

논문 2009-46TC-6-10

# 다중 사용자 다중 입출력 시스템에서 Seysen 기법을 이용한 격자 감소 기반 전부호화 기법

(Lattice-Reduction-Aided Precoding Using Seysen's Algorithm for  
Multi-User MIMO Systems)

송 현 준\*, 홍 대 식\*\*

(Hyungjoon Song and Daesik Hong)

## 요 약

본 논문에서는 다중 사용자 다중 입출력 시스템을 위해 격자 감소 기법 기반 전부호화(precoding) 기법에 대해 연구하였다. 송신 단에서 완벽한 채널 상태 정보(CSI : channel state information)를 이용할 수 있을 때, 벡터 분산 기법(VP : vector perturbation)은 큰 채널 전송 용량(sum capacity)을 얻을 수 있으면서 간단한 수신기로 구현될 수 있다<sup>[1~2]</sup>. 그러나 VP 기법의 부호화는 비결정적 난해(NP-hard : nondeterministic polynomial time-hard) 문제이다. 이에 반해 격자 감소 기법 기반의 VP 기법은 부호화 복잡도를 크게 줄일 수 있다<sup>[3]</sup>. 본 논문에서는 기본 및 이중 베이스의 동시 감소를 통한 Seysen 격자 감소 기반 VP 기법(VP-SLR : vector perturbation with Seysen's lattice reduction)을 제안한다. 모의실험 결과는 LLL 기반 VP 기법(VP-LLL : vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction)에 비해 제안된 VP-SLR 기법이 더 낮은 비트 오류율(BER : bit error rate)과 더 큰 전송 용량을 가짐을 보여준다.

## Abstract

We investigate lattice-reduction-aided precoding techniques for multi-user multiple-input multiple-output (MIMO) channels. When assuming full knowledge of the channel state information only at the transmitter, a vector perturbation (VP) is a promising precoding scheme that approaches sum capacity<sup>[1]</sup> and has simple receiver<sup>[2]</sup>. However, its encoding is nondeterministic polynomial time (NP)-hard problem. Vector perturbation using lattice reduction algorithms can remarkably reduce its encoding complexity<sup>[3]</sup>. In this paper, we propose a vector perturbation scheme using Seysen's lattice reduction (VP-SLR) with simultaneously reducing primal basis and dual one. Simulation results show that the proposed VP-SLR has better bit error rate (BER) and larger capacity than vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction (VP-LLL)<sup>[3]</sup> in addition to less encoding complexity.

**Keywords :** MIMO broadcast channel, lattice reduction, dual basis, Seysen

\* 정회원, \*\* 평생회원, 연세대학교 전기전자공학부  
(Yonsei University)

※ 이 논문은 한국과학재단이 주관하는 국가지정연구  
실사업(NRL:R0A-2007-000-20043-0)의 지원을 받  
아 연구되었음.

※ 본 연구는 지식경제부 및 정보통신연구진흥원의 대  
학 IT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음.  
(IITA-2009-(C1090-0902-0011))

※ 본 연구는 지식경제부 및 정보통신연구진흥원의 대  
학 IT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음.  
(IITA-2009-C1090-0902-0005)

접수일자: 2009년3월9일, 수정완료일: 2009년6월17일

## I. 서 론

최근 다중 사용자 다중 입출력 시스템(multi-user multiple-input multiple-output)은 다중 사용자 하향 링 크 시스템에서 큰 주목을 받고 있다<sup>[1]</sup>. 다중 사용자 다중 입출력 시스템에서 다수의 송수신기들이 동일한 통신 자원을 공유하고 기지국(BS : base station)은 다중

송신 안테나를 통해 각기 독립적인 정보를 다수 사용자 단말(MS : mobile station)들에게 동시에 전송한다. 각 사용자들은 자신들의 수신 신호의 검출만 할 수 있기 때문에 사용자간 간섭을 사용자간의 협력 수신을 통해 제거 하는 것은 불가능하다.

다중 안테나 방송 채널에서 벡터 분산 기법(VP : vector perturbation)은 사용자간 간섭을 제거하기 위한 효율적인 방법이다<sup>[2~3]</sup>. Hochwald들은 전송 전력을 줄이기 위해 신호를 분산시키는 구형 부호화기(sphere encoder)를 제안했다<sup>[2]</sup>. 이 VP 기법은 전송 다이버시티를 완벽히 얻을 수 있으며 사용자 단말에서의 신호 검출이 간단하다. 하지만, 최적의 분산 벡터를 찾는 것이 비한계 정수(infinite integer) 최적화 문제이기 때문에 비결정적 난해(NP-hard : nondeterministic polynomial time-hard) 문제로 매우 복잡하다<sup>[2]</sup>. 최근, Windpassinger들은 LLL 격자 감소 기법을 이용한 저 복잡 VP 기법(VP-LLL : vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction)을 제안했다<sup>[3]</sup>. VP-LLL은 다이버시티와 선형 시간 복잡도를 가지지만 송신 안테나 수가 증가할수록 사용자간 직교성이 심하게 감소하기 때문에 성능이 크게 떨어진다.

