

선형 변단면 정확탄성곡선형 아치의 자유진동

Free Vibrations of Elastica Shaped Arches with Linear Taper

이병구* · 이태은** · 김권식***
Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun · Kim, Gwon Sik

Abstract

This study deals with the free vibrations of the elastica shaped arch with linear taper. The shape of elastica is obtained from the Bernoulli-Euler beam theory. Differential equations governing free vibrations of such arch are derived and numerically solved to determine natural frequencies, in which three kinds of taper type and two kinds of end constraint, respectively, are considered. For validating the theories presented herein, the frequency parameters obtained in this study are compared to those of SAP 2000. As results of the numerical analyses, effects of end constraint, taper type, slenderness ratio and section ratio on the lowest four non-dimensional frequency parameters are extensively investigated.

Keywords : *Elastica shaped arch, Bernoulli-Euler beam theory, linear taper, free vibration, natural frequency*

요 지

이 논문은 선형 변단면 정확탄성곡선형 아치의 자유진동에 관한 연구이다. 정확탄성곡선형 아치의 선형은 Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 산정하였다. 이러한 선형을 갖는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예에서는 세 종류의 선형 변단면과 두 종류의 지점조건을 채택하였다. 이 연구의 결과를 검증하기 위하여 이 연구와 SAP 2000의 고유진동수를 비교하였다. 수치해석의 결과로 지점조건, 변단면 형상, 세장비 및 단면비가 최저차 4개의 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다.

핵심용어 : 정확탄성곡선형 아치, Bernoulli-Euler 보 이론, 선형 변단면, 자유진동, 고유진동수

1. 서 론

아치는 미관이 아름답고 구조적으로 안정하기 때문에 보, 기둥, 평판 등과 더불어 구조공학분야에서 뼈대구조로 널리 이용되고 있다(Leontovich, 1984). 그동안 아치 구조의 정·동적 해석에 관한 많은 연구들이 진행되어 왔다. 이러한 연구들은 전통적으로 그림 1(a)와 같은 원호형(Tufekci and Ozdemirci, 2006), 포물선형(Lee et al., 2003; Moon et al., 2007), 정현형(Lee and Wilson, 1990), 타원형(Nieh et al., 2003), 현수형(BeGole, 1981) 등과 같이 매우 다양한 선형을 연구대상으로 하고 있다.

최근 재료공학의 발달로 세장한 직선부재/기둥을 인위적으로 좌굴시킨 후에 이렇게 형성된 정확탄성곡선(elastica)을 뼈대구조로 이용하는 구조형식이 등장하고 있다(Falzon and Aliabadi, 2008). 이러한 전형적인 구조물 중에 하나가 정확탄성곡선 아치(elastica arch)이다(Perkins, 1990). 정확탄성곡선 아치의 선형은 축하중에 최적으로 저항할 수 있도록 자

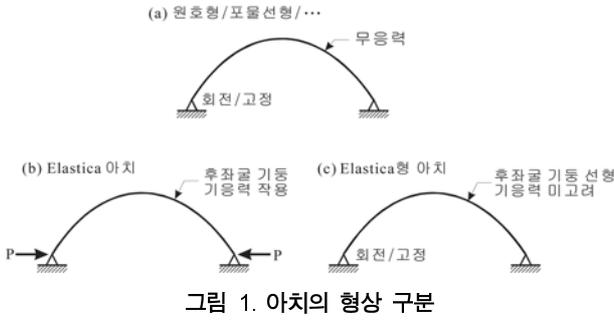
연이 선정(natural selection)하여 준 선형이므로 다른 선형들과 비교하여 외부의 작용하중에 우수하게 저항할 수 있을 것으로 기대된다.

정확탄성곡선 아치에는 그림 1(b)와 같이 직선 기둥의 좌굴로 인하여 발생하는 기응력(既應力)이 작용하게 된다. 정확탄성곡선 아치의 정·동적 해석에 관한 연구는 기응력의 영향을 고려하는 경우와 고려하지 않는 경우로 구분할 수 있다. 이 연구에서 아치의 형상을 구분하기 위하여 기응력의 영향을 고려하는 아치를 '정확탄성곡선 아치', 기응력의 영향을 고려하지 않는 아치를 '정확탄성곡선형 아치(elastica shaped arch)'라고 정의한다. 즉, 기둥의 좌굴된 형상인 정확탄성곡선의 선형을 계산한 후 기응력은 고려하지 않고 오로지 정확탄성곡선의 형상만을 유지하는 그림 1(c)와 같은 아치를 '정확탄성곡선형 아치'로 정의한다. 이와 같이 이 논문의 제목에서 '형(shaped)'의 의미는 앞에서 예로 든 아치의 선형인 원호·형, 포물선·형 등과 같이 '아치의 선형이 정확탄성곡선일 뿐이고 정확탄성곡선을 발생시키기 위한 기응

*정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleest@wku.ac.kr)

**정희원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 연구교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

***정희원 · (주) 한양 담당·생산간 고속도로 101공구 현장 소장 · 공학박사 (E-mail : gskim1531@hanmail.net)



력의 영향은 고려하지 않은'이라는 의미로 사용하였다.

이 논문은 연구의 내용상 두 분야로 나눌 수 있다. 첫째는 아치의 선형을 산정하기 위한 후좌굴 기동의 비선형 거동에 관한 분야이고, 둘째는 정확탄성곡선형 아치의 자유진동 해석에 관한 분야이다. 전자의 연구로는 문헌(이 등, 2009; Lee *et al*, 2005)의 논문들을 들 수 있으며, 후좌굴 거동을 해석하기 위하여 Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 후좌굴 거동값들을 산정하였다. 후자의 연구로는 이 등(2008)의 논문을 들 수 있지만 등단면 아치를 연구대상으로 하였다. 변단면은 구조물의 내하력을 증진시킬 수 있을 뿐만 아니라 자중을 줄일 수 있는 경제적 시공이 될 수 있어 변단면의 이용은 더욱 더 활성화될 전망이다.

이러한 관점에서 이 연구는 변단면 정확탄성곡선형 아치의 자유진동을 해석하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 먼저, 문헌(이 등, 2009)의 이론을 이용하여 선형 변단면 정확탄성곡선형 아치의 선형을 산정하고, 이렇게 형성된 아치의 선형에 자유진동을 해석할 수 있는 동적 이론을 전개하였다. 자유진동하는 아치에 발생하는 합응력과 관성력을 동적 평형방정식에 적용하여 변단면 정확탄성곡선형 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 유도된 미분방정식을 수치해석하여 변단면 정확탄성곡선형 아치의 무차원 고유진동수를 산정하였다.

