

대용변수를 이용한 \bar{X} 관리도의 경제적 설계

이태훈^{*†}·이재훈^{**}·이민구^{**}·이주호^{**}

^{*} 한국원자력연구원 수소생산원자로기술개발부

^{**} 충남대학교 정보통계학과

Economic Design of \bar{X} Control Chart Using a Surrogate Variable

Tae-Hoon Lee^{*†}·Jae-Hoon Lee^{**}·Min-Koo Lee^{**}·Jooho Lee^{**}

^{*} Nuclear Hydrogen Reactor Technology Development Division, Korea Atomic Energy Research Institute

^{**} Department of Information & Statistics, Chungnam National University

Key Words : \bar{X} Control Chart, Performance Variable, Surrogate Variable, Economic Design

Abstract

The traditional approach to economic design of control charts is based on the assumption that a process is monitored using a performance variable. However, various types of automatic test equipments recently introduced as a part of factory automation usually measure surrogate variables instead of performance variables that are costly to measure. In this article we propose a model for economic design of a control chart which uses a surrogate variable that is highly correlated with the performance variable. The optimum values of the design parameters are determined by maximizing the total average income per cycle time. Numerical studies are performed to compare the proposed \bar{X} control charts with the traditional model using the examples in Panagos *et al.* (1985).

1. 서론

관리도는 역사적으로 1920년대 Shewhart가 제품 품질의 변동을 관리하기 위한 통계적 품질관리의 개념을 제창하면서 사용되기 시작하였다. 원래 관리도는 3σ 관리한계선으로 대표되는 경험적인 원리에 그 기초를 두고 있으나, Duncan(1956)이 최초로 \bar{X} 관리도의 경제적인 모형을 제시한 이래 관리도의 경제적 설계에 관한 연구가 지속적으로 이루어져 오고 있다.

제조과정 중에 발생할 수 있는 여러 상황에 대하여 Duncan 모형에 대한 변형 모형이 제시되었으나, 그 대부분은 가정이나 최적화 방법의 변형으로 귀착되었다.

이러한 취지에서 Lorenzen과 Vance(1986)는 통계적 방법과 무관하게 모든 관리도에 적용할 수 있는 범용 공정모형을 제시하였다. Woodall(1986)은 경제적으로 설계된 관리도의 단점으로 통계적 성능이 간과되었다는 점을 지적하고, 이에 제 1종 오류, 제 2종 오류 및 평균 런 길이(ARL)와 같은 통계적 성질을 경제적 설계와 결합하여 제시하였다. 관리도의 경제적 설계에 관한 최근까지의 연구 동향은 Montgomery(2004)에 잘 요약되어 있다.

지금까지 관리도의 경제적 설계에 관한 모든 연구들은 검사의 대상이 되는 제품의 성능변수를 직접 측정함을 전제로 하였다. 그러나 최근 공장자동화가 산업현장에 널리 확산됨에 따라 제품의 검사방법도 성능변수를 직접 측정하는 대신에 자동검사장치를 이용하여 성능변수와 상관관계가 높은 대용변수의 특성치를 검사하는 방법이 많이 사용되고 있다. 이러한 자동검사장치를

† 교신저자 jhlee@stat.cnu.ac.kr

※ 이 논문은 2008년도 충남대학교 학술연구비의 지원에 의하여 연구되었음

이용한 검사방법은 검사비용의 절감과 검사의 효율을 높일 수 있는 반면, 양품을 불량품으로 또는 불량품을 양품으로 판단하는 오류를 수반하게 된다.

대용변수를 이용한 검사의 기준값을 설정하는 문제에 대해서는 그 동안 Owen 등(1976) 이후에 Li와 Owen(1979), Wong 등(1985), Boys와 Dunsmore (1987), Kwon 등(1999), 그리고 Lee(2000) 등에 의해 많은 연구가 진행되었다. 그러나 관리도의 설계 문제는 최근까지 한 개 이상의 성능변수를 이용한 연구에 국한되어 있다가 Lee와 Kwon(1999)에 의해 성능변수와 대용변수를 함께 이용한 \bar{X} 관리도의 경제적 설계에 대한 연구가 처음으로 소개되었고, Costa와 De Magalhães(2005)가 Lee와 Kwon(1999)이 제시한 모형을 변형한 경제적 모형을 제시하고 마코프 연쇄를 이용하여 최적해를 구한 바 있다. 이들의 연구는 생산공정에서 성능변수와 대용변수를 번갈아 가면서 사용할 수 있다는 것을 가정하였으나, 대부분의 산업 현장에서는 성능변수와 대용변수를 교대적으로 사용하는 것이 불가능하거나 번거로울 수 있다. 이러한 경우에는 성능변수의 특성을 잘 대변할 수 있는 대용변수를 이용한 공정관리가 보다 효율적이며 만족스러운 결과를 가져올 수 있다.

이에 본 논문에서는 성능변수 대신에 대용변수를 활용하여 공정을 모니터링할 경우 경제적 관점 하에서 관리도를 설계하는 방법을 제안하고자 한다. 2절에서는 Duncan(1956)의 모형을 근거로 하여 대용변수를 활용한 새로운 경제적 모형을 제안하고, 3절에서는 제안된 모형을 수치 예제를 통하여 기존의 모형과 비교하며, 4절에서는 공정 및 비용 모수의 변화에 따른 관리도 설계모수의 민감도 분석을 수행한다.

2. 기본모형

Duncan(1956)의 경제적 설계에서는 관리상태에서 시작된 공정이 이상 원인에 의해서 관리이탈상태로 전이되고, 이상발생신호에 의하여 이상 원인의 조사 및 제거를 완료하는 시점까지를 한 주기로 한다. Duncan의 모형에서는 현재 공정은 평균이 μ_0 이고 분산이 σ_y^2 인 관리상태에 있으며 하나의 이상 원인이 발생하면 공정 평균이 $\pm c\sigma_y$ 만큼 변화한다. 부분군의 크기는 n_y , 부분군 추출간격은 h 시간이며 공정의 변화를 탐지하기 위한 관리도의 관리한계선은 $\mu_0 \pm k_a(\sigma_y/\sqrt{n_y})$ 이다. 관

리도 상의 한 점이 관리한계선을 벗어나면 이상 원인이 발생했다고 판단하고 그 원인을 찾는다. 이상 원인을 찾는 동안에도 공정은 중지되지 않고 계속 진행된다고 가정한다. 위와 같은 상황에서 단위시간 당 평균비용을 최소화하는 설계모수값 n_y, k_a, h 를 구하게 된다.