본 논문에서는 기본 및 이중 베이스의 동시 감소를 통한 Seysen 격자 감소 기반 VP 기법(VP-SLR : vector perturbation with Seysen's lattice reduction)을 제안한다. 그리고 성능면에서 제안된 VP-SLR이 VP-LLL에 비해 우월함을 입증할 것이다. 성능 비교를 위해 '직교성 손실'(orthogonality defect)이라는 값을 정의하고 이용할 것이다.

## II. 다중 안테나 방송 시스템 채널

채널로써 준정적(quasi-static) 주파수 비선택적(frequency-flat) 다중 안테나 가우시안 방송 채널을 고려한다. 전송안테나 수는  $M$ , 사용자 단말의 수는  $K$ 개이며 각 사용자 단말은 1개의 수신안테나를 가진다. 사용자 단말에서의 수신신호는 다음과 같다.

$$y = Hx + n = [y_1, \dots, y_K]^T, \quad (1)$$

이때  $x$ 는 다음의 전송 전력 제한을 가지는  $M \times 1$  벡터이다.

$$E(\|x\|) \leq 1, \quad (2)$$

$H$ 는 각 성분이 복소 가우시안( $CN(0,1)$ )인  $K \times M$  채널 행렬이고,  $n$ 는  $N(0, \sigma^2)$ 의 분포를 가지는 부가적 백색  $K \times 1$  잡음 벡터이다.

송신 단에서  $H$ 의 완벽한 정보를 알고 있다고 가정할 때 채널 전송 용량이  $\min(M, K)$ 에 비례하므로 최적의 경우( $M=K$ )만을 고려한다<sup>[5]</sup>.

$(\cdot)^H$ 를 켈레 전치(conjugate transpose)라 할 때, 제로 포싱(ZF : zero-forcing) 전부호화기는 다음과 같다.

$$G_{ZF} = H^H (HH^H)^{-1}. \quad (3)$$

ZF 전부호화기는 채널 행렬 고유 상수(eigenvalue)들의 확산 때문에 전송 안테나 수( $K$ )에 따라 최대 전송량(capacity)이 선형적으로 증가하지 못한다<sup>[6]</sup>. Peel들은 이 문제를 해결하기 위해 채널 행렬의 정규화를 제안했고, 그 결과 행렬은 위너 여파기(WF : Wiener filter)와 동일하다.  $I$ 를  $K \times K$  단위 행렬이라 할 때, WF 전부호화기는 다음과 같다.

$$G_{WF} = H^H (HH^H + \alpha I)^{-1}, \quad (4)$$

여기서  $\alpha$ 는 정규화 상수로 최적값은  $K\sigma^2$ 이다<sup>[6]</sup>. 비록 WF 전부호화기의 전송량이  $K$ 에 따라 선형적으로 증가하지만, 채널 전송 용량(sum capacity)과의 차이는 여전히 크다.

## III. Lenstra-Lenstra-Lovasz 격자 감소 기반 벡터 분산 기법(VP-LLL)

채널 행렬( $H$ )의 역행렬을 이용한 전부호화는 사용자간 간섭을 제거할 수 있지만 역행렬의 계수 값들이 매우 커진다. 이로 인해 (2)의 송신 전력 제한을 지키기 위한 정규화 상수(normalization factor)가 매우 커지고 이것은 수신 SNR을 낮게 만든다. VP 기법은  $H^{-1}$ 의 고유 상수(eigenvalue)들에 따라 전송되는 전력이 같도록 만듦으로써 정규화 상수값을 최소화한다. VP를 이용한  $K \times 1$  전송 벡터는 다음과 같다.

$$x = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} G \tilde{u}, \quad (5)$$

여기서  $\gamma = \|G \tilde{u}\|^2$ 는 (2)의 전력 제한을 만족시키기 위한 정규화 상수,  $G$ 는 선형 전부호화기(즉, ZF 또는

WF), 그리고  $\tilde{\mathbf{u}}$  는 VP를 적용한 데이터 벡터이다.

일반적으로 임의의 복소 벡터를 통해 신호를 분산시키는 것은 수신단에서 분산 벡터를 알 방법이 없어 복호 오류를 발생시키기 때문에 의미가 없다<sup>[2]</sup>. 따라서 분산 벡터의 값으로 정수만을 고려한다. 분산된 데이터 벡터( $\tilde{\mathbf{u}}$ )는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tau \mathbf{l} \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K]^T$ 는 데이터 신호 벡터,  $\mathbf{l} = [l_1, \dots, l_K]^T$ 는 정수 값을 가지는 분산 벡터, 그리고  $\tau$ 는 양실수(positive real number)이다. 모든 변조 기법에 적용하기 위해 최대 변조 신호의 크기  $|c|_{\max}$ 와 인접 변조 신호간 거리  $d_{\min}$ 에 따라서  $\tau = 2(|c|_{\max} + d_{\min}/2)$ 로 결정할 수 있다.