이 논문의 제2장에서 기술하는 정확탄성곡선을 산정하는 방법은 문헌(이 등, 2009)의 결과를 이용하였고, 제3, 4장의 아치의 자유진동문제는 이 연구에서 얻어진 고유한 결과이다.

2. 변단면 정확탄성곡선형 아치의 선형

2.1 선형 변단면의 정의

그림 2는 이 연구에서 채택한 아치의 선형인 정확탄성곡선을 형성하기 전에 (a) 변화폭, (b) 변화깊이, (c) 정방형 선형 변단면을 나타낸다. 단면은 직사각형이고 길이는 l 이다. x 축은 직교좌표계의 수평축이며, s 축은 단면축을 따라 임의의 점 x 좌표까지 측정된 길이를 나타내는 축이다.

이 부재를 기둥으로 이용하는 경우에 좌좌굴 기둥은 직선 상태이므로 x 축과 s 축은 일치한다. z 축은 후좌굴 기둥의 휨 축이며, y 축은 연직방향의 변위 축이다. 좌굴 후에 기둥 축은 정확탄성곡선을 이루게 되므로 x 축과 s 축은 더 이상 일치하지 않는다. 따라서 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y)에서 정의된다.

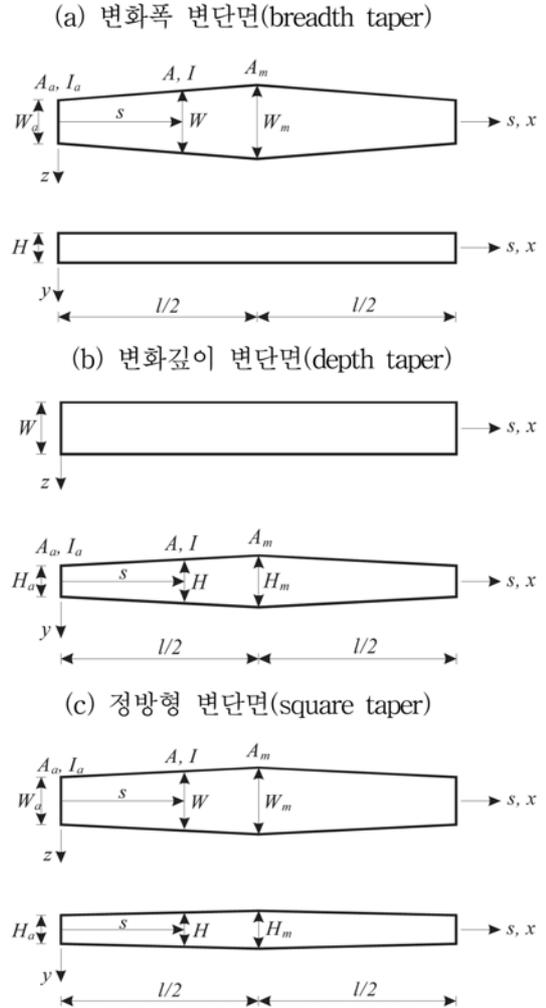


그림 2. 선형 변단면

변화폭 변단면은 그림 2(a)와 같이 단면깊이 H 는 일정하고 단면폭 W 가 s 에 대하여 선형(linear)으로 변화한다. 변화깊이 변단면은 그림 2(b)와 같이 단면폭 W 는 일정하고 단면깊이 H 는 선형으로 변화한다. 정방형 변단면은 그림 2(c)와 같이 단면폭 W 와 단면깊이 H 가 동시에 선형으로 변화하며 단면이 정사각형일 필요는 없다. 변단면은 단면축의 중앙에 대하여 대칭이다. 임의점에서 단면적 및 단면2차모멘트는 A, I 이고, A_a 와 A_m 은 각각 기둥의 좌측지점($s=0$)과 중앙($s=l/2$)에서 단면적이다.

임의점 s 에서 선형 변단면의 A, I 를 s 에 관한 방정식으로 나타내기 위하여 단면비 r 을 A_m 과 A_a 의 비로 다음과 같이 정의한다.

$$r = \frac{A_m}{A_a} \quad (1)$$

위 식에서 단면적은 직사각형이므로 그림 1(a)의 변화폭 변단면의 $A_a = W_a H$ 이고 $A_m = W_m H (=r A_a)$ 이다. 다른 변단면도 마찬가지로 방법으로 구할 수 있다.

2.2 선형 변단면의 단면성질

단면의 축방향 임의점 s 에서 그림 2(a), (b), (c)에 나타난 변단면의 변화제원 W 와 H 를 1차식으로 표현한 식과 식 (1)을 이용하면 s 에 대한 함수식으로 변단면의 단면성질인 A, I 식을 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$A = A_a (e_1 + e_2 \frac{s}{l})^c \quad (2)$$

$$I = I_a (e_1 + e_2 \frac{s}{l})^d \quad (3)$$

식 (3)에서 I_a 는 좌단($s=0$)에서 단면2차모멘트이다. 예로서 그림 2(a)에 나타난 변화폭 변단면의 $I_a = W_a H^3 / 12$ 이다. 식 (3)의 I 는 그림 2에 나타난 z 축에 대한 단면2차모멘트이다. 이 연구에서 면외좌굴은 고려하지 않으므로 식 (3)의 z 축에 대한 I 는 항상 y 축에 대한 I 보다는 작아지도록 변화계원이 $W \geq H$ 의 조건을 만족하여야 한다.

식 (2), (3)에서 지수 c, d 는 변단면 형상별로 다음과 같다.

$$\text{변화폭 변단면: } c=1, d=1 \quad (4.1)$$

$$\text{변화깊이 변단면: } c=1, d=3 \quad (4.2)$$

$$\text{정방형 변단면: } c=2, d=4 \quad (4.3)$$

식 (2), (3)에서 계수 e_1, e_2 는 다음 식과 같다.

$$e_1 = 1, e_2 = 2(r^{1/c} - 1), 0 \leq s \leq l/2 \text{ 에서} \quad (5.1)$$

$$e_1 = 2r^{1/c} - 1, e_2 = 2(1 - r^{1/c}), l/2 \leq s \leq l \text{ 에서} \quad (5.2)$$

2.3 정확탄성곡선형 아치의 선형

그림 3은 양단회전으로 지지된 전좌굴 및 후좌굴 기둥의 형상을 나타낸다. 기둥길이는 l 이고, 기둥의 변단면은 제2장에 정의되어 있다. 그림 3에서 전좌굴 기둥은 이상기둥이다. 압축하중 P 가 좌굴하중 B 보다 작기 때문에 기둥은 아직 직선상태를 유지하고 x 축과 s 축은 일치한다. 좌측지점은 수평방향 이동이 불가능하며 우측지점은 이동이 가능하다. 그림 3의 후좌굴 기둥은 압축하중 P 가 좌굴하중 B 보다 크기 때문에 좌굴하여 곡선상태인 정확탄성곡선(elastica)를 이루게 되어 더 이상 x 축과 s 축은 일치하지 않는다.

