

<기술노트>

Euler-Lagrange 식을 사용한 확장형 완경사방정식 유도

Derivation of Extended Mild-Slope Equation Using Euler-Lagrange Equation

이창훈* · 김규한**

Lee, Changhoon · Kim, Kyu-Han

Abstract

In this study, we derive the extended mild-slope equation in terms of the velocity potential using the Euler-Lagrange equation. First, we follow Kim and Bai (2004) who derive the complementary mild-slope equation in terms of the stream function using the Euler-Lagrange equation and we compare their equation to the existing extended mild-slope equations of the velocity potential. Second, we derive the extended mild-slope equation in terms of the velocity potential using the Euler-Lagrange equation. In the developed equation, the higher-order bottom variation terms are newly developed and found to be the same as those of Massel (1993) and Chamberlain and Porter (1995). The present study makes wide the area of coastal engineering by developing the extended mild-slope equation with a way which has never been used before.

Keywords : wave transformation equation, extended mild-slope equation, higher-order bottom variation, Euler-Lagrange equation

요 지

본 연구에서 Euler-Lagrange 식을 사용하여 속도포텐셜로 표현되는 확장형 완경사방정식을 유도하였다. 먼저, Euler-Lagrange 식을 사용하여 흐름함수로 표현된 확장형 완경사방정식을 유도한 Kim과 Bai(2004)의 유도과정을 따라가면서 속도포텐셜로 표현된 확장형 완경사방정식과의 관계를 찾았다. 속도포텐셜로 표현된 Euler-Lagrange 식을 찾아낸 다음 고차의 수심변화 항을 유도하였다. 본 연구에서 유도된 확장형 완경사방정식은 기존의 식인 Massel(1993)의 식과 Chamberlain과 Porter(1995)의 식과 정확히 일치하였다. 본 연구의 연구 성과는 확장형 완경사방정식의 유도 방법을 새로 제시하여 해안공학의 영역을 넓히는데 의의가 있다.

핵심용어 : 파랑변형식, 확장형 완경사방정식, 고차의 수심변화, Euler-Lagrange 식

1. 서 론

파랑이 전파하는 동안 바닥지형의 변화로 천수, 굴절이 발생하고 섬이나 방파제와 같이 차폐된 해역이 지나는 경우 회절이 발생한다. 이러한 파랑의 변형을 모두 다 고려한 수심적분 수치모형으로 완경사방정식과 Boussinesq 방정식이 개발되었다. Berkhoff(1972)는 Galerkin 방법을 사용하여 수심이 완만하다는 가정 하에 바닥의 곡률($\nabla^2 h$)과 바닥경사의 제곱($(\nabla h)^2$) 항을 무시하여 타원형 완경사방정식을 유도하였다. 1990년대에 고차의 수심변화 항을 포함한 확장형 완경사방정식이 개발되었다. 확장형 완경사방정식은 바다의 경사가 급한 지형이나 사면과 같이 곡률 효과가 큰 지형에서 완경사방정식에 비해 파랑의 거동을 더 정확히 모의하는 것으로 확인되었다. Massel(1993)과 Chamberlain과 Porter(1995)는 Galerkin 방법을 사용하여 Berkhoff의 완경사방정식에 고차수심변화 항을 포함한 확장형 완경사방정식을 개발하

였다. Suh 등(1997)은 Green의 정리를 사용하여 Smith와 Sprinks(1975)의 완경사방정식에 고차의 수심변화 항을 포함하였고, Lagrange 공식을 사용하여 Radder와 Dingemans(1985)의 완경사방정식에 고차의 수심변화 항을 포함하였다. 이후 Lee 등(1998)은 수면에서의 동역학적 경계조건을 사용하여 Massel의 확장형 완경사방정식을 η 와 Q 의 1차 시간 미분 방정식으로 구성된 쌍곡선형 완경사방정식으로 변형하였다. 최근 Lee 등(2003)은 Taylor 급수 전개기법을 사용하여 Chamberlain과 Porter의 확장형 완경사방정식으로부터 불규칙과의 전파를 모의할 수 있는 확장형 완경사방정식을 개발하였다.