식 (5)를 통해서 VP의 성능은 정규화 상수  $\gamma$ 에 의존하며 이를 최소화하는 것이 성능을 향상시킨다.  $Z = [\dots, -1, 0, 1, 2, \dots]$ 를 정수 집합이라 할 때 정규화 상수  $\gamma$ 를 최소화하기 위한 최적 분산 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^* &= \arg \min_{\mathbf{l} \in Z^K} \gamma \\ &= \arg \min_{\mathbf{l} \in Z^K} (\mathbf{u} + \tau \mathbf{l})^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} (\mathbf{u} + \tau \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (7)$$

이 최적화 문제는 K차원 정수 최소 자승 문제로써 최적값을 결정하는 복잡도가 K에 따라 지수적으로 증가하는 비결정 난해 문제이다<sup>[2]</sup>. 왜냐하면, 최적 정규화 상수  $\gamma$ 를 알 수 없고 분산 벡터의 정수 범위도 제한되지 않기 때문이다. 부호화 복잡도를 줄이기 위해 구형 부호화라 일컫는 Fincke-Pohst 기법은 이 근점(closest-point) 문제에 이용될 수 있다<sup>[2, 7]</sup>. 그러나 구형 부호화의 평균 복잡도는 선형 전부호기와 비슷하지만 최고 복잡도는 K에 대해 지수적으로 증가하는 단점을 가진다.

격자 감소 기법을 이용하면 VP는 공간 다이버시티를 얻고 정규화 상수를 줄일 수 있음과 동시에 적은 복잡도를 가질 수 있다<sup>[8]</sup>.  $K \times K$  선형 전부호화 행렬  $\mathbf{G}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다<sup>[3]</sup>.

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}\mathbf{B}, \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{W} = [w_1, \dots, w_K]$ 는 준직교 열( $w_k$ )들을 가지

는 감소된 기준 행렬이고  $\mathbf{B}$ 는  $|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{B}^{-1})| = 1$ 과 같이 행렬식(determinant)이 1이 되는 정수 행렬이다. 감소된 기준 행렬  $\mathbf{W}$ 는  $\mathbf{W} = \mathbf{Q}\mathbf{M}$ 로 분리될 수 있다. 이때,  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_K]$ 는  $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \delta_{i,j}$ 를 만족시키는 일원(unitary) 행렬이고  $\mathbf{M}$ 은 상삼각 연관 행렬(upper triangular correlation matrix)으로

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \dots & \mu_{1,K} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu_{K-1,K} \\ 0 & \dots & 0 & \mu_{K,K} \end{pmatrix}$$

의 형태를 가진다.  $\mathbf{W}$ 는 LLL 감소되었기 때문에 다음의 조건들을 만족한다<sup>[8]</sup>:

$$|\mu_{i,j}| \leq \frac{1}{2} \quad (1 \leq i < j \leq K), \quad (9)$$

$$\|\mathbf{w}_i\|^2 + \mu_{i,i-1}^2 \|\mathbf{w}_{i-1}\|^2 \geq \beta \|\mathbf{w}_{i-1}\|^2$$

$$(1 < i \leq K) \quad (10)$$

이때  $1/4 < \beta < 1$ .

위의 LLL 감소와 Babai 간략화<sup>[9]</sup>를 통한 (7)의 해는 다음과 같다.

$$\mathbf{l}_{LLL}^* = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{Q}_{\tau Z^K} (\mathbf{B}\mathbf{u}). \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{Q}_{\tau Z^K}(\cdot)$ 는 정수 격자  $\tau Z$ 에 따라  $K \times 1$  벡터를 성분값별로 반환한다. 이 행렬 분해는 비직교 행렬을 준직교 행렬로 변환시키기 때문에 LLL 감소 기반 선형 전부호화기가 다이버시티를 얻을 수 있고 각 사용자 단말에서의 SNR 감쇄를 막을 수 있도록 정규화 상수값( $\gamma$ )도 줄일 수 있다. 그러나 LLL 감소된 벡터들은 주어진 기본 베이스만을 이용하기 때문에 K가 증가함에 따라 직교성이 떨어진다<sup>[4]</sup>. 이 문제는 기본 베이스와 이중 베이스를 함께 고려해서 해결할 수 있다. 이를 위해 Seysen은 기본 및 이중 베이스를 동시에 감소시키는 기법을 제안했다<sup>[10]</sup>. 다음 장에서는 더 큰 직교성을 가질 수 있도록 Seysen 기법을 VP에 적용하겠다. VP의 선형 전부호화 행렬의 열들을 기본 베이스로, 유사 역행렬의 열들을 이중 베이스로 결정하고 VP의 특성을 고려해 Seysen 기법의 복잡도를 줄일 수 있도록 적용한다. SLR 기법과 LLL 기법에 의해 구해진 베이스들의 직교 정도를 수식적으로 비교한다.