그림 3에서 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며 임의점 (x, y) 에서 접선각은 θ , 곡률반경의 경사각은 ϕ , 곡률반경은 ρ , 곡선길이는 s , 후좌굴 기둥의 높이는 y_m , 휨모멘트는 M 이다. θ_a, θ_b 는 양단에서 접선각이다. 후좌굴 기둥에서 우측지점의 수평변위는 Δ 이다. 따라서 후좌굴 기둥의 지간길이는 $L = l - \Delta$ 가 된다. 기둥 축은 비압축성이므로 우측지점($x=l-\Delta$)에서 곡선길이는 압축하중 P 의 크기에 상관없이 항상 $s=l$ 이다.

후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

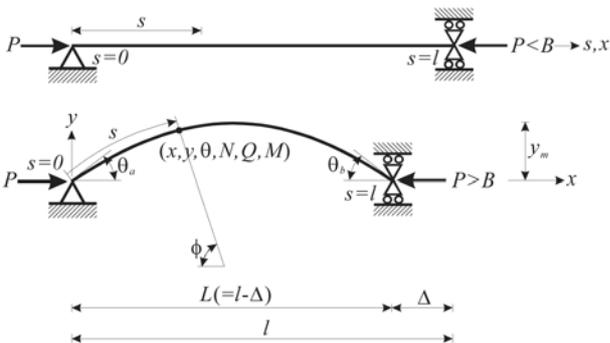


그림 3. 정확탄성곡선형 아치의 선형

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (6)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{s}{l} \quad (8)$$

$$\zeta = \frac{\rho}{l} \quad (9)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{l} \quad (10)$$

$$f = \frac{y_m}{L} = \frac{\eta_{\lambda=0.5}}{1-\delta} \quad (11)$$

$$p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI_a} \quad (12)$$

길이차원의 (x, y, s, ρ, Δ) 는 기둥길이 l 로 정규화하였다. f 는 후좌굴 기둥 즉, 정확탄성곡선형 아치의 높이비(rise to span ratio)이다. p 는 무차원 하중이며 기둥이 좌굴하기 위해서는 무차원 좌굴하중 $b (= Bl^2 / \pi^2 EI_a)$ 보다 커야 한다.

이상의 무차원 변수를 이용하면 그림 3에 나타난 후좌굴 기둥의 형상인 정확탄성곡선 아치의 선형을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다. 이 연구에서는 유도과정을 생략하고 관심이 있는 독자는 문헌(이 등, 2009)을 참고할 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{\pi^2 p \eta}{(e_1 + e_2 \lambda)^d} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (13)$$

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (14)$$

위의 미분방정식들은 $0 \leq \xi \leq 1 - \delta$ 에서 유효하다.

후좌굴 기둥의 좌측지점($x=0$)에서 수직변위는 $y=0$, 곡선길이는 $s=0$ 이므로 식 (6)~(8)를 이용하면 다음의 무차원 경계조건식들을 얻는다.

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{ 에서} \quad (15)$$

$$\lambda = 0, \xi = 0 \text{ 에서} \quad (16)$$

우측지점($x=l-\Delta$)에서 수직변위는 $y=0$, 곡선길이는 $s=l$ 이다. 우측지점에서 회전각은 $\theta_b = \tan^{-1}(dy/dx)_{x=l-\Delta}$ 로 계산되고, 기하적 대칭성으로 인하여 $\theta_b = -\theta_a$ 이다. 따라서 이들 세 조건들은 다음과 같은 무차원 경계조건으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = 0, \xi = 1 - \delta \text{ 에서} \quad (17)$$

$$\lambda - 1 = 0, \xi = 1 - \delta \text{ 에서} \quad (18)$$

$$\theta_a + \tan^{-1}(d\eta/d\xi) = 0, \xi = 1 - \delta \text{ 에서} \quad (19)$$

다음 제3장의 자유진동문제에서 필요한 설명변수인 후좌굴 기둥의 임의점 (ξ, η) 에서 (ρ, θ, ϕ) 는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 θ 와 ϕ 는 수학적 정의에 의하여 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \quad (20)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (21)$$

정확탄성곡선의 임의점 (x, y) 에서 $M = Py$ 이고 곡률 관계식 $1/\rho = M/(EI)$ 과 식 (3), (7), (8), (10), (12)를 이용하면 무차원 곡률반경 ζ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

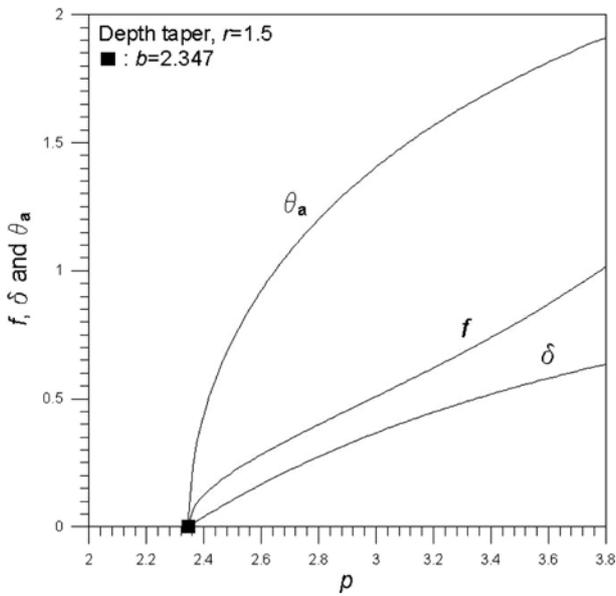


그림 4. 평형경로

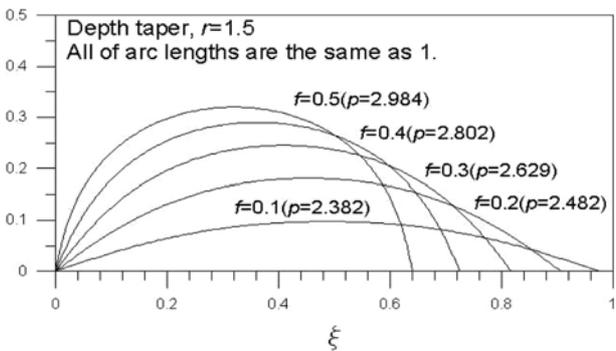


그림 5. 정확탄성곡선형 아치의 선형

$$\zeta = \frac{(e_1 + e_2 \lambda)^d}{\pi^2 p \eta} \quad (22)$$

2.4 정확탄성곡선형 아치의 선형 예제

기둥의 입력변수인 p, r 및 변단면 형상을 정의하면 미분 방정식의 미지수인 θ_a 와 δ 를 산정하고, 수치해석의 결과로 정확탄성곡선의 제변수들인 $(\xi, \eta, \lambda, \zeta, \theta, \phi)$ 와 높이비 f 를 산정할 수 있다.