지금까지 언급한 완경사방정식과 확장형 완경사방정식은 속도포텐셜을 사용하여 유도되었다. 속도포텐셜과 비교되는 함수로 흐름함수가 있다. 속도포텐셜은 3차원 공간에 적용되는 반면 흐름함수는 2차원 공간에만 적용되어 속도포텐셜에 비해 실용성이 떨어진다. 연구의 목적에서 보면 흐름함수를

*정회원 · 교신저자 · 세종대학교 토목환경공학과 부교수 (E-mail : cleee@sejong.ac.kr)

**정회원 · 관동대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : kkhkim@mail.kwandong.ac.kr)

사용한 환경사방정식이나 확장형 환경사방정식의 유도가 필요한데, 한국의 연구진들이 선구적으로 흐름함수를 사용한 확장형 환경사방정식을 개발하였다. Kim과 Bai(2004)는 흐름함수로 유도된 식을 상보(相補) 환경사방정식(complementary mild-slope equation)이라고 불렀다. 그들은 과거에 사용한 유도방법인 Galerkin 방법이나 Green의 정리법이나 Lagrange공식을 사용하지 않고 Euler-Lagrange 식을 사용하여 유도하였다. 그들의 연구는 환경사방정식을 유도하는데 있어서 또 다른 길을 제시하여 해안공학자들의 시야를 넓혀주었다는 데 큰 의미가 있겠다.

본 연구에서 Euler-Lagrange 식을 사용하여 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식을 유도하였다. 이는 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식을 유도하는 방법으로 기존의 유도방법을 확장하는데 의미가 있다. 제2장에 Kim과 Bai가 Euler-Lagrange 식을 사용하여 흐름함수로 표현된 확장형 환경사방정식을 유도한 과정을 따라가면서 역학적인 의미를 찾아 보았다. 제3장에서 Euler-Lagrange 식을 사용하여 확장형 환경사방정식을 유도하고, 기존에 유도된 식과 비교하였다. 제4장에 결론을 맺었다.

2. 흐름함수로 표현된 확장형 환경사방정식 재유도

Euler-Lagrange 식을 사용한 흐름함수로 표현된 Kim과 Bai의 확장형 환경사방정식의 유도과정을 따라가면서 속도포텐셜로 표현된 식과 비교하였다. Euler-Lagrange 식은 1750년대에 Euler와 Lagrange가 입자가 아래로 떨어지면서 생기는 궤적을 구하는 문제에서 시작점이 어디에 있는지에 상관없이 일정한 시각에 일정한 지점에 떨어지는 현상을 수학적으로 구하는 과정에서 유도되었다. 변분미적분(calculus of variation)에서 범함수(functional)가 변수 값에 상관없이 일정한(stationary) 경우 그 해를 구하기 위한 미분 형태의 식이 Euler-Lagrange 식이다.

각주파수 ω 로 주기적으로 운동하는 경우, 복소수 변수 η 와 (u, w) 를 정의하고, 그 변수의 실수부 즉, $\text{Re}[\eta e^{-i\omega t}]$, $\text{Re}[ue^{-i\omega t}]$, $\text{Re}[we^{-i\omega t}]$ 를 각각 수면변위와 수평 및 수직 방향의 속도로 나타낼 수 있다. 또한, 유체운동의 흐름함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\psi(x, z, t) = \int_{-h}^z u(x, z', t) dz' \quad (1)$$

따라서, 속도 (u, w) 와 수면변위 η 를 다음과 같이 흐름함수로 표현할 수 있다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\eta = -i \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial x} \quad (3)$$

속도의 비회전성으로부터 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

속도포텐셜 ϕ 로 표현된 수면에서의 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건을 조합한 조건식에 수평공간 미분을 취하고 흐름함수로 표현하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (5)$$

바다에서의 운동학적 경계조건식을 흐름함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = -h \quad (6)$$

이는 흐름함수식 (1)로부터 당연히 나오는 결과이다. 왜냐하면 바다에서 바다까지 적분값은 0이기 때문이다. 즉,

$$\psi = 0 \quad \text{on } z = -h \quad (7)$$

식 (4)를 지배방정식으로 하고, 식 (5), (7)을 경계조건으로 한 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\psi(x, z, t) = f_s(z) \psi_0(x, t), \quad f_s(z) = \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \quad (8)$$

위 식에서 파수 k 는 다음과 같은 분산관계식으로 구할 수 있다.