2.1 가정 및 기호

본 논문에서 관리도의 경제적 설계를 위한 기본 가정과 시간 및 비용 요소는 다음과 같다.

i) 기본 가정

- ① 공정은 관리상태에서 시작된다.
- ② 이상 원인의 발생시간은 평균이 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다.
- ③ 관리이탈상태에서는 이상 원인을 완전히 제거한 후에 관리상태로 전이한다.
- ④ 대용변수와 성능변수는 평균이 (μ_x, μ_y) 이고 분산이 (σ_x^2, σ_y^2) 이며 상관계수가 ρ 인 이변량 정규 분포를 따른다.

ii) 시간 요소

- ① 관리상태 하의 시간 : 공정은 항상 관리상태에서 시작하므로 관리상태 시간은 평균이 $1/\lambda$ 인 지수 분포를 따른다.
- ② 이상상태 하의 시간 : 이상 원인의 발생으로 인하여 관리 이탈상태로 있는 시간이다.
- ③ 거짓 경보(false alarm)에 의한 시간 : 실제로 이상 원인이 발생하지 않았을 때 이상 원인의 발생 신호가 거짓 경보임을 판단하는 데 걸리는 시간이다.
- ④ 이상 원인을 찾고 제거하는 시간 : 실제로 공정에 이상 원인이 발생하였을 때 이를 추적, 판단 및 제거 하는 데 필요한 시간이다.

iii) 비용 요소

- ① 표본비용 : 표본의 추출과 시험에 드는 비용으로 표본의 크기에 비례하는 변동비용과 표본 크기에 관계없이 일정한 고정비용이 있다.
- ② 이상 원인의 발생신호에 의한 비용 : 이상 원인의 발생 유무를 판단하고 제거하기 위해 발생하는 비용으로 잘못된 신호로 인한 비용과 이상 원인의

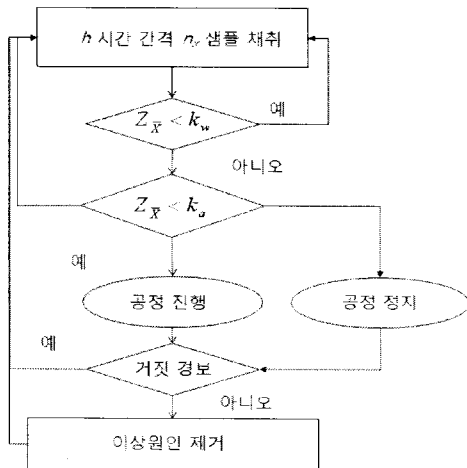
발견 및 제거에 드는 비용이 있다.

- ③ 불량품의 발생에 의한 비용 : 이상 원인에 의해 발생한 불량품의 재가공 또는 폐기에 드는 비용이다.
- ④ 관리상태 하에서의 순수입 : 관리상태 하에서 공정 운영 시에 발생하는 수입이다.
- ⑤ 이상상태 하에서의 순수입 : 이상상태 하에서도 공정은 운영되므로 수입이 발생한다. 거짓 경보로 인한 이상상태일 경우엔 양의 수입이 발생하고, 실제 이상상태일 경우에는 부의 수입이 발생한다.

본 절에서 제안하는 \bar{X} 관리도의 적용은 다음과 같은 순서로 진행된다.

- ① 매 h 시간 간격마다 n_x 개의 표본을 추출한다.
- ② 표본평균의 표준화값 $Z_{\bar{X}}$ 가 경고한계선 및 조치한계선 이내에 타점되는지 확인한다.
- ③ ②에서 경고한계선 이내에 타점되면 ①의 과정을 반복한다.
- ④ ②에서 경고한계선과 조치한계선 사이에 타점되면 공정을 진행시킨다.
- ⑤ ②에서 조치한계선을 벗어나면 공정을 중지한다.
- ⑥ ④와 ⑤의 경보가 거짓 경보인 경우 ①의 과정을 반복한다.
- ⑦ ④와 ⑤의 경보가 실제 경보인 경우 이상 원인을 제거한 후 ①의 과정을 반복한다.

위의 진행 순서를 그림으로 나타내면 <그림 1>과 같다.



<그림 4> 제안된 \bar{X} 관리도의 순서도

<그림 1>과 같은 \bar{X} 관리도를 대용변수에 적용하여 최적의 경제적 설계를 구하고자 한다. 모형의 구축에 사용되는 기호와 그 의미는 다음과 같다.

- b'_1 : 이상 원인을 찾는 시간
- b''_1 : 이상 원인을 제거하는 시간
- b_2 : 거짓 경보를 확인하는 시간
- b_3 : 표본을 취하고 해석하는 시간
- a_1 : 이상 원인을 찾고 제거하는 비용
- a'_2 : 거짓 경보를 확인하는 비용
- a''_2 : 거짓 경보로 인한 제품손실비용
- a_3 : 표본추출 고정비용
- a_4 : 표본추출 가변비용
- i_1 : 관리상태 하에서의 단위시간 당 순수입
- i_2 : 이상상태 하에서의 단위시간 당 순수입
- R_a : 공정이 조치영역에 타점 될 때까지의 거짓 경보의 횟수
- R_w : 공정이 경고영역에 타점 될 때까지의 거짓 경보의 횟수
- I : 단위주기 당 순수입
- I' : 단위주기 당 총수입
- C_1 : 단위주기 당 표본추출비용
- C_2 : 단위주기 당 이상 원인 발견 및 제거 비용
- τ : 두 인접 표본 사이의 이상 원인이 발생할 기대 시간
- α_a : 공정이 안정상태에 있을 때 조치신호가 나타날 확률
- α_w : 공정이 안정상태에 있을 때 경고신호가 나타날 확률
- p_1 : 공정이 이상상태에 있을 때 조치신호가 나타날 확률
- p_2 : 공정이 이상상태에 있을 때 경고신호가 나타날 확률
- k_a : 조치한계선 계수
- k_w : 경고한계선 계수
- h : 부분군의 추출간격
- n_y : 성능변수 부분군의 크기
- n_x : 대용변수 부분군의 크기
- T : 총 주기시간

2.2 기대 단위주기시간

단위주기시간은 관리상태 하에서의 시간, 이상상태 하에서의 시간, 거짓 경보로 인해 경과하는 시간, 그리고 이상 원인을 찾고 제거하는 시간으로 구성된다.