그림 4는 후좌굴 기둥의 비선형 해석 결과인 평형경로의 예를 나타낸다. 기둥의 기하적 조건은 그림 상단에 표시한 바와 같이 변화폭 변단면(depth taper), $r=1.5$ 이다. 무차원 하중 p 와 후좌굴 거동 f, δ, θ_a 는 강한 비선형 관계를 보인다. 무차원 하중 p 가 ■로 표시한 무차원 좌굴하중 $b=2.347$ 보다 작으면 기둥은 좌굴 전이므로 거동은 “0” 즉 곧은 채로 있다.

그림 4에서 $f=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 에 대한 정확탄성곡선형 아치의 선형 (ξ, η) 의 예를 그림 5에 나타내었다. 정확탄성곡선형 아치를 형성하기 위한 $p(>b=2.347)$ 값과 높이비 f 를 각각의 선형에 표시하였다. 여기에 나타난 5개의 정확탄성곡선 아치의 곡선길이(arc length)는 f 값에 상관없이 모두 ‘1’로 같다. 이 그림에서와 같이 정확탄성곡선형 아치는 동일한 곡선길이를 다양한 높이의 아치를 구성할 수 있다. 아치의 자유진동문제에서 필요한 정확탄성곡선의 제변수들인 $(\lambda,$

$\zeta, \theta, \phi)$ 은 제2장에서 기술한 수치해석의 결과로 동반되어 산출된다.

3. 수학적 모형

3.1 변수정의

그림 6은 (x, y) 평면 위에 놓인 제2장에서 그 선형이 정의된 정확탄성곡선형 아치의 기하적 형상을 나타낸다. 아치의 선형을 산정하기 위한 후좌굴 기둥의 양단은 모두 회전 지점이지만 정확탄성곡선형 아치는 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선만을 이용하는 아치이므로 지점은 회전 및 고정지점이 모두 가능하다. 제2장에서 기술한 바와 같이 아치의 곡선길이는 l , 시간길이는 $L(=l-\Delta)$, 높이는 y_m 이다. 아치축의 임의 좌표 (x, y) 에서 곡선길이, 곡률반경, 접선각, 곡률반경의 경사각은 각각 (s, ρ, θ, ϕ) 이다. 여기서 정확탄성곡선형 아치의 제변수 $(x, y, s, \rho, \theta, \phi)$ 및 $L(=l-\Delta), y_m$ 은 제2장에서 이미 무차원 양으로 계산되었다.

아치가 자유진동하게 되면 아치축은 무응력 상태에서 동적 변위를 갖게 된다. $w, v,$ 및 ψ 는 곡률방향 변위, 접선방향 변위 및 단면회전각이며 모두 동적인 양이다. 이 그림에서 제변수는 화살표 방향이 (+) 부호규약이다.

3.2 동적 평형방정식

아치가 자유진동하게 되면 동적 변위 w, v 및 ψ 가 발생하여 아치 단면에는 동적 축방향력, 전단력, 휨모멘트 N, Q, M 이 발생한다. 질량을 갖고 있는 아치의 미소요소에는 곡률 중심방향 관성력 P_r , 접선방향 관성력 P_t 및 회전관성 우력

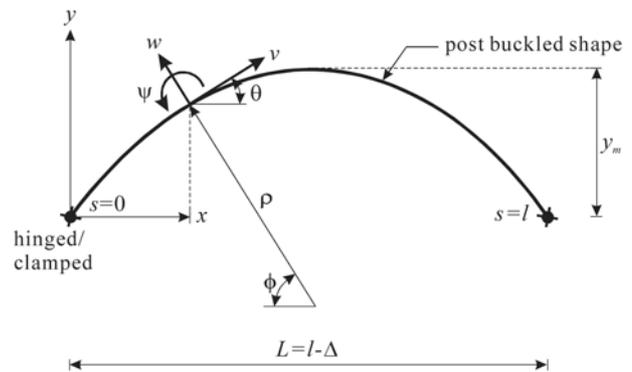


그림 6. 아치의 기하적 형상 및 제변수

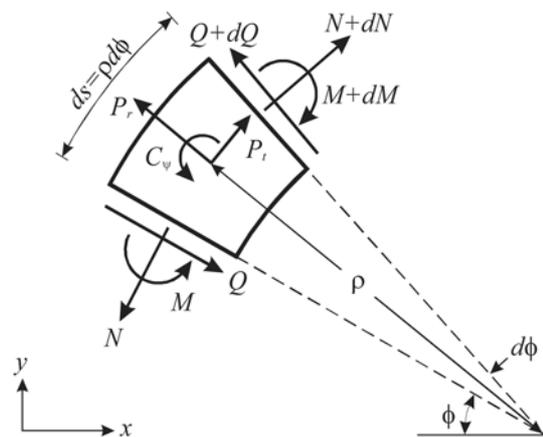


그림 7. 합응력과 관성력

C_ψ 가 발생한다.

그림 7은 미소구간의 길이가 $ds=\rho d\phi$ 인 아치의 미소요소에 자유진동으로 인하여 발생하는 합응력과 관성력을 나타내며, 화살표 방향이 (+)이다.

미소요소에 작용하는 이 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다(Lee and Wilson, 1990).

$$\frac{dN}{d\phi} + Q + \rho P_t = 0 \quad (23)$$

$$\frac{dQ}{d\phi} - N + \rho P_r = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - Q - C_\psi = 0 \quad (25)$$

3.3 합응력 및 관성력

자유진동하는 정확탄성곡선형 아치에 작용하는 합응력과 관성력에 대한 관계식을 표현하기 위하여 단면적 및 단면2차모멘트를 정의하여야 한다. 이를 위하여 제2장에 정의된 식 (2), (3)에 식 (8)의 무차원 변수식을 적용하고 다음과 같이 간단한 식들로 고쳐 쓴다.

$$A = A_a (e_1 + e_2 \lambda)^c = A_a (e_1 + e_2 \lambda)^c = A_a F_A \quad (26.1)$$

$$F_A = (e_1 + e_2 \lambda)^c \quad (26.2)$$

$$I = I_a (e_1 + e_2 \lambda)^d = I_a (e_1 + e_2 \lambda)^d = I_a F_I \quad (27.1)$$

$$F_I = (e_1 + e_2 \lambda)^d \quad (27.2)$$

아치 단면에 발생하는 합응력 N, Q, M 과 단면회전각 ψ 는 변위 w, v 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다(Borg and Gennaro, 1959).