### IV. Seysen 격자 감소 기반 벡터 분산 기법(VP-SLR)

#### 1. 동시 감소를 통한 VP-SLR 기법

$\mathbf{I}_K$ 가  $K \times K$  단위 행렬이라고 할 때,  $\mathbf{W}^\# = [w_1^\#, \dots, w_K^\#]$ 는 베이스스 행렬  $\mathbf{W}$ 의 이중 베이스스이며  $(\mathbf{W}^\#)^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_K$ 을 만족시킨다. Seysen 격자 감소 기법(SLR : Seysen's lattice reduction)은 다음의 'Seysen 직교성(orthogonality)'을 바탕으로 한다<sup>[10]</sup>.

$$S(\mathbf{W}) = \sum_{k=1}^K \|w_k\|^2 \|w_k^\#\|^2. \quad (12)$$

동시에 기본 및 이중 베이스스를 감소시키기 위해 Seysen 직교성  $S(\mathbf{W})$ 는 두 베이스스를 함께 고려한다. 기본 베이스스  $\mathbf{W}$ 가 완벽히 직교인 경우  $S(\mathbf{W})$ 의 최소값은  $K$ 이다. SLR 기법은 두 베이스스에서 동시에 반복적으로  $S(\mathbf{W})$ 의 부분 최소값(local minimum)을 찾음으로써 전체 반복 수행 수와 감소된 베이스스의 직교성을 동시에 향상시킨다.

표 1에서 SLR 기법에 대한 의사 코드(pseudo code)를 나타냈다.  $O'$ 는 갱신된 벡터 및 행렬을 나타낸다.

선형 사전 부호화기( $\mathbf{G}$ )를 기본 베이스스( $\mathbf{W}$ )로, 유사 역행렬(pseudo inverse)의 켈레 전치  $((\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^H)^H$ 를 이중 베이스스( $\mathbf{W}^\#$ )로 이용한다. 기본 베이스스의  $i$ 번째 벡터와 이중 베이스스의  $j$ 번째 벡터를 갱신하기 위해서 감소된 Seysen 직교성( $S(\mathbf{W}_{i,j})$ )을 이용한다. 그리고 최적의 갱신 변수( $\lambda_{i,j}$ )는 Seysen 직교성( $S(\mathbf{W}_{i,j})$ )을 최대로 감소시키도록 다음과 같이 구할 수 있다<sup>[10]</sup>.

$$\lambda_{i,j} = \text{Rou}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{(w_j^\#)^H w_i^\#}{\|w_i^\#\|^2} - \frac{w_j^H w_i}{\|w_j\|^2}\right)\right), \quad (13)$$

이때  $\text{Rou}(\cdot)$ 는 반올림 함수이다. 식(13)을 통해서  $\lambda_{i,j} \neq 0$ 일 경우에 반드시  $S(\mathbf{W}_{i,j}) < S(\mathbf{W})$ 이 성립함을 알 수 있다. 즉, 모든  $(i,j)$ 에 대해서  $\lambda_{i,j} = 0$ 이 성립하면  $S(\mathbf{W})$ 은 더 이상 감소될 수 없고 이를  $\mathbf{W}$ 가 Seysen 감소되었다라고 한다. 왜냐하면,  $\lambda_{i,j}$ 는 기본 및 이중 베이스스의 Seysen 직교성 차이를 의미하는데  $\lambda_{i,j} = 0$ 는 두 베이스스 모두 거의 직교한 것을 나타내기 때문이다.

표 1. Seysen 격자 감소 기법 (SLR)  
Table 1. Seysen lattice reduction algorithm.