단위주기시간

$$= \text{관리상태 하에서의 기간} + \text{이상상태 하에서의 기간} + \text{거짓 경보로 인해 경과한 시간} + \text{이상 원인을 찾고 제거하는 시간} \quad (1)$$

총 주기시간을 구하기 위해서 먼저 공정이 이상상태에 있을 때 조치신호가 나타날 확률 p_1 과 공정이 이상상태에 있을 때 경고신호가 나타날 확률 p_2 를 구하면

$$p_1 = 1 - \Phi\left(k_a - \lambda_2 c \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{n_x}\right) + \Phi\left(-k_a - \lambda_2 c \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{n_x}\right), \quad (2)$$

$$p_2 = 1 - \Phi\left(k_w - \lambda_2 c \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{n_x}\right) + \Phi\left(-k_w - \lambda_2 c \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{n_x}\right) - p_1 \quad (3)$$

이다. 여기서 $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수이고, $\lambda_2 = \{\rho^2 \sigma_{x|y}^2 / ((1 - \rho^2) \sigma_y^2)\}^{1/2}$ 이며 ρ 는 X 와 Y 간의 상관계수, $\sigma_{x|y}^2$ 는 $Y = y$ 가 주어졌을 때 X 의 조건부확률밀도함수의 분산이다.(자세한 것은 Lee(2000)를 참조)

공정이 안정 상태에 있을 때 조치신호가 나타날 확률 α_a 및 경고신호가 나타날 확률 α_w 는 각각

$$\alpha_a = 2(1 - \Phi(k_a)) \quad (4)$$

$$\alpha_w = 2(1 - \Phi(k_w)) - \alpha_a \quad (5)$$

이다.

각 항목별로 기대 시간을 구하면 다음과 같다.

i) 관리상태 하에서의 기대 시간 :

$$1/\lambda \quad (6)$$

ii) 이상상태 하에서의 기대 시간

a) 표본평균 \bar{X} 가 조치영역에 타점될 경우의 기대

시간 : 공정이 이상 원인 발생 바로 전의 표본추출시점으로부터 이상발생신호까지의 시간과 표본을 취하고 해석하는 시간의 합과 같다.

$$\frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x \quad (7)$$

b) 표본평균 \bar{X} 가 경고영역에 타점될 경우의 기대 시간 : 공정이 이상 원인 발생 바로 전의 표본추출시점으로부터 이상발생신호까지의 시간과 표본을 취하고 해석하는 시간의 합에 이상 원인을 찾는 시간을 더한 것과 같다.

$$\frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + b'_1 \quad (8)$$

조치영역에 타점될 확률은 $\frac{p_1}{p_1 + p_2}$, 경고영역에 타점될 확률은 $\frac{p_2}{p_1 + p_2}$ 이다. 따라서 이상상태 하에서의 기대 시간은 식 (7)과 식 (8)에 의해서

$$\begin{aligned} & \frac{p_1}{p_1 + p_2} \left(\frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x \right) \\ & + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \left(\frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + b'_1 \right) \\ & = \frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + \frac{p_2 b'_1}{p_1 + p_2} \end{aligned} \quad (9)$$

이 된다. 여기서 이상 원인 발생 바로 전의 표본 추출시점과 이상 원인 발생시점 사이의 시간의 기대값 τ 는 이상 원인의 발생시간이 평균 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다는 가정으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda h) e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})} \cong \frac{h}{2} - \frac{\lambda h^2}{12} \quad (10)$$

iii) 거짓 경보로 인해 경과한 기대 시간

a) 표본평균 \bar{X} 가 조치영역에 타점될 경우의 기대 시간 : 거짓 경보를 확인하는 시간과 거짓 경보가 발생하는 횟수의 곱과 같으므로

$$\begin{aligned} b_2 \cdot E(R_a) &= b_2 \cdot \alpha_a \sum_{i=0}^{\infty} \int_{ih}^{(i+1)h} i \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= b_2 \cdot \frac{\alpha_a e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \approx \frac{\alpha_a b_2}{\lambda h} \end{aligned} \quad (11)$$

이다.

- b) 표본평균 \bar{X} 가 경고영역에 타점될 경우의 기대 시간 : 제안된 \bar{X} 관리도에서는 경고영역에 타점될 경우 공정을 진행하므로 0이다.

따라서 거짓 경보로 인한 시간의 기대값은

$$\frac{\alpha_a b_2}{\lambda h} \quad (12)$$

가 된다.

- iv) 이상 원인을 찾고 제거하는 기대 시간
 a) 표본평균 \bar{X} 가 조치영역에 타점될 경우의 기대 시간 : 이상 원인을 찾고 그것을 제거해야 하므로 $b'_1 + b''_1$ 이다.
 b) 표본평균 \bar{X} 가 경고영역에 타점될 경우의 기대 시간 : 이상 원인을 찾는 시간만 고려하므로 b''_1 이다.

따라서 이상 원인을 찾고 제거하는 시간의 기대값은

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2} (b'_1 + b''_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} b''_1 = \frac{p_1 b'_1}{p_1 + p_2} + b''_1 \quad (13)$$

이 된다.

그러므로 총 주기가 시간은 식(6), 식(9), 식(12) 및 식(13)에 의해서

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x \\ &+ \frac{p_2 b'_1}{p_1 + p_2} + \frac{\alpha_a b_2}{\lambda h} + \frac{p_1 b'_1}{p_1 + p_2} + b''_1 \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + b'_1 + b''_1 + \frac{\alpha_a b_2}{\lambda h} \quad (14) \end{aligned}$$

가 된다.

2.3 단위주기 당 기대 순이익

단위주기 당 순이익은 단위주기 당 총수입에서 단위주기 당 표본추출비용과 단위주기 당 이상 원인을 찾고 제거하는 비용을 제외한 값이다.

$$E(I) = E(T) - E(C_1) - E(C_2) \quad (15)$$

각 항목별 수입 및 비용의 기대값은 다음과 같다.