$$N = EA_a \frac{F_A}{\rho} \left(w + \frac{dv}{d\phi} \right) + EI_a \frac{F_I}{\rho^3} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + w \right) \quad (28)$$

$$M = -EI_a \frac{F_I}{\rho^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + w \right) \quad (29)$$

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (30)$$

아치의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 그림 7에 나타낸 관성력 P_r, P_t 및 C_ψ 를 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = \gamma A \omega_i^2 w = \gamma A_a \omega_i^2 F_A w \quad (31)$$

$$P_t = \gamma A \omega_i^2 v = \gamma A_a \omega_i^2 F_A v \quad (32)$$

$$C_\psi = \gamma I \omega_i^2 \psi = \gamma I_a \omega_i^2 \frac{F_I}{\rho} \left(\frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (33)$$

여기서 γ 는 아치재료의 질량밀도이고 위의 관성력들은 모두 단위길이당 관성력들이다.

3.4 지배미분방정식

3.4.1 지배미분방정식

앞에서 기술한 동적 평형방정식과 합응력 및 관성력을 이용하여 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 다음과 같은 방법으로 유도한다.

먼저, 미분방정식을 무차원 미분방정식으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\bar{w} = \frac{w}{l} \quad (34)$$

$$\bar{v} = \frac{v}{l} \quad (35)$$

$$k = \frac{l}{\sqrt{I_a/A_a}} \quad (36)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\gamma A_a}{EI_a}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (37)$$

위의 식에서 변위 (w, v)는 아치의 곡선길이 l 로 정규화하였다. k 는 세장비, C_i 는 미분방정식의 고유치인 무차원 고유진동수, i 는 모드번호이다.

식 (23), (24)에 식 (26)~(28), (31), (32)을 대입한 후에 전단력 Q 를 소거하고 식 (34)~(37)을 이용하면 식 (38)의 미분방정식을 얻을 수 있다. 식 (25)에 식 (23), (29), (33)을 대입하고 식 (34)~(37)을 이용하면 식 (39)의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\phi^4} = a_1 \frac{d^3 \bar{w}}{d\phi^3} + (a_2 - 1 + a_3 C_i^2) \frac{d^2 \bar{w}}{d\phi^2} + (a_1 + a_4 C_i^2) \frac{d\bar{w}}{d\phi} + (a_2 + a_5 C_i^2) \bar{w} + (a_6 - a_3 C_i^2) \frac{d\bar{v}}{d\phi} - a_4 C_i^2 \bar{v} \quad (38)$$

$$\frac{d^2 \bar{v}}{d\phi^2} = a_7 \frac{d^2 \bar{w}}{d\phi^2} + (a_8 C_i^2 - 1) \frac{d\bar{w}}{d\phi} + (a_7 + a_9) \bar{w} + a_9 \frac{d\bar{v}}{d\phi} + (a_3 - a_8) C_i^2 \bar{v} \quad (39)$$

위의 미분방정식에서 계수 $a_1 \sim a_9$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{5 d\zeta}{\zeta d\phi} - \frac{2 dF_I}{F_I d\phi} \quad (40.1)$$

$$a_2 = \frac{5 dF_I d\zeta}{F_I \zeta d\phi d\phi} - \frac{8 (d\zeta)^2}{\zeta^2 (d\phi)^2} + \frac{2 d^2 \zeta}{\zeta d\phi^2} - \frac{1 d^2 F_I}{F_I d\phi^2} - 1 \quad (40.2)$$

$$a_3 = -\frac{\zeta^2}{k^2} \quad (40.3)$$

$$a_4 = \frac{\zeta (d\zeta}{k^2 d\phi} - \frac{\zeta dF_I}{F_I d\phi}) \quad (40.4)$$

$$a_5 = \frac{F_A \zeta^4}{F_I} \quad (40.5)$$

$$a_6 = -\frac{k^2 F_A \zeta^2}{F_I} \quad (40.6)$$

$$a_7 = \frac{F_I}{k^2 F_A \zeta^3} \frac{d\zeta}{d\phi} \quad (40.7)$$

$$a_8 = \frac{F_I}{k^4 F_A} \quad (40.8)$$

$$a_9 = \frac{1 d\zeta}{\zeta d\phi} - \frac{1 dF_A}{F_A d\phi} \quad (40.9)$$

3.4.2 경계조건

제2장의 후좌굴 기동의 비선형 해석 문제에서 경계조건은 회전지점에 국한하였지만, 아치의 자유진동 문제에서는 후좌굴 기동의 선형만을 이용하므로 회전 및 고정지점이 모두

가능하다.

회전지점에서는 변위 w , v 및 식 (29)로 표시한 휨 모멘트 M 은 발생하지 않는다. 따라서 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{w} = 0 \quad (41)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{d^2\bar{w}}{d\phi^2} = 0 \quad (43)$$

고정지점에서는 변위 w , v 및 식 (30)으로 표시한 단면회전각 ψ 가 발생하지 않는다. 따라서 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\bar{w} = 0 \quad (44)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\phi} = 0 \quad (46)$$

3.4.3 미분방정식의 계수 산정

미분방정식의 계수 $a_1 \sim a_9$ 는 아치의 단면항 F_A , F_I , $dF_A/d\phi$, $dF_I/d\phi$, $d^2F_I/d\phi^2$ 와 곡률항 ζ , $d\zeta/d\phi$, $d^2\zeta/d\phi^2$ 를 갖고 있다. 이 항들은 모두 제2장에서 산정한 후좌굴 기둥의 선형 즉 변단면 정확탄성곡선형 아치의 (ζ , η , λ , ζ , θ , ϕ)로부터 산정되는 값들이다.

정확탄성곡선형 아치의 단면으로부터 산정되는 단면항을 다음과 같이 구한다. 먼저, 식 F_A 및 F_I 는 식 (26.2), (27.2)로 3.3절에 정의되어 있고, 이 식들을 곡률반경의 경사각 ϕ 로 미분하고 $d\lambda = \zeta d\phi$ 의 관계를 이용하면 단면의 미분항을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{dF_A}{d\phi} = ce_2(e_1 + e_2\lambda)^{c-1} \frac{d\lambda}{d\phi} = ce_2(e_1 + e_2\lambda)^{c-1} \zeta \quad (47)$$

$$\frac{dF_I}{d\phi} = de_2(e_1 + e_2\lambda)^{d-1} \frac{d\lambda}{d\phi} = de_2(e_1 + e_2\lambda)^{d-1} \zeta \quad (48)$$

F_I 의 2계 미분항은 식 (48)을 ϕ 로 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2F_I}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dF_I}{d\phi} \right) = de_2(e_1 + e_2\lambda)^{d-1} \left[\frac{e_2(d-1)\zeta^2}{e_1 + e_2\lambda} + \frac{d\zeta}{d\phi} \right] \quad (49)$$

이상과 같이 단면항 F_A , F_I , $dF_A/d\phi$, $dF_I/d\phi$, $d^2F_I/d\phi^2$ 를 산정하였다. 식 (47)~(49)에 포함되어 있는 곡률항 ζ 는 제2장에서 식 (22)로 정의되어 있고 $d\zeta/d\phi$ 의 계산은 다음의 곡률항 계산방법에서 기술한다.