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (9)$$

파랑의 시간 평균한 Lagrangian \bar{L} 을 다음과 같이 흐름함수로 표현할 수 있다.

$$\bar{L} = \int L dx, \quad L = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 \right] dz - \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\omega^2} \left| \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial x} \right|^2 \quad (10)$$

위 식에서 L 은 Lagrangian 밀도이다. 식 (8)을 식 (10)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다(Kim과 Bai, 2004).

$$\frac{L}{\rho} = \frac{1}{2} a \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right|^2 + \text{Re} \left[b \frac{\partial h}{\partial x} \psi_0 \frac{\partial \psi_0^*}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[k^2 \left(a + 2 \frac{g}{\omega^2} \frac{C}{C} \right) + c \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 \right] |\psi_0|^2 \quad (11)$$

위 식에서

$$a = \int_{-h}^0 f_s^2 dz - \frac{g}{\omega^2}, \quad b = \int_{-h}^0 f_s \frac{\partial f_s}{\partial h} dz, \quad c = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f_s}{\partial h} \right)^2 dz \quad (12)$$

위 첨자 *는 공액복소수를 의미한다. Kim과 Bai는 흐름함수로 표현된 확장형 환경사방정식을 유도하기 위하여 Lagrangian 밀도의 Euler-Lagrange 식을 다음과 같이 표현하였다.

$$\frac{\partial(L/\rho)}{\partial \psi_0} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(L/\rho)}{\partial(\partial \psi_0 / \partial x)} = 0 \quad (13)$$

위 식에서

$$\frac{\partial(L/\rho)}{\partial \psi_0} = b \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \left[k^2 \left(a + 2 \frac{g}{\omega^2} \frac{C}{C} \right) + c \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 \right] \psi_0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(L/\rho)}{\partial(\partial \psi_0 / \partial x)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial x} \psi_0 \right) \quad (15)$$

따라서, 식 (13)-(15)로부터 다음과 같이 흐름함수로 표현된 확장형 환경사방정식이 유도된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + k^2 a \psi_0 + \left[b \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial b}{\partial h} - c \right) \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 \right] \psi_0 = 0 \quad (16)$$

위 식에서 대각괄호 [] 안의 항은 고차의 수심변화 항으로서 첫 번째 항 b 가 수심의 곡률효과를 나타내고, 두 번째 항 $(\partial b / \partial h - c)$ 가 수심경사 제곱의 효과를 나타낸다.

Kim과 Bai가 유도한 Lagrangian 밀도식 (11)과 다른 꼴

로 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{L}{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2} \frac{C_g}{C} \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right|^2 + \left(\int_{-h}^0 f_s \frac{\partial f_s}{\partial x} dz \right) \operatorname{Re} \left(\psi_0 \frac{\partial \psi_0^*}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{gk^2 C_g}{\omega^2 C} + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} \right)^2 dz \right] |\psi_0|^2 \quad (17)$$

또한, Lagrangian 밀도의 Euler-Lagrange 식 (13)으로부터 다음과 같은 확장형 환경사방정식이 유도된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g}{C} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + k^2 \frac{C_g}{C} \psi_0 - \frac{\omega^2}{g} \left[\int_{-h}^0 f_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2} dz \right] \psi_0 = 0 \quad (18)$$

위 식은 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식 (31)과 비교되는 꼴의 식이다. 좌변의 세 번째 항이 고차의 수심변화 항으로 이 항을 무시하면 다음과 같은 환경사방정식이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g}{C} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + k^2 \frac{C_g}{C} \psi_0 = 0 \quad (19)$$

이 식은 속도포텐셜로 표현된 다음과 같은 환경사방정식과 비교되는 꼴의 식이다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(CC_g \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right) + k^2 CC_g \phi_0 = 0 \quad (20)$$

위 식에서 ϕ_0 는 평균수면에서의 속도포텐셜로 식 (21)에 표현되어 있다.

3. 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식 유도

Laplace 방정식을 지배방정식으로 하고, 수면 및 바닥에서의 경계조건으로 하고, 속도포텐셜로 표현된 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\phi(x, y, z, t) = f_v(z) \phi_0(x, y, t), \quad f_v(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (21)$$

위 식에서 파수 k 는 분산관계식 (9)로부터 구할 수 있다. 수면에서의 운동학적 경계조건은 다음과 같다.

$$\eta = \frac{i}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{on } z=0 \quad (22)$$

파랑의 시간 평균한 Lagrangian \bar{L} 를 다음과 같이 속도포텐셜로 표현할 수 있다.

$$\bar{L} = \iint L dx dy, \quad L = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left[|\nabla \phi|^2 + \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|^2 \right] dz - \frac{1}{2} \rho |\eta|^2 \quad (23)$$