Initialization	
기본 베이스스 :	$\mathbf{W} = [w_1 \dots w_K] = \mathbf{G}$
이중 베이스스 :	$\mathbf{W}^\# = [w_1^\# \dots w_K^\#] = \mathbf{G}(\mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-H}$
$\mathbf{W}$ 의 그람 행렬 [12]:	$\mathbf{Z} = \mathbf{W}^H \mathbf{W}$
$\mathbf{W}^\#$ 의 그람 행렬 :	$\mathbf{Z}^\# = (\mathbf{W}^\#)^H \mathbf{W}^\#$
매개변수 갱신 :	$\lambda_{i,j} = \lceil z_{i,j} \rceil$
Seysen 직교성 $\Delta_{i,j} = S(\mathbf{W}) - S(\mathbf{W}_{i,j}^\#)$ 의 감소량 :	$= 2Z_{j,j}Z_{i,i}^\#(2R\lambda_{i,j}z_{i,j} -  \lambda_{i,j} ^2)$
단위 행렬식 정수 행렬 :	$\mathbf{B} = [b_1 \dots b_K] = \mathbf{I}_K$
Iteration	
Step 1.	$(p,q) = \arg \max_{(i,j)} \Delta_{i,j}$ 을 선택
Step 2.	$\mathbf{B}, \mathbf{W}$ , 그리고 $\mathbf{W}^\#$ 를 $\lambda_{p,q}$ 에 따라 갱신 <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>b'_p = b_p + \lambda_{p,q} b_q \rightarrow \mathbf{B} = [b_1 \dots b'_p \dots b_K]</math></li> <li>• <math>\rightarrow</math></li> <li>• <math>\mathbf{W} = [w_1 \dots w'_p \dots w_K]</math></li> <li>• <math>(w_{q,j}^\#) = w_{q,j}^\# - \lambda_{p,q}^* w_{p,j}^\# \rightarrow</math></li> <li>• <math>\mathbf{W}^\# = [w_1^\# \dots (w_q^\#) \dots w_K^\#]</math></li> </ul>
Step 3.	$\mathbf{Z}'$ 과 $(\mathbf{Z}^\#)'$ 을 갱신 <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mathbf{Z}'_{p,i} = (w'_p)^H w_i = Z_{s,i} + \lambda_{s,i}^* Z_{t,i} \ (i \neq p)</math></li> <li>• <math>Z'_{p,p} = \ w'_p\ ^2</math></li> <li>• <math>\mathbf{Z}'_{i,p} = \mathbf{Z}'_{p,i}</math></li> <li>• <math>\rightarrow</math></li> <li>• <math>(\mathbf{Z}^\#)'_{q,j} = (w_q^\#)^H w_j = Z^\#_{q,j} - \lambda_{s,i} Z^\#_{p,j} \ (j \neq q)</math></li> <li>• <math>(\mathbf{Z}^\#)'_{q,q} = \ (w_q^\#)'\ ^2</math></li> <li>• <math>(\mathbf{Z}^\#)'_{j,q} = (\mathbf{Z}^\#)'_{q,j}^*</math></li> </ul>
Step 4.	$\lambda_{i,j}$ 과 $\Delta_{i,j}$ 를 새롭게 갱신된 $\mathbf{Z}'$ 과 $(\mathbf{Z}^\#)'$ 의 성분들에 따라 갱신
Step 5.	만약 모든 $\lambda_{i,j}$ 값들이 0이면, 반복 수행을 정지한다. 그렇지 않으면 Step 1.부터 다시 반복 수행을 진행한다.

SLR 기법의 복잡도를 다음과 같이 줄일 수 있다.  $\Delta_{i,j} = S(\mathbf{W}) - S(\mathbf{W}_{i,j})$ 를  $S(\mathbf{W}_{i,j})$ 에 따른 Seysen 직교성의 감소량이라 하자. 매 반복 수행마다  $S(\mathbf{W})$ 을 최대한으로 감소시키기 위해 Step 1에서 다음과 같이  $\Delta_{i,j}$ 을 최대화 하는 기본 및 이중 베이스스 벡터  $(p,q)$ 를 선택한다

$$(p,q) = \arg \max_{(i,j)} \Delta_{i,j}. \quad (14)$$

$\Delta_{i,j}$ 의 갱신 복잡도를 줄이기 위해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j} &= \|w_i\|^2 \|w_i^\# \|^2 + \|w_j\|^2 \|w_j^\# \|^2 \\ &\quad - \|w_i'\|^2 \|w_i^\# \|^2 - \|w_j\|^2 \|w_j^\# \|^2 \\ &= 2\mathbf{Z}_{i,j} \mathbf{Z}_{i,i}^\# (2\text{Re}(\lambda_{i,j}^* z_{i,j}) - |\lambda_{i,j}|^2), \end{aligned} \quad (15)$$

이때  $\mathbf{w}_i' = \mathbf{w}_i + \lambda_{i,j} \mathbf{w}_j$ 는 갱신된 기본 베이스스 벡터,  $(\mathbf{w}_j^\#) = \mathbf{w}_j^\# - \lambda_{i,j}^* \mathbf{w}_i^\#$ 는 갱신된 이중 베이스스 벡터,  $\text{Re}(\cdot)$ 는 실수 부분,  $\mathbf{Z}_{i,j} = \mathbf{w}_i^H \mathbf{w}_j$ 는 그람(Gram) 행렬  $\mathbf{Z}$ 의  $(i,j)$  성분, 그리고  $\mathbf{Z}_{i,i}^\# = (\mathbf{w}_i^\#)^H \mathbf{w}_i^\#$ 는  $\mathbf{Z}^\#$ 의  $(i,i)$  성분을 각각 나타낸다<sup>[12]</sup>.