다음은 곡률항 ζ , $d\zeta/d\phi$, $d^2\zeta/d\phi^2$ 의 산정방법에 대하여 기술한다. 아치의 곡률 ζ 은 제2장에서 식 (22)로 정의되어 있고, 이 식 (22)를 ϕ 로 미분하여 ζ 의 1계, 2계 미분항을 다음과 같이 산정한다.

$$\frac{d\zeta}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{\pi^2 p} \frac{F_I}{\eta} \right) = \frac{1}{\pi^2 p} \left(\frac{1}{\eta} \frac{dF_I}{d\phi} - \frac{F_I}{\eta^2} \frac{d\eta}{d\phi} \right) \quad (50)$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\zeta}{d\phi} \right) = \frac{1}{\pi^2 p \eta} \left[\frac{d^2F_I}{d\phi^2} - \frac{2}{\eta} \frac{dF_I}{d\phi} \frac{d\eta}{d\phi} - \frac{F_I}{\eta} \frac{d^2\eta}{d\phi^2} + \frac{2F_I}{\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\phi} \right)^2 \right] \quad (51)$$

위 식 (50), (51)에는 η 의 1계, 2계 미분항 $d\eta/d\phi$, $d^2\eta/d\phi^2$ 이 포함되어 있으므로 이 항들을 산정하여야 한다. 먼저,

1계 미분항 $d\eta/d\phi$ 를 그림 3에서 $ds = \rho d\phi$, $dy/ds = \sin\theta$ 의 관계와 무차원 변수식 (7), (9)를 이용하여 다음과 같이 산정한다.

$$\frac{d\eta}{d\phi} = \zeta \sin\theta \quad (52)$$

2계 미분항 $d^2\eta/d\phi^2$ 은 식 (52)를 ϕ 로 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} (\zeta \sin\theta) = \sin\theta \frac{d\zeta}{d\phi} + \zeta \cos\theta \frac{d\theta}{d\phi} \quad (53)$$

위의 식 (53)에는 $d\theta/d\phi$ 의 미분항을 포함하고 있으므로 이를 다음과 같이 산정한다. 식 (21)에서 $\phi = \pi/2 - \theta$ 의 관계가 있으므로 이 식을 ϕ 로 미분하여 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d\theta}{d\phi} = -1 \quad (54)$$

위의 식을 식 (53)에 대입하면 $d^2\eta/d\phi^2$ 을 다음 식과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} = \sin\theta \frac{d\zeta}{d\phi} - \zeta \cos\theta \quad (55)$$

이상의 과정을 거쳐서 미분방정식에 포함되어 있는 계수 $a_1 \sim a_9$ 의 단면항 및 곡률항 F_A , F_I , $dF_A/d\phi$, $dF_I/d\phi$, $d^2F_I/d\phi^2$, ζ , $d\zeta/d\phi$, $d^2\zeta/d\phi^2$ 을 제2장에서 산정한 정확탄성곡선의 (ζ , η , λ , ζ , θ , ϕ)를 이용하여 계산할 수 있다.

이제 유도된 미분방정식을 적당한 수치해석 방법을 이용하면 변단면 정확탄성곡선형 아치의 무차원 고유진동수 C_i 를 산정할 수 있다.

4. 수치해석 예 및 토의

앞에서 유도한 미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수 C_i 를 산정하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고, 미분방정식의 고유치인 C_i 값은 Regula-Falsi법(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하여 계산하였다. 아치의 입력변수인 지점조건(회전-회전/고정-고정), 변단면 형상(변화폭/변화깊이/정방향), 단면비 r , 세장비 k 의 변화에 따른 최저차 4개 모드의 C_i 값의 변화를 고찰하였다.

수치해석 예를 보이기 전에 Runge-Kutta법에서 적절한 단계길이 $\Delta\xi$ 를 산정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 그림 8에 수렴해석의 결과를 나타내었다. 해석조건은 이 그림의 상단에 나타내었다. 이 그림의 수평축에 나타낸 $(1-\delta)$ 는 아치의 무차원 지간길이이므로 $(1-\delta)/\Delta\xi$ 는 지간길이의 분할개수이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 4개의 C_i 값들은 $(1-\delta)/\Delta\xi = 80$ 에서 충분한 정도로 수렴하고 있다. 전형적인 일반 아치에서는 분할개수가 20~40(Lee and Wilson, 1990; Lee *et al.*, 2003)에서 수렴하는 것과 비교하면 변단면 정확탄성곡선형 아치의 수치해석에서는 그 수렴성이 현저히 둔화되었다. 이는 제2장에서 아치선형의 수치해석 부분이 추가되었기 때문으로 판단된다.

이 연구의 결과를 검증하기 위하여 구조해석용 유한요소 프로그램인 SAP 2000에서 산정한 값을 표 1에 비교하였다.

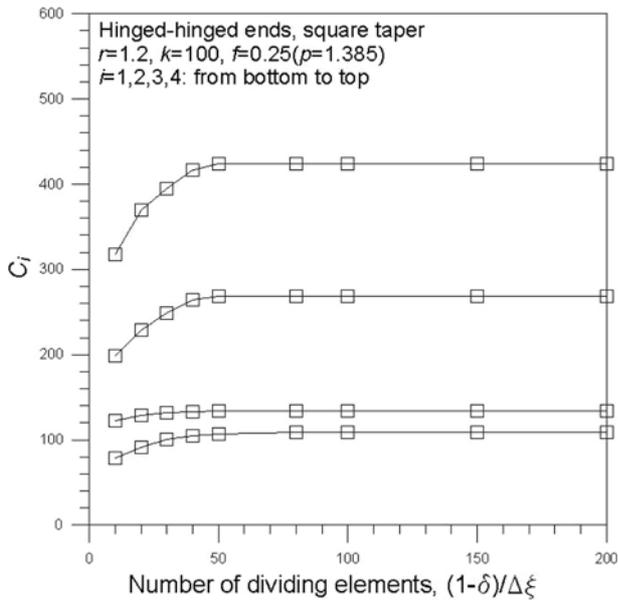


그림 8. 수렴해석

표 1. 본 연구와 SAP 2000에 의한 C_i 비교

지점 조건	i	무차원 고유진동수, C_i		오차* (%)
		본 연구	SAP 2000	
회전 - 회전	1	91.90	92.46	0.61
	2	143.7	143.8	0.07
	3	264.2	263.8	0.15
	4	374.1	378.0	1.03
고정 - 고정	1	124.5	123.3	0.97
	2	142.0	142.8	0.56
	3	304.0	306.9	0.95
	4	396.8	401.0	1.05