위 식에서 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 은 수평방향의 미분연산자이다. 식 (21)을 식 (23)에 대입하고, 식 (22)를 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{L}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\int_{-h}^0 f_v^2 dz \right) |\nabla \phi_0|^2 + \left(\int_{-h}^0 f_v \nabla f_v dz \right) \cdot \operatorname{Re}(\phi_0 \nabla \phi_0^*) + \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega^2}{g} + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f_v}{\partial z} \right)^2 dz + \int_{-h}^0 (\nabla f_v)^2 dz \right] |\phi_0|^2 \quad (24)$$

속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식을 유도하기 위한 Lagrangian 밀도의 Euler-Lagrange 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(L/\rho)}{\partial \phi_0} - \nabla \cdot \frac{\partial(L/\rho)}{\partial(\nabla \phi_0)} = 0 \quad (25)$$

위 식에서

$$\frac{\partial(L/\rho)}{\partial \phi_0} = \left[-\frac{\omega^2}{g} + \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f_v}{\partial z} \right)^2 dz + \int_{-h}^0 (\nabla f_v)^2 dz \right] \phi_0 + \left(\int_{-h}^0 f_v \nabla f_v dz \right) \cdot \nabla \phi_0 \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial(L/\rho)}{\partial(\nabla \phi_0)} = \nabla \cdot \left[\left(\int_{-h}^0 f_v^2 dz \right) \nabla \phi_0 + \left(\int_{-h}^0 f_v \nabla f_v dz \right) \phi_0 \right] \quad (27)$$

따라서, 식 (25)-(27)로부터 다음과 같은 식이 유도된다.

$$\nabla \cdot \left[\left(\int_{-h}^0 f_v^2 dz \right) \nabla \phi_0 \right] + \left[\frac{\omega^2}{g} - \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f_v}{\partial z} \right)^2 dz - \int_{-h}^0 (\nabla f_v)^2 dz \right] \phi_0 + \left[\nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 f_v \nabla f_v dz \right) \right] \phi_0 = 0 \quad (28)$$

위 식에서

$$\nabla \cdot \left(\int_{-h}^0 f_v^2 dz \right) = \int_{-h}^0 \nabla \cdot (f_v \nabla f_v) dz - (f_v \nabla f_v) \Big|_{-h} \cdot \nabla(-h) = \int_{-h}^0 (\nabla f_v)^2 dz + \int_{-h}^0 f_v \nabla^2 f_v dz + (f_v \nabla f_v) \Big|_{-h} \cdot \nabla h \quad (29)$$

또한, 수심적분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{-h}^0 f_v^2 dz = \frac{CC_g}{g}, \quad \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f_v}{\partial z} \right)^2 dz = \frac{\omega^2}{g} \left(1 - \frac{C_g}{C} \right) \quad (30)$$

식 (29), (30)을 식 (28)에 대입하면 다음과 같이 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식이 유도된다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi_0) + k^2 CC_g \phi_0 + g \left(\int_{-h}^0 f_v \nabla^2 f_v dz + (f_v \nabla f_v) \Big|_{-h} \cdot \nabla h \right) \phi_0 = 0 \quad (31)$$

위 식에서 세 번째, 네 번째 항은 고차의 수심변화 항으로서 수심의 곡률 효과와 수심경사의 체공효과가 포함되어 있다. 식 (31)은 흐름함수로 표현된 확장형 환경사방정식 (18)과 비교된다. 식 (18)에서도 유도과정 중에 네 번째 항이 있었지만 $f_s \Big|_{-h} = 0$ 이어서 없어졌다. 식 (31)에서 f_v 의 공간 미분식은 다음과 같다.

$$\nabla f_v = \left(\frac{\partial f_v}{\partial h} + \frac{\partial f_v \partial k}{\partial k \partial h} \right) \nabla h \quad (32)$$

$$\nabla^2 f_v = \left[\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial f_v}{\partial h} \right) + \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial f_v}{\partial h} \right) \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial f_v}{\partial k} \right) \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial f_v}{\partial k} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial h} \right)^2 + \frac{\partial f_v}{\partial k} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial k}{\partial h} \right) \right] \nabla h^2 + \left(\frac{\partial f_v}{\partial h} + \frac{\partial f_v \partial k}{\partial k \partial h} \right) \nabla^2 h \quad (33)$$

식 (32), (33)을 식 (31)에 대입한 뒤 적분을 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi_0) + k^2 CC_g \left(1 + \frac{R_