- i) 단위주기 당 총기대수입

단위주기 당 총기대수입은 공정이 관리상태일 때의 기대 수입과 공정이 이상상태일 때의 기대 수입의 합과 같다.

$$E(I) = \frac{i_1}{\lambda} + i_2 \left(\frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + \frac{p_2 b'_1}{p_1 + p_2} \right) \quad (16)$$

- ii) 단위주기 당 기대 표본비용

단위주기 당 기대 표본비용은 표본의 고정비용과 가변비용의 합에 표본추출횟수의 기대값을 곱한 것과 같다. 그런데

표본추출횟수의 기대값

$$\begin{aligned} &= ARL / h \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + \frac{p_2 b'_1}{p_1 + p_2} \right) \end{aligned}$$

이므로 단위주기 당 기대 표본비용은 다음과 같다. 여기서 ARL 은 관리도상에서 한 점이 관리한계선 밖에 타점될 때까지 타점된 점들의 수를 나타낸다.

$$\begin{aligned} E(C_1) &= \frac{a_3 + a_4 n_x}{h} \\ &\cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + \frac{p_2 b'_1}{p_1 + p_2} \right) \quad (17) \end{aligned}$$

- iii) 단위주기 당 이상 원인 제거 기대비용

단위주기 당 이상 원인 제거 기대비용은 경고영역과 조치영역에 타점이 되었을 때 각각 이상 원인을 제거하는데 드는 기대비용의 합과 공정이 안정상태에 있을 때 조치신호가 나타날 확률 및 경고신호가 나타날 확률에 각각 거짓 경보로 인해 발생하는 기대비용을 곱한 값을 합한 것과 같다. 즉,

$$\begin{aligned} E(C_2) &= \frac{p_1}{p_1 + p_2} (a_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} (a_1) \\ &+ (a'_2 + a''_2) E(R_a) + (a'_2) E(R_w) \\ &= a_1 + a_2 \frac{\alpha_a + \alpha_w}{\lambda h} + a''_2 \frac{\alpha_a}{\lambda h} \quad (18) \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$E(R_w) = \alpha_w \sum_{i=0}^{\infty} \int_{ih}^{(i+1)h} i \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{\alpha_w e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}} \approx \frac{\alpha_w}{\lambda h}$$
(19)

이다.

따라서 단위주기 당 순수익은 식 (16), 식 (17) 및 식 (18)에 의해서

$$E(I) = \frac{i_1}{\lambda} + i_2 \left(\frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + \frac{p_2 b_1'}{p_1 + p_2} \right)$$

$$- \frac{a_3 + a_4 n_x}{h} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{p_1 + p_2} - \tau + b_3 n_x + \frac{p_2 b_1'}{p_1 + p_2} \right)$$

$$- \left(a_1 + a_2 \frac{\alpha_a + \alpha_w}{\lambda h} + a_2' \frac{\alpha_a}{\lambda h} \right)$$
(20)

가 된다.

단위시간 당 기대 이익 $E(A)$ 는 단위주기 당 순수익 대 단위주기시간의 비이므로 앞의 식 (14)와 식 (20)을 이용하여 나타낼 수 있다.

$$E(A) = E(I) / E(T)$$
(21)

대용변수를 이용한 \bar{X} 관리도의 최적 설계모수값 (h, n_x, k_w, k_a) 는 $E(A)$ 를 최대로 하는 값이다.

3. 수치 예제 및 분석

본 연구에서 제시한 모형은 성능변수를 사용하는 것이 불가능하거나 비현실적인 상황을 전제로 개발된 모형이므로 성능변수를 사용한 최적설계와의 포괄적인 비교나 성능변수와 대용변수를 교대적으로 사용하는 Lee와 Kwon(1999)의 모형 및 Costa와 De Magalhães (2005)의 모형과의 비교는 시도하지 않았다. 그 대신에 본 절에서는 Panagos 등(1985)에서 인용한 32가지 예제를 통하여 2절에서 제시한 모형을 사용한 최적설계를 기존의 성능변수를 사용한 최적설계와 비교해 보기로 한다.

Lee 등(2001)은 성능변수 및 대용변수를 이용한 검사 기준값의 설정 문제에 시멘트 공장의 포장공정의 예를 활용한 바 있는데, 본 논문에서도 이를 활용하기로 한다. 시멘트 공장의 포장공정은 크게 시멘트의 충전공정과 검사공정으로 이루어진다. 각 충전공정에서 생산된 시멘트 포대는 컨베이어 벨트를 통하여 선적된

다. 컨베이어 벨트 밑에는 자동무게측정장치가 있어 시멘트 포대의 무게(Y)를 측정한다. 이때 자동무게 측정장치는 시멘트 포대의 무게를 직접 측정하는 것이 아니라 이와 양의 상관관계에 있는 적재전지(load cell)의 전압(X)을 측정한다. 이론적인 연구와 과거의 경험을 통해서 X 와 Y 의 분포는 이변량 정규분포를 따른다는 것을 알고 있다. 충전공정에서 시멘트 포대의 무게는 20Kg으로 설정되어 있으며 이를 관리도를 사용하여 모니터링한다. Y 의 평균은 20kg이고 분산은 $\sigma_y^2 = (1.25kg)^2$ 이며 $Y=y$ 일때 X 의 조건부 분포는 평균이 $4.0 + 0.08y$, 분산이 $(0.05mA)^2$ 인 정규분포를 따르고, X 의 분산은 $\sigma_x^2 = (0.112mA)^2$ 이라고 가정한다. 이러한 상황에서 대용변수 X 를 이용한 관리도를 설계하고자 한다.

Panagos 등(1985)이 가정한 모수값은 본 논문에서는 다음과 같이 변형하여 사용한다.

- i) 거짓 경보로 인한 비용 a_2 는 본 예제에서는 거짓 경보를 확인하는 비용 a_2' 와 거짓 경보로 인한 제품손실비용 a_2'' 으로 구분하여 적용하며, 그 값은 $a_2' = a_2'' = 0.5a_2$ 를 가정한다.
- ii) 이상 원인을 찾고 제거하는 시간 b_1 은 본 예제에서는 이상 원인을 찾는 시간 b_1' 과 이상 원인을 제거하는 시간 b_1'' 으로 구분하여 적용하며, 그 값은 $b_1' = b_1'' = 0.5b_1$ 를 가정한다.
- iii) 표본추출비용 a_4 는 본 예제에서는 대용변수를 이용하여 공정을 관리하므로, 그 값을 10분의 1 수준 값으로 가정한다.

<표 1>은 Panagos 등(1985)에서 사용된 32 가지 예에 위의 가정을 적용할 경우의 비용 및 공정 모수값을 보여 준다. <표 1>의 예에 대하여 본 절에서 제안한 대용변수를 이용한 \bar{X} 관리도의 경제적 설계를 구한 결과는 <표 2>와 같다. 최적 설계값은 Matlab 2007을 사용하여 구하였다.