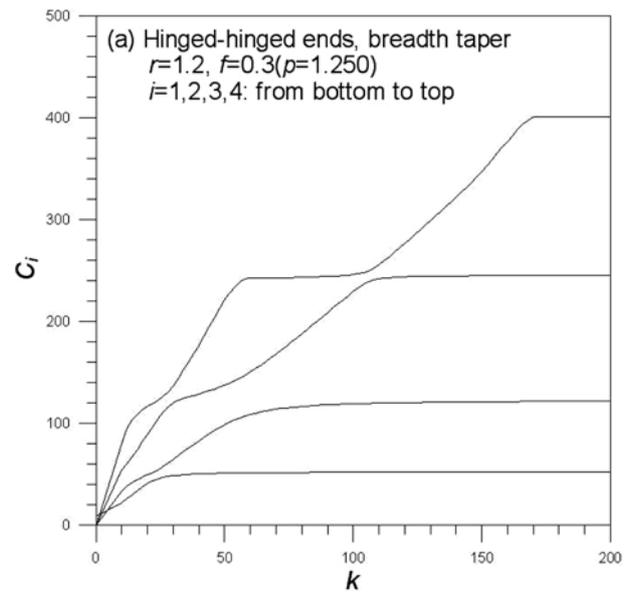
*오차(%) = $|1 - (\text{SAP 2000} / \text{본 연구})| \times 100$

표 2. 변단면 형상이 C_i 에 미치는 영향

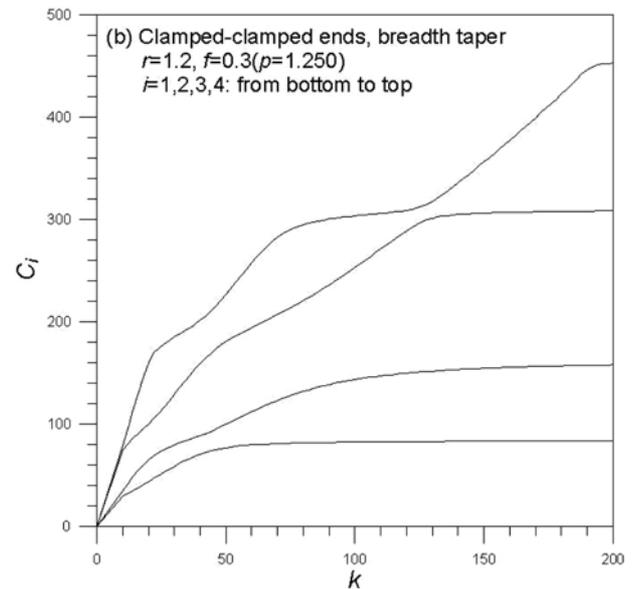
지점조건	변단면 형상	무차원 고유진동수, C_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전 - 회전	변화폭	57.58	110.49	153.84	246.86
	변화깊이	90.99	114.66	259.39	317.90
	정방향	87.47	112.37	209.71	295.30
고정 - 고정	변화폭	84.30	113.85	206.14	297.69
	변화깊이	105.04	121.00	309.43	331.84
	정방향	102.65	118.24	287.21	314.24

수치해석에 사용한 아치 변수는 변화폭 변단면, $r=1.5$, $k=100$, $f=0.3$ ($p=1.478$)이다. SAP 2000의 적용에서 무차원 변수의 입력은 불합리하기 때문에 검증에 사용한 실제 차원을 갖는 아치를 SAP 2000에 적용하였고, 아치의 곡선구간을 100개의 요소로 분할하였다. 이렇게 산정한 고유진동수(Hz)를 식 (37)을 이용하여 C_i 값으로 환산하였다. 이 표와 같이 두 결과는 평균 0.67%차이로 매우 우수하게 접근하고 있어 이 연구의 이론과 수치해석 방법의 타당성을 검증할 수 있다.

변단면은 미적 감각, 경제성 등으로 인하여 그 사용이 날로 증가하고 있다. 따라서 변단면 형상이 구조물의 동적 거동에 미치는 영향을 분석하는 것은 매우 중요하다. 표 2는



