통하여 한 번에 나타나지 않았으며 여러 명의 규칙이 서로 영향을 주면서 자신들의 규칙으로 변경되어 갔다. 수학영재 수업에서 학생들은 새로운 수학적 개념이나 심화하는 데 수학적 의사소통이 중요함을 보여주었고 있으며, 다른 사람의 아이디어를 함께 공유하고 자신의 방식이 새로운 아이디어 생성하는데 수학적 의사소통을 경험하도록 격려되어야 할 것이다.

둘째로, 초등수학 영재 수업 활동에 관한 것이다. 학생들은 아름다운 프랙탈 상을 구현하는 것에 머물지 않고 프랙탈의 수학적 특성과 관련지으려고 하였다. 학생들의 프랙탈 구성 방식은 단지 기본 규칙을 변경하는 것이나 아름다운 상을 보이는 것에 집중되어 있지 않으며, 그들의 방식으로 소수차원이나 초기 민감성 등의 프랙탈의 수학적 아이디어를 밝히려고 하였다. 영재 수업에 참여하는 학생들의 프랙탈 구성은 규칙의 실행과 프랙탈 상을 얻는 것만이 아니라 수학적으로 밝혀보려고 시도하

였다. 수학영재 학생을 위하여 개발 보급되고 있는 초등수학 영재교육 프로그램 중에서 프랙탈 관련 활동들은 주로 프랙탈의 아름다운 상을 보여주거나 조작 활동에 집중하고 있다. 그러나 학생들의 프랙탈 구성 사례를 보면, 그러한 규칙이나 프랙탈 상이 가능한 수학적 특성에 높은 관심을 보이고 있다. 이 점은 수학영재교육에서 초등학생들은 조작 활동에 만족할 것이라는 통념에 대하여 재검토를 요구한다.

수학영재교육은 영재성이 있는 학생을 발굴하는 하거나 또는 학생의 영재성을 찾아내는 것에 그치지 않고, 학생들 개인 삶을 통해 영재성을 발현하고 자신의 삶을 누리게 하는 것이다. 따라서 수학 영재의 선발과 교육 프로그램을 개발하고 제공에 그치지 않고, 영재 수업을 통하여 그들의 영재성이 어떻게 발현되는가에 구체적인 사례들이 공유되면서 수학영재 수업에 대한 연구도 계속되어야 할 것이다. 또한 계속적으로 개발되고 있는 수학 영재 교육프로그램들은 교사의 수업을 통하여 수정 보완되고 또 한편으로 새로운 것이 될 수 있다. 영재원의 수업 실제와 학생들의 학습 사례들이 서로 공유되면서 수학 영재아를 위한 수업도 깊이를 갖게 되고 새로운 수학영재 교육프로그램도 모색할 수 있을 것이다.

참고문헌

- 김상미(1997). 수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 김주훈·박경미·최고운·이은미(1996). 영재를 위한 심화 학습 프로그램 개발 연구 -국어, 사회, 수학, 과학을 중심으로, 한국교육개발원 수탁연구 CR96-25, 한국교육개발원.

- 김주훈 · 이은미 · 최고운 · 송상현(1996). **과학 영재 판별 도구 개발 연구(I) - 기초 연구 편**, 한국교육개발원 수탁연구 CR96-27, 한국교육개발원.
- 김홍원 · 김명숙 · 송상현(1996). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(I) - 기초 연구 편**, 한국교육개발원 연구보고 CR96-26, 한국교육개발원.
- 김홍원 · 김명숙 · 방승진 · 황동주(1997). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(II) - 검사 제작 편**, 한국교육개발원 연구보고 CR97-50, 한국교육개발원.
- 송상현(1998). **수학영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 윤세연(1999). **프랙탈 학습 프로그램 개발 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 우광식(2005). **초등학교 수학 영재 교육에 대한 사례 조사 연구**. 한국교원대학교대학원 박사학위논문.
- 조석희 외 4인(1996). **영재교육의 이론과 실제 - 교사용 연수 자료**, 한국교육개발원 연구보고서 CR96-28, 한국교육개발원.
- 한국교육개발원(2004). **우수 영재교육프로그램 및 영재교육판별도구 자료집(수학영역)**, 연구자료RM 2004-5, 2004학년도 영재교육 담당교원 직무연수자료. 서울: 한국교육개발원.
- House, P. A.(Ed.) (1987). *Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, H., & Saupe, D. (1992). *Fractals for the Classroom*. NY : Springer-Verlag.
- Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E.M., Perciant, T., & Yunker, L. (1991). *Fractals for the Classroom Strategic activities Volume One*. NY : Springer-Verlag. 신인선 · 류희찬(공역)(1998). **수학교사를 위한 프랙탈기하**. 서울: 경문사.
- Steen, L. A. (1988). *The Science of Pattern. Science* 240, April, pp.611-616.
- _____ (1991). *On the Shoulder of Giants : New Approach to Numeracy*. Washinton DC : The National Academy of Sciences.
- Stewart, I. (1989). *Does God Play Dice? : The Mathematics of Chaos*. 박배식 · 조혁(공역)(1993). **하느님은 주사위 놀이를 하는가?**. 서울: 범양사.

A Case Study of Constructions on Fractals of the Mathematically Gifted

Kim, Sang Mee (Seoul Jeongmok Elementary School)

The purpose of this study is to show the Fractals activities for mathematically gifted students, and to analyze the constructions on Fractals of the mathematically gifted.

The subjects of this study were 5 mathematically gifted students in the Gifted Education Institut and also 6th graders at elementary schools. These activities on Fractals focused on constructing Fractals with the students' rules and were performed three ways: Fractal cards, colouring rules, Fractal curves.

Analysis of collected data revealed in as follows: First, the constructions on Fractals transformed the ratios of lines and were changed using oblique lines or curves. Second, to make colouring rules on Fractals, students presented the sensitivities of initial and fractal dimensions on Fractals.

In conclusion, this study suggested the importance of communication and mathematical approaches in the mathematics classrooms for the mathematically gifted.

* **Key words** : Fractals(프랙탈), the mathematically gifted(수학 영재아), activity on Fractals (프랙탈 활동), Fractal cards(프랙탈 카드), coloring rules(색칠 규칙), Fractal curves(프랙탈 곡선)

논문접수: 2009. 5. 9

논문수정: 2009. 5. 18

심사완료: 2009. 5. 26