<표 2>로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- i) ρ 가 0.9일 경우에는 예 14와 예 26을 제외하고는 대용변수를 사용한 모형이 성능변수를 사용한 모형보다 단위주기 당 기대 순수익이 큰 반면, ρ 가 0.6일 경우에는 16개의 예에서는 대용변수를 사용한 모형이, 나머지 16개의 예에서는 성능변수를 사용한 모형이 단위주기 당 기대 순수익이 큰 것으로 나타났다. 따라서 두 변수간의

상관관계가 매우 밀접한 경우에 한하여 대용변수의 사용이 정당화될 수 있을 것이다.

- ii) ρ 가 0.9일 경우 22개의 예에서 부분군의 크기 n_x 값은 n_y 값에 비하여 작거나 같은 수준으로 나왔으며, 나머지 예에서는 n_x 가 n_y 에 비해 1~2 정도 더 크게 나왔다.
- iii) 예 13과 예 29에서는 표본추출 고정비용 a_3 및 표본추출 가변비용 a_4 가 커서 n_x 가 1로 작게 나왔다. 또한 n_x 값이 작아서 얻을 수 있는 정보가 줄었기 때문에 k_w 가 0.001로 극소값으로 도출되었고 k_a 의 값도 커져서 경고 영역의 범위

$(k_a - k_w)$ 도 5σ 수준 이상으로 나왔다. 이는 거짓 경보 확인 비용 a_2' 및 거짓 경보로 인한 제품 손실비용 a_2'' 가 다른 예에 비해 상대적으로 작아서, 거짓 경보가 발생하더라도 표본을 추출하는 것이 유리하기 때문일 것이다.

- iv) 관리상태 하에서의 단위시간 당 순수입 i_1 이 큰 경우엔 k_a 값이 프로그램에서 가질 수 있는 최대 값까지 나왔다. 이는 거짓 경보 여부를 확인하는데 드는 비용보다는 공정을 진행시키면서 얻는 수입이 상대적으로 크기 때문일 것이다.

<표 1> 가정한 비용 및 공정 모수값

예제	λ	c	i_1	i_2	a_1	a_2'	a_2''	a_3	a_4	b_1'	b_1''	b_2	b_3
1	0.01	1	50	0	45	25	25	0.5	0.1	1.53	1.53	4.05	0.05
2	0.01	1	150	50	350	250	250	5.0	1.0	1.53	1.53	4.05	0.05
3	0.01	2	50	1	260	25	25	5.0	1.0	2.00	2.00	41.00	0.05
4	0.01	2	150	50	135	250	250	0.5	0.1	2.00	2.00	41.00	0.05
5	0.05	1	150	100	45	250	250	5.0	0.1	2.00	2.00	41.00	0.05
6	0.05	1	50	-50	350	25	25	0.5	1.0	2.00	2.00	41.00	0.05
7	0.05	2	150	100	260	250	250	0.5	1.0	1.53	1.53	4.05	0.05
8	0.05	2	50	-50	135	25	25	5.0	0.1	1.53	1.53	4.05	0.05
9	0.01	1	50	0	135	250	250	0.5	1.0	2.00	2.00	5.00	0.50
10	0.01	1	150	50	260	25	25	5.0	0.1	2.00	2.00	5.00	0.50
11	0.01	2	50	0	350	250	250	5.0	0.1	1.53	1.53	40.05	0.50
12	0.01	2	150	50	45	25	25	0.5	1.0	1.53	1.53	40.05	0.50
13	0.05	1	150	100	135	25	25	5.0	1.0	1.53	1.53	40.05	0.50
14	0.05	1	50	-50	260	250	250	0.5	0.1	1.53	1.53	40.05	0.50
15	0.05	2	150	100	350	25	25	0.5	0.1	2.00	2.00	5.00	0.50
16	0.05	2	50	-50	45	250	250	5.0	1.0	2.00	2.00	5.00	0.50
17	0.01	1	150	100	350	25	25	0.5	0.1	10.03	10.03	40.05	0.05
18	0.01	1	50	-50	45	250	250	5.0	1.0	10.03	10.03	40.05	0.05
19	0.01	2	150	100	135	25	25	5.0	1.0	10.50	10.50	5.00	0.05
20	0.01	2	50	-50	260	250	250	0.5	0.1	10.50	10.50	5.00	0.05
21	0.05	1	50	0	350	250	250	5.0	0.1	10.50	10.50	5.00	0.05
22	0.05	1	150	50	45	25	25	0.5	1.0	10.50	10.50	5.00	0.05
23	0.05	2	50	0	135	250	250	0.5	1.0	10.03	10.03	40.05	0.05
24	0.05	2	150	50	260	25	25	5.0	0.1	10.03	10.03	40.05	0.05
25	0.01	1	150	100	260	250	250	0.5	1.0	10.50	10.50	41.00	0.50
26	0.01	1	50	-50	135	25	25	5.0	0.1	10.50	10.50	41.00	0.50
27	0.01	2	150	100	45	250	250	5.0	0.1	10.03	10.03	4.05	0.50
28	0.01	2	50	-50	350	25	25	0.5	1.0	10.03	10.03	4.05	0.50
29	0.05	1	50	0	260	25	25	5.0	1.0	10.03	10.03	4.05	0.50
30	0.05	1	150	50	135	250	250	0.5	0.1	10.03	10.03	4.05	0.50
31	0.05	2	50	0	45	25	25	0.5	0.1	10.50	10.50	41.00	0.50
32	0.05	2	150	50	350	250	250	5.0	1.0	10.50	10.50	41.00	0.50