최종적으로 모든  $(i,j)$ 에 대해  $\lambda_{i,j} = 0$ 일 때  $S(\mathbf{W})$ 는 최소이고  $\mathbf{W}$ 도 Seysen 감소된다. 이를 통해 선형 전부호화기  $\mathbf{G}$ 는  $\mathbf{W}_{SLR} = \mathbf{W}$ 이고  $\mathbf{B}_{SLR} = \mathbf{B}^{-1}$ 일 때  $\mathbf{G} = \mathbf{W}_{SLR} \mathbf{B}_{SLR}$ 로 분리된다.

따라서, SLR 기법을 통한 분산 벡터는 다음과 같다.

$$l_{SLR}^* = -\mathbf{B}_{SLR}^{-1} \mathbf{Q}_{\tau Z^K} (\mathbf{B}_{SLR} \mathbf{u}) \quad (16)$$

## 2. VP-SLR과 VP-LLL의 비교

이 장에서 VP-SLR(vector perturbation with Seysen's lattice reduction)과 VP-LLL(vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction)기법들의 성능을 수식적으로 비교한다.

먼저, 베이스스의 직교성을 나타내는 직교 손실(orthogonality defect) 상수를 다음과 같이 정의한다<sup>[4]</sup>.

$$d(\mathbf{W}) = \frac{\prod_{k=1}^K \|w_k\|}{\det(L)}, \quad (17)$$

이때  $L$ 은  $L = L(\mathbf{W}) = \left\{ \sum_{k=1}^K x_k w_k \mid x_k \in \mathbb{R} \right\}$ 과 같이  $\mathbf{W}$ 에 의해 형성된 격자점 집합을 나타내고  $\det(L) = \sqrt{|\det(\mathbf{W}^H \mathbf{W})|}$ 는  $L$ 에 의한 최소 평행 사변형  $(P(\mathbf{W}) = \{ \sum_{k=1}^K a_k w_k, |a_k| \leq 1/2 \})$ 의 면적을 의미한다. 이것은 다음의 Hadamard 부등식을 만족한다<sup>[4]</sup>.

$$\|w_1\| \cdots \|w_K\| \geq \det(L) \quad (18)$$

이때 베이스스들이 직교일 경우 등식이 성립한다. 따라서, 직교 손실은 1보다 같거나 크며 격자 감소 기법에 의해 감소된 베이스스의 직교 정도를 나타낸다.

최악 경우를 고려해서 SLR과 LLL의 직교 손실을 직접적으로 다음과 같이 구한다.

LLL의 직교 손실은 다음과 같다.

$$d(\mathbf{W}_{LLL}) \leq \rho^{K(K-1)/4}, \quad (19)$$

이때  $\rho = 1/(\beta - 1/4)$ 는  $1/4 < \beta < 1$ 의 조건을 가지는 변수이다.  $\eta(L)$ 을 격자  $L$ 의 최소 길이 베이스스라 하자. 위 LLL의 직교 손실은 다음의 특성들을 통해서 구해진다<sup>[8]</sup>.

- $\|w_1\| \leq \rho^{(K-1)/2} \eta(L)$
- $\|w_1\| \leq \rho^{(K-1)/4} \det^{1/K}(L)$
- $\prod_{k=1}^K \|w_k\| \leq (\rho^{(K-1)/4})^K \det(L)$ .

다음으로 SLR의 직교 손실은 다음과 같다.

$$d(\mathbf{W}_{SLR}) \leq e^{c_1 K^{4/3}/2}, \quad (20)$$

이때  $c_1$ 은  $K$ 와 독립적인 양수이다. Hastad는 어떤 격자  $L$ 에서도 다음을 만족하는 베이스스 벡터가 존재함을 증명했다<sup>[11]</sup>.

$$\|w_i\| \leq e^{c_1 K^{1/3}} \eta(L) \quad (21)$$

위의 SLR의 직교 손실은 다음의 특성들을 통해서 구해졌다.

- $\|w_1\| \leq e^{c_1 K^{1/3}/2} \det^{1/K}(L)$
- $\prod_{k=1}^K \|w_k\| \leq (e^{c_1 K^{1/3}/2})^K \det(L)$ .

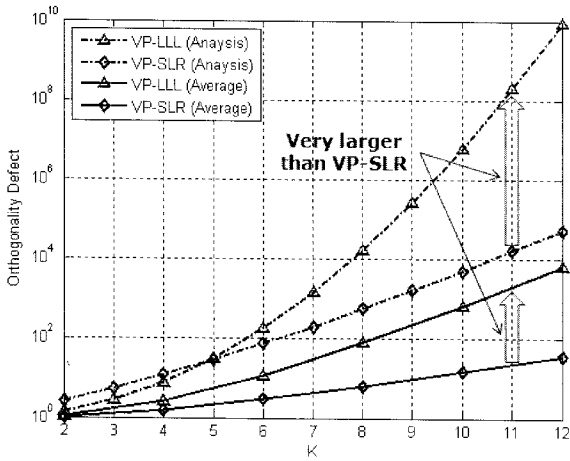


그림 1. 직교 손실 비교(VP-LLL : vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction, VP-SLR : vector perturbation with Seysen's lattice reduction)

그림 1. Orthogonality defect.