(a) 회전 - 회전 지점

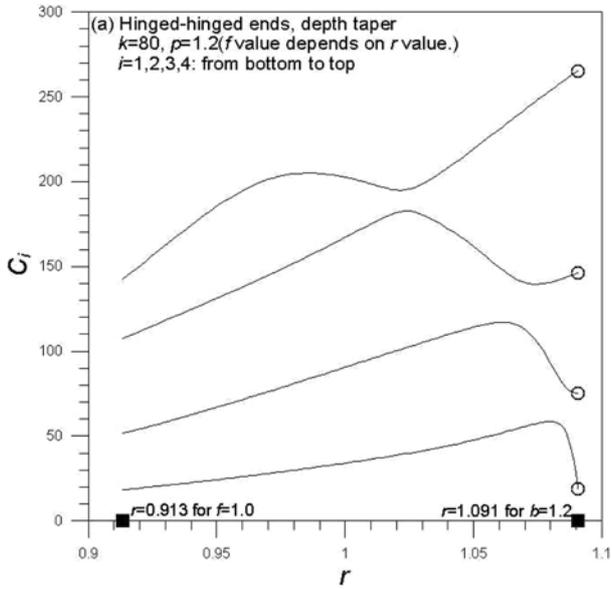


(b) 고정 - 고정 지점

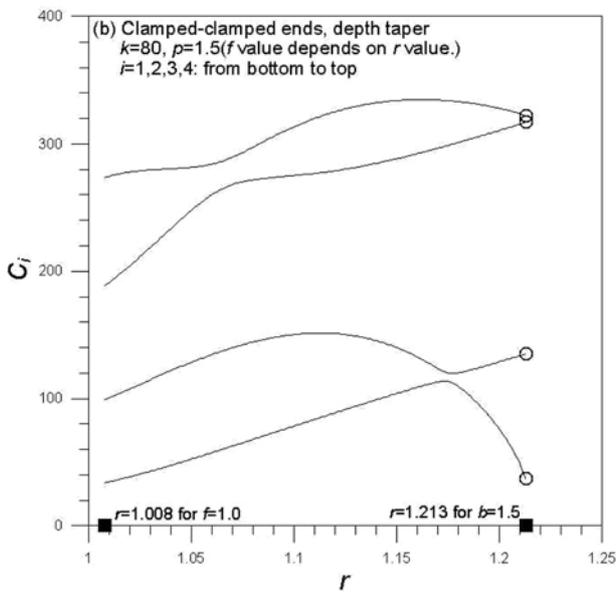
그림 9. 세장비(k) - 무차원 고유진동수(C_i) 곡선

변단면 형상이 C_i 에 미치는 영향을 나타낸 표이다. 수치해석에 사용한 아치 변수는 $r=1.2$, $k=80$, $f=0.2$ (변화폭: $p=1.192$, 변화깊이: $p=1.541$, 정방향: $p=1.352$)이다. 이 표에서와 같이 C_i 는 변화깊이, 정방향, 변화폭 변단면의 순서로 크다. 이 표에서 아치의 기하적 조건은 변단면 형상을 제외하고는 모두 같으므로 변단면 형상이 C_i 에 미치는 영향은 비교적 크다. 따라서 동적 하중에 대한 공진현상을 피하기 위해서 변단면 형상을 적절하게 선택하면 아치에 작용하는 동적 하중에 적절하게 대처할 수 있다.

그림 9는 세장비(k)와 무차원 고유진동수(C_i)사이의 관계를 나타낸 그림이다. 수치해석에 사용한 아치 변수는 변화폭 변단면, $r=1.2$, $f=0.3$ ($p=1.250$)이다. 이 그림에서와 같이 k 가 증가하면 C_i 는 증가한다. 특징적인 내용으로는 k 가 증가함에 따라 C_i 는 거의 선형적인 증가를 보이다가 그 이후에 특정 k 값부터는 C_i 의 증가가 거의 없고 이러한 양상을 반복적으로 나타낸다. 따라서 C_i 값을 증가시키기 위하여 무조건 큰



(a) 회전 - 회전 지점



(b) 고정 - 고정 지점

그림 10. 단면비(r) - 무차원 고유진동수(C_i) 곡선

k 값을 사용하는 것은 비합리적이고 그림 6과 같은 곡선으로부터 적절한 k 값을 결정하여 소요의 C_i 값을 산정하는 것이 합리적이다.

그림 10은 단면비(r)와 무차원 고유진동수(C_i)사이의 관계를 나타낸 그림이다. 수치해석에 사용한 아치 변수는 변화깊이 변단면, $k=80$ 이고 회전-회전 지점은 $p=1.2$ 이고, 고정-고정 지점은 $p=1.5$ 이다. p 값에 종속되는 높이비 f 는 r 값에 따라서 변화한다. 또한 주어진 p 값에 대하여 r 값은 두 개 ■로 표시한 사이의 r 값만 유효하다. 예로서 회전-회전 지점 아치에 대하여 r 이 $r=0.913$ 보다 작은 경우에는 $f > 1.0$ 이 되고, r 이 $r=1.091$ 보다 큰 경우에는 주어진 $p=1.2$ 의 하중으로는 좌굴이 발생하지 않아 정확탄성곡선을 이루지 못한다. 즉, r 값은 $0.913 < r < 1.091$ 에서 유효하다. 따라서 $r=1.091$ 에서 ○로 표시한 C_i 이후의 C_i 는 존재하지 않는 것을 알 수 있다. 이 그림에서와 같이 r 이 증가하면 C_i 는 증가-감소-증가를 한다.

5. 결론

이 연구는 변단면 정확탄성곡선형 아치의 자유진동을 해석한 논문이다. 변단면 정확탄성곡선형 아치의 선형을 산정하기 위한 후좌굴 기동의 비선형 해석은 문헌(이 등, 2009)의 방법을 이용하였다. 산정된 변단면 정확탄성곡선형 아치의 선형에 적용할 수 있는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였고, 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산정하였다. 일련의 수치해석 예를 분석하여 다음의 결론을 얻었다.

1. 정확탄성곡선 아치의 수렴성은 일반 아치에 비하여 현저히 둔화되었다.
2. 무차원 고유진동수 C_i 는 변화깊이, 정방향, 변화폭 변단면의 순서로 크다.
3. 세장비 k 는 C_i 를 증가시키는 요인으로 작용한다.
4. 단면비 r 이 증가하면 C_i 는 증가-감소-증가를 한다.

이 논문에서 개발한 이론 및 수치해석 결과는 아치 구조의 동적 설계에 매우 유용한 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

참고문헌

- 이병구, 김석기, 이태은, 김권식(2009) 후좌굴 변단면 기동의 기하 비선형 해석. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제29권, 제1A호, pp. 53-60.
- 이병구, 오상진, 이태은, 김권식(2008) Elastica형 아치의 자유진동. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제28권, 제6A호, pp. 827-833.
- BeGole, B.E. (1981) A computer program of dental arch from using catenary curve. Computer Program in Biomedicine, Vol. 13, No. 1-2, pp. 93-99.
- Borg, S.F. and Gennaro, J.J. (1959) Advanced structural analysis, Van Nostrand, NJ, USA.
- Falzon, B.G. and Aliabadi M.H. (2008) Buckling and post-buckling structures. Imperial College Press, UK.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Ahn, D.S. (2005) Elastica and buckling loads of shear deformable tapered columns. International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 5, No. 3, pp. 317-335.
- Lee, B.K., Oh, S.J., Li, G., and Choi, K.M. (2003) Free vibration analysis of parabolic arches in Cartesian Coordinates. International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 3, No. 3, pp. 377-390.
- Lee, B.K. and Wilson, J.F. (1990) Free vibrations of arches with variable curvature. Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 75-89.
- Leontovich, V. (1984) Frames and arches. McGraw-Hill Book Co., USA.
- Moon, J.H., Yoon, K.Y., Lee, T.H., and Lee, H.E. (2007) In-plane elastic buckling of pin-ended shallow parabolic arches. Engineering Structures, Vol. 29, No. 10, pp. 2611-2617.
- Nieh, K.Y., Huang, C.S., and Tseng, Y.P. (2003) An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches. Computer & Structures, Vol. 81, No. 13, pp. 1311-1327.
- Perkins, N.C. (1990) Planar vibration of an elastica arch. Journal of applied mechanics, ASME, Vol. 112, pp. 374-379.
- Tufekci, E. and Ozdemirci, O. (2006) Exact solution of free in-plane vibration of a stepped circular arch. Journal of Sound and Vibration, Vol. 295, pp. 725-738.

(접수일: 2009.4.22/심사일: 2009.6.18/심사완료일: 2009.6.18)