<표 2> Panagos 등(1985)의 결과와 본 논문 설계 결과의 비교

예제	Panagos 등(1985)의 결과				본 논문 설계 결과					
	n_x	h	k		ρ	n_x	h	k_m	k_n	$E(A)$
1	17	2.75	3.14	45.91	0.6	30	1.319	2.130	5.966	44.978
					0.9	17	1.577	2.754	5.995	46.665
2	17	6.33	2.95	134.11	0.6	30	3.149	2.119	5.996	131.218
					0.9	21	3.870	2.871	6.000	137.779
3	6	6.46	3.46	42.08	0.6	22	5.856	1.892	5.255	42.212
					0.9	7	5.180	2.663	5.044	43.205
4	8	1.54	4.31	140.89	0.6	29	1.055	3.266	6.000	140.623
					0.9	7	1.052	3.593	6.000	142.256
5	26	2.41	3.76	117.73	0.6	30	2.446	2.173	6.000	120.392
					0.9	19	2.804	2.836	6.000	125.940
6	12	2.48	2.75	14.04	0.6	1	3.935	0.001	5.253	12.080
					0.9	18	0.957	3.331	3.331	18.982
7	5	2.01	3.32	114.93	0.6	24	2.110	2.813	6.000	120.533
					0.9	5	1.214	3.253	6.000	123.024
8	6	1.50	3.12	30.04	0.6	23	1.685	2.150	2.686	25.496
					0.9	7	1.587	2.863	3.164	30.102
9	9	5.03	2.72	39.96	0.6	17	1.750	2.393	5.918	36.417
					0.9	8	1.543	2.895	5.853	42.228
10	10	2.79	2.90	132.08	0.6	1	8.282	0.001	5.973	135.312
					0.9	5	3.339	1.465	5.988	135.502
11	6	4.53	3.63	41.39	0.6	15	4.154	2.484	5.164	38.142
					0.9	5	4.681	2.918	4.666	41.549
12	4	2.34	3.67	138.69	0.6	4	0.965	1.885	5.852	139.232
					0.9	2	0.963	2.397	6.000	142.665
13	13	3.96	3.00	110.96	0.6	1	6.927	0.001	6.000	122.806
					0.9	1	6.928	0.001	6.000	122.807
14	6	0.40	3.29	13.73	0.6	1	13.285	0.001	4.270	-3.485
					0.9	6	0.286	3.124	3.607	13.598
15	4	0.79	3.43	108.05	0.6	5	0.891	2.057	6.000	114.098
					0.9	3	1.053	2.589	6.000	116.325
16	3	1.61	2.85	23.59	0.6	8	1.492	2.254	2.686	10.309
					0.9	4	1.514	2.985	2.985	24.888
17	25	3.27	3.92	120.55	0.6	30	1.762	2.099	6.000	128.320
					0.9	14	1.978	2.617	6.000	129.375
18	18	6.54	3.11	34.12	0.6	30	3.339	2.155	3.130	27.659
					0.9	28	4.017	3.502	3.502	36.574
19	6	6.59	3.24	120.64	0.6	21	7.210	1.836	6.000	129.039
					0.9	4	6.228	2.134	6.000	129.588
20	7	1.50	3.83	37.57	0.6	30	0.992	3.524	3.524	36.262
					0.9	9	1.107	3.980	3.980	37.889
21	21	2.39	3.15	13.24	0.6	30	4.143	2.058	6.000	10.895
					0.9	28	3.909	3.184	3.500	13.759
22	11	2.54	2.43	67.44	0.6	1	5.579	0.001	6.000	80.401
					0.9	10	1.543	2.113	6.000	82.431
23	5	2.20	3.32	19.18	0.6	28	2.640	2.850	3.696	18.788
					0.9	7	1.521	3.482	4.069	20.419
24	8	1.67	3.66	65.86	0.6	20	3.319	1.797	6.000	77.198
					0.9	4	3.196	2.072	6.000	77.960
25	15	7.13	3.28	117.17	0.6	20	2.639	2.356	5.987	123.669
					0.9	9	2.241	2.880	6.000	127.522
26	11	2.90	3.10	31.50	0.6	1	8.625	0.001	5.449	29.705
					0.9	12	2.561	3.096	3.096	30.959
27	6	4.60	3.47	122.35	0.6	16	5.198	2.481	6.000	127.996
					0.9	4	5.536	2.753	6.000	130.167
28	3	2.43	2.78	34.66	0.6	8	0.938	2.644	2.644	31.033
					0.9	3	0.961	3.097	3.097	35.586
29	5	3.93	1.66	13.49	0.6	1	8.821	0.001	5.037	14.635
					0.9	1	8.825	0.001	4.820	14.636
30	9	0.63	3.12	66.69	0.6	13	0.544	2.562	6.000	73.220
					0.9	6	0.567	2.927	6.000	78.696
31	4	0.86	3.53	21.04	0.6	5	0.925	1.952	5.577	19.753
					0.9	3	1.060	2.532	4.274	21.483
32	5	2.52	3.19	60.45	0.6	11	3.751	2.130	6.000	69.617
					0.9	4	3.550	2.638	6.000	73.150

4. 민감도 분석

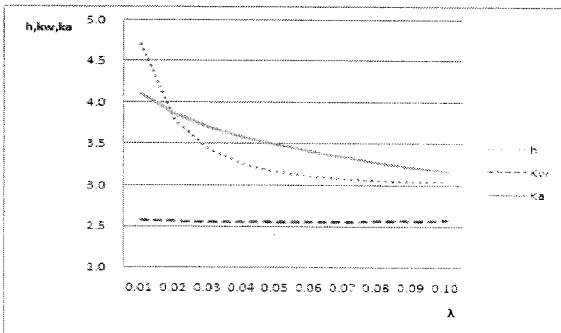
이 절에서는 비용 및 공정 모수의 값이 변화함에 따라 최적의 h, k_w, k_a 값이 어떻게 영향을 받는가를 살펴보기로 한다. 비용 및 공정 모수들 중 c, i_1, i_2 , 그리고 a_2' 의 값은 $c=2, i_1=100, i_2=0, a_2'=200$ 로 고정시키고 나머지 모수들의 값은 <표 3>과 같이 변화시켰다.

<표 3> 비용 및 공정 모수의 변화 범위

변수	변경 범위	변경 단위	기준값
λ	0.01~0.1	0.01	0.05
a_1	100~400	10	200
a_2''	100~400	10	200
a_3	0.5~6	0.2	3
a_4	0.1~3	0.2	1.5
b_1'	1~20	1	10
b_1''	1~20	1	10
b_2	1~50	1	25
b_3	0.05~0.60	0.01	0.30

i) λ 와 h, k_w, k_a 의 관계

λ (이상 원인 발생률)의 값이 증가함에 따라 <그림 2>와 같이 k_w 는 변화가 없으나, h 와 k_a 는 감소하는 추세를 보인다. 즉, 이상 원인이 자주 발생할수록 표본을 더 자주 추출하고 조치신호를 더 민감하게 발동해야 함을 의미한다.