그림 1은 VP-SLR과 VP-LLL의 직교 손실을 수식적 분석 결과 및 실험적 평균 결과에 따라 비교한다.

VP-LLL에서  $\beta = \frac{3}{4}$ <sup>[8]</sup>로 VP-SLR에서  $c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$ <sup>[11]</sup>로 결정했다. 수식 결과는 최악 경우를 고려했기 때문에 실험 결과의 상한 범위(upper bound)를 나타낸다. 그림에 따르면 VP-SLR은 VP-LLL에 비해 직교 손실이 훨씬 적는데 이것은 VP-LLL이 기본 베이스만을 이용하는데 반해 VP-SLR은 기본과 이중 베이스를 동시에 이용했고 이것이 더 직교 베이스를 만들어 낸다는 것을 보여 준다.

### V. 모의실험 결과

다중 사용자 다중 입출력 채널로써  $K \times K$  준정적 채널이 이용되었고 각 채널 변수는 복소 표준 분포 ( $CN(0,1)$ )를 가진다.

그림 2는 송신 안테나(K)가 4개이고 16-QAM을 사용할 때 제안하는 VP-SLR기법과 VP-LLL 기법 및 선형 전부호화기들의 비트 오류율(BER)을 비교한다. VP-SLR과 VP-LLL은 기본 베이스로 WF를 이용한다. 높은 SNR(signal-to-noise ratio)에서 선형 전부호화기들은 공간 다이버시티를 얻지 못하는데 이것은 정규화 상수의 증가로 인한 수신 SNR 손실이 발생하기 때문이다. 이에 반해 VP-SLR과 VP-LLL은 사용자들

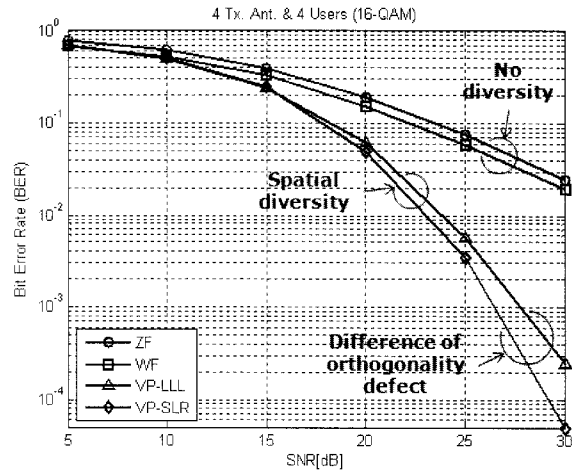


그림 2. 16QAM을 이용하는 4전송 안테나, 4명의 사용자에 대한 채널에서 BER 성능 비교(ZF : zero forcing, WF : Wiener filter, VP-LLL : vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction, VP-SLR : vector perturbation with Seysen's lattice reduction)

그림 2. Comparison of BER performances in 4 antennas, 4 users MIMO system with 16QAM.

의 채널 정보를 동시에 이용하기 때문에  $K=4$ 의 다이버시티 이득을 얻는다. 그런데, SNR이 15dB이상일 때 같은 SNR에서 VP-SLR은 VP-LLL에 비해 더 낮은 BER을 얻는다. 이것은 IV-2장에서 설명했던 것과 같이 VP-SLR이 VP-LLL에 비해 직교 손실이 훨씬 적어서 추가적인 다이버시티 이득을 얻기 때문이다.

그림 3은  $K=12$ 일 때 VP-SLR과 VP-LLL의 전송량을 보여준다. 전송량은 SINR(signal-to-interference and noise ratio)의 추정치를 통해서 다음과 같이 구할 수 있다<sup>[2]</sup>.

$$C \approx K \log_2(1 + SINR). \tag{22}$$

채널 전송 용량(sum capacity)은 성능 비교를 위해서 표시되었다<sup>[1]</sup>. 20dB이상의 SNR에서 VP-SLR과 VP-LLL의 전송량이 근접해지는데 이것은 높은 SNR일 경우 직교 손실로 인한 잡음 증폭이 매우 적기 때문이다. 20dB이하에서는 VP-SLR이 더 좋은 전송량을 가진다. 이 전송량 이득은 직교 손실의 영향이 전송량에 영향을 미치는 것을 의미하며, 특히  $K$ 가 클 경우에 VP-SLR의 직교 손실이 VP-LLL에 비해 훨씬 적기 때문이다.