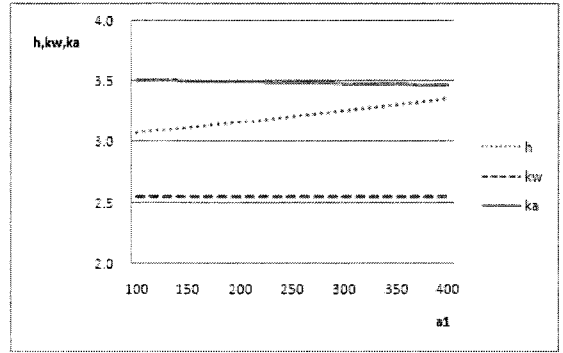


<그림 2> λ 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

ii) a_1 과 h, k_w, k_a 의 관계

a_1 (이상 원인을 찾고 제거하는 비용)의 증가에 따른

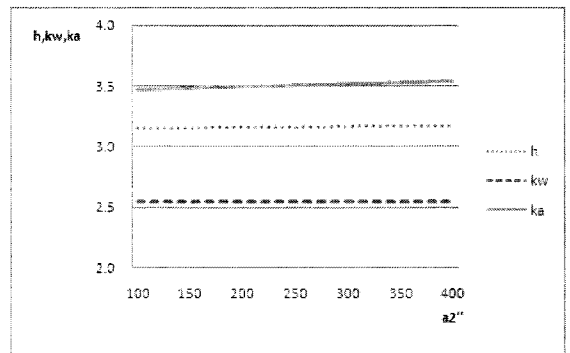
h, k_w, k_a 의 변화추이는 <그림 3>과 같다. k_w 와 k_a 의 변화는 없고, h 는 증가하는 경향을 갖는다. 즉, 이상 원인을 찾고 제거하는 비용이 커질수록 표본을 덜 자주 추출해야 함을 뜻한다.



<그림 3> a_1 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

iii) a_2'' 과 h, k_w, k_a 의 관계

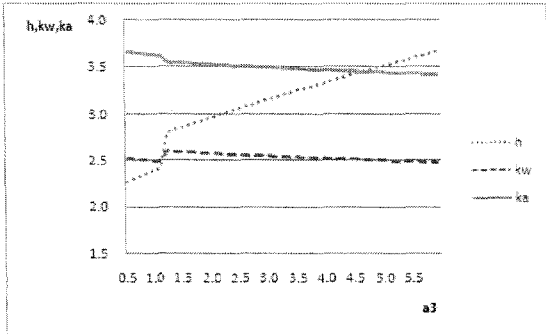
a_2'' (거짓 경보로 인한 제품손실비용)이 커짐에 따른 h, k_w, k_a 의 변화추이는 <그림 4>와 같다. h, k_w, k_a 의 변화는 1% 이내이므로 거짓 경보로 인한 제품손실비용의 변화는 관리도의 경제적 설계에 거의 영향을 미치지 않는다.



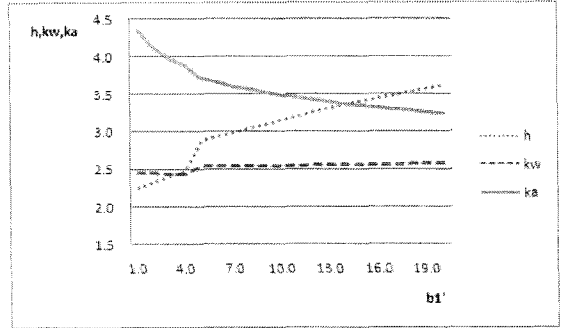
<그림 4> a_2'' 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

iv) a_3 와 h, k_w, k_a 의 관계

a_3 (표본추출 고정비용)가 증가함에 따라 <그림 5>와 같이 k_w 와 k_a 는 크게 변화하지 않으나 h 는 빠르게 증가한다. 특히 a_3 가 1.2일 때 급격한 변화를 보이는 것은 이 지점에서 최적 n_x 가 3에서 4로 증가하여 최적 h, k_w, k_a 에 영향을 주었기 때문으로 보인다.

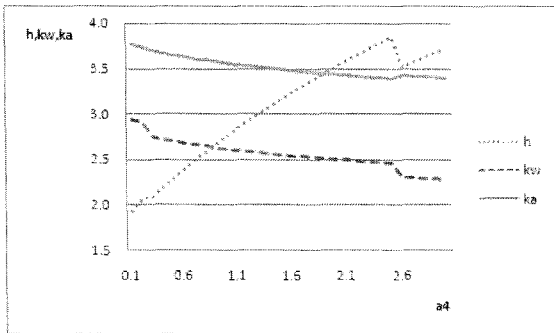


<그림 5> a_3 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화



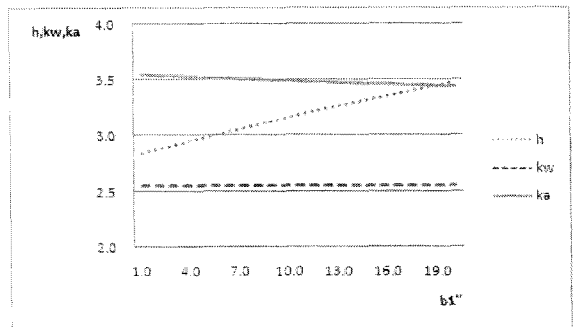
<그림 7> b_1' 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

v) a_4 와 h, k_w, k_a 의 관계
 a_4 (표본추출 가변비용)가 증가함에 따라 <그림 6>과 같이 k_w 와 k_a 는 감소하고 h 는 증가한다. 특히 a_4 가 2.6 일 때 급격한 변화를 보이는 것은 이 지점에서 최적 n_x 가 4에서 3로 감소하여 최적 h, k_w, k_a 에 영향을 주었기 때문으로 보인다.



<그림 6> a_4 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

거하는 시간이 증가할수록 표본을 덜 자주 추출해야 함을 뜻한다.

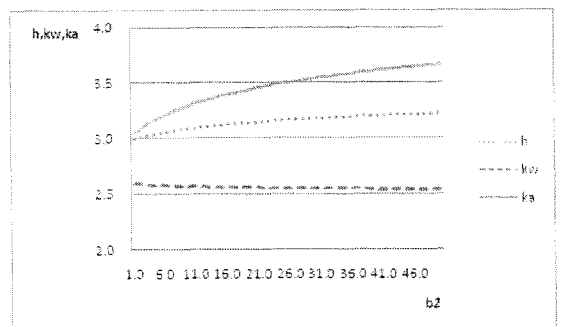


<그림 8> b_1'' 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

vi) b_1' 와 h, k_w, k_a 의 관계
 b_1' (이상 원인을 찾는 시간)의 증가에 따른 h, k_w, k_a 의 변화추이는 <그림 7>과 같다. k_w 는 크게 변화하지 않으며, k_a 는 감소하고 h 는 증가하는 경향을 갖는다. 즉, 이상 원인을 찾는 시간이 증가할수록 표본을 덜 자주 추출하고 조치신호를 더 민감하게 발동해야 함을 의미한다.

viii) b_2 와 h, k_w, k_a 의 관계
 b_2 (거짓 경보를 확인하는 시간)와 h, k_w, k_a 의 관계는 <그림 9>와 같다. h 와 k_a 는 증가하는 반면에 k_w 는 변동이 없다. 즉, 거짓 경보를 확인하는 시간이 증가할수록 표본을 덜 자주 추출하고 조치신호도 덜 민감하게 발동해야 함을 의미한다.

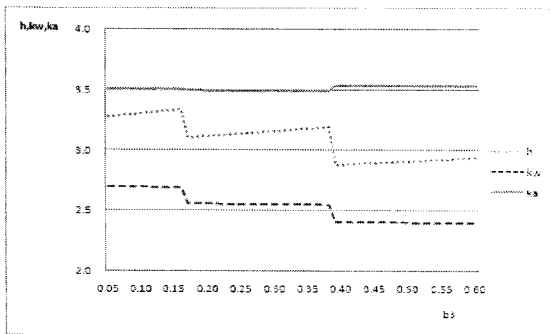
vii) b_1'' 와 h, k_w, k_a 의 관계
 b_1'' (이상 원인을 제거하는 시간)의 증가에 따른 h, k_w, k_a 의 변화추이는 <그림 8>과 같다. k_w 와 k_a 의 변화는 없으며, h 가 커지는 경향을 갖는다. 즉, 이상 원인을 제



<그림 9> b_2 에 따른 h, k_w, k_a 의 변화

ix) b_3 와 h , k_w , k_a 의 관계

b_3 (표본을 취하고 해석하는 시간)과 h , k_w , k_a 의 관계는 <그림 10>과 같다. b_3 가 증가함에 따라 k_a 의 변동은 거의 없으나, 전체적으로 h 및 k_w 는 감소하는 경향을 보인다. 다만, n_x 의 값이 5에서 3으로 감소함에 따라서 h 및 k_w 의 최적값에 영향을 주어 계단형으로 감소함을 알 수 있다.



<그림 10> b_3 에 따른 h , k_w , k_a 의 변화

5. 결 론

본 논문에서는 대용변수를 사용한 \bar{X} 관리도의 경제적 설계 문제를 다루었다. 기존의 Duncan(1956)의 모형은 이상신호가 발생하였을 때 공정을 진행하면서 경보의 진위를 확인하였으나, 본 논문에서 제안된 \bar{X} 관리도에서는 대용변수의 표본평균 \bar{X} 가 경고영역에 타점이 되면 Duncan의 모형과 같이 공정을 진행하면서 경보의 진위를 확인하나, 조치영역에 타점이 되면 공정을 정지시키고 경보의 진위를 확인함으로써 공정관리의 효율성을 높였다. 모수에 따른 최적값의 결과를 살펴보면, h 는 λ 가 증가함에 따라 감소하였고, a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , b_1 , b_2 가 증가함에 따라 커지는 경향을 보였다. k_w 는 a_4 가 증가함에 따라 감소하는 경향을 보였으나, 다른 모수에 대해서는 변동이 거의 없었다. k_a 는 λ , a_3 , a_4 , b_1 가 증가함에 따라 감소하였고, b_2 가 증가함에 따라 증가하였으며, a_1 , a_2 , b_1 가 증가함에 따라서는 변동이 거의 없었다.

대용변수가 성능변수와 밀접한 상관관계를 가질 경우 본 논문에서 제안된 \bar{X} 관리도 모형을 사용하면 한 주기 당 순수입이 기존의 모형에 비하여 증가하는 것으

로 나타났다. 따라서 제안된 \bar{X} 관리도 모형은 성능변수를 직접 측정하는데 비용이 많이 들거나 기술적으로 어려운 경우에 성능변수와 밀접한 상관관계를 가지는 대용변수가 있다면 효율적으로 사용될 수 있을 것으로 기대된다. 추후 연구에서는 대용변수의 사용을 누적합(CUSUM) 또는 지수이동평균(EMWA) 관리도의 경제적 설계 문제로 확장할 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1] Boys, R. J. and Dunsmore, I. R. (1987), "Diagnostic and Sampling Models in Screening", *Biometrika*, Vol. 74, pp. 356-374.
- [2] Costa, A. F. B. and De Magalhães, M. S. (2002) "Economic design of two-stage \bar{X} charts : The Markov chain approach", *International Journal of Production Economics*, Vol. 95, pp. 9-20
- [3] Duncan, A. J. (1956), "The Economic Design of \bar{X} -Charts Used to Maintain Current Control of a Process", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 51, pp. 228-242.
- [4] Kwon, H. M., Lee, M. K., Kim, S. B., and Hong, S. H. (1999), "A Process Monitoring Procedure Using a Correlated Variable", *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 27, pp. 35-45.
- [5] Lee, J. and Kwon, W. J. (1999), "Economic Design of a Two-Stage Control Chart Based on Both Performance and Surrogate Variables", *Naval Research Logistics*, Vol. 46, pp. 958-977.
- [6] Lee, M. K. (2000), "Determination of the Optimum Process Mean and Screening Limit for a Production Process Based on Two Correlated Variable", *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 28, pp. 155-164
- [7] Lee, M. K., Hong, S. H., and Elsayed E. A. (2001), "The Optimum Target Value Under Single and Two-Stage Screenings", *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, pp. 506-514
- [8] Li, L. and Owen, D. B. (1979), "Two-Sided Screening Procedures in the Bivariate Case", *Technometrics*, Vol. 21, pp. 79-85.
- [9] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986), "The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach", *Technometrics*, Vol. 28, pp. 3-10.
- [10] Montgomery, D. C. (2004), *Introduction to Stati-*

- istical Quality Control*, 5th Edition, John Wiley & Sons, New York.
- [11] Owen, D. B., McIntire, D., and Seymour, E. (1975), "Tables Using One or Two Screening Variables to Increase Acceptable Product Under One-Sided Specifications", *Journal of Quality Technology*, Vol. 7, pp. 127-138.
- [12] Panagos, M. R., Heikes, R. G., and Montgomery, D. C. (1985), "Economic Design of \bar{X} Control Charts for Two Manufacturing Process Models", *Naval Research Logistics*, Vol. 32, pp. 631-646.
- [13] Wong, A., Meeker, J. B., and Selwyn, M. R. (1985), "Screening on Correlated Variables: A Bayesian Approach", *Technometrics*, Vol. 27, pp. 423-431.
- [14] Woodall, W. H. (1986), "Weaknesses of the Economic Design of Control Charts", *Technometrics*, Vol. 28, pp. 408-409.
-