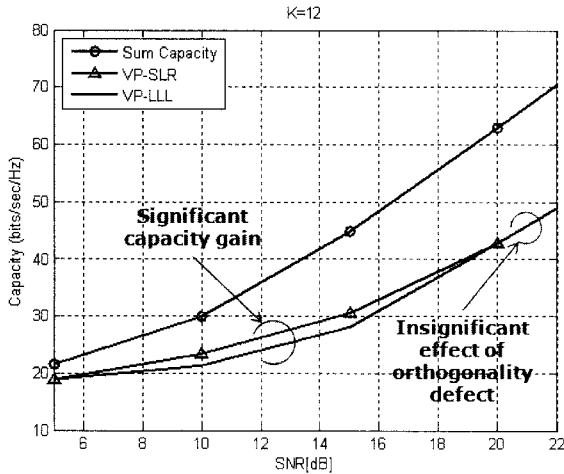


그림 3. 전송량 비교(Sum Capacity : 모든 사용자의 최대 전송량 합, VP-SLR : vector perturbation with Seysen's lattice reduction, VP-LLL : vector perturbation with Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction, K : 전송 안테나 및 사용자 수)

그림 3. Comparison of capacity performances.

## VI. 결 론

본 논문은 다중 사용자 다중 입출력 시스템에서 Seysen 격자 감소 기법을 이용한 벡터 분산 기법 (VP-SLR : vector perturbation with Seysen's lattice reduction)을 제안했다. 기본 및 이중 베이스의 동시 감소를 통해 전송 전력이 제한될 때 수신 SNR을 최대화하는 최적 분산 벡터를 찾을 수 있다. 분석 및 실험 결과는 VP-SLR이 기존 기법들에 비해 적은 부호화 복잡도를 가지고, 또한 낮은 BER과 높은 전송량을 가짐을 보여주었다.

## 참고 문헌

- [1] G. Caire and S. Shamai, "On the Achievable Throughput of a Multi-Antenna Gaussian Broadcast Channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 43, pp. 1691-1706, Jul. 2003.
- [2] B. M. Hochwald, C. B. Peel, and A. L. Swindlehurst, "A Vector-Perturbation Technique for Near-Capacity Multi-Antenna Multi-User Communication-Part II: Perturbation," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 53, no. 3, pp. 537-544, Jan. 2005.
- [3] C. Windpassinger, R. F. H. Fischer, and J. B. Huber, "Lattice-Reduction-Aided Broadcast

- Precoding," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 52, no. 12, pp. 2057-2060, Dec. 2004.
- [4] M. Taherzadeh, A. Mobasher, and A. K. Khandani, "Communication over MIMO Broadcast Channels Using Lattice-Basis Reduction," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4567-4582, Dec. 2007.
- [5] P. Viswanath and D. Tse, "Sum Capacity of the Vector Gaussian Broadcast Channel and Uplink-Downlink Duality," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, pp. 1912-1921, Aug. 2003.
- [6] C. B. Peel, B. M. Hochwald, and A. L. Swindlehurst, "A Vector-Perturbation Technique for Near-Capacity Multi-Antenna Multi-User Communication-Part I: Channel Inversion and Regularization," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 53, no. 1, pp. 195-202, Jan. 2005.
- [7] M. O. Damen, A. Chkief, and J.-C. Belfiore, "Lattice Code Decoder for Space-Time Codes," *IEEE Commun. Letter*, vol. 4, pp. 161-163, May 2000.
- [8] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, and L. Lovasz, "Factoring Polynomials with Rational Coefficients," *Math Ann.*, vol. 261, pp. 515-534, Jul. 1982.
- [9] L. Babai, "On Lovasz Lattice Reduction and the Nearest Lattice Point Problem," *Combinatorica*, vol. 6, no. 1, pp. 1-13, May 1986.
- [10] M. Seysen, "Simultaneous Reduction of a Lattice Basis and its Reciprocal Basis," *Combinatorica*, vol. 13, pp. 363-376, 1993.
- [11] J. Hastad and J. C. Lagarias, "Simultaneously Good Bases of a Lattice and its Reciprocal Lattice," *Math Ann.*, vol. 287, pp. 163-174, 1990.
- [12] J. Shawe-Taylor, C. K. I. Williams, N. Cristianini, and J. Kanola, "On the Eigenvalue of the Gram Matrix and the Generalization Error of Kernel-PCA," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 7, pp. 2510-2522, Jul. 2005.

저 자 소 개



송 형 준(정회원)  
 2003년 연세대학교  
 전기전자공학과 학사졸업  
 2005년 연세대학교  
 전기전자공학과 석사졸업  
 2005년~현재 연세대학교  
 전기전자공학과 박사과정

<주관심분야 : 이동통신시스템, MIMO, 멀티홉  
 시스템>



홍 대 식(평생회원)  
 1990년 Purdue University  
 Electrical Engineering  
 박사 졸업  
 1991년~현재 연세대학교  
 전기전자 공학과 교수

<주관심분야 : 디지털통신, 통신신호처리, 4G시스  
 템, OFDM 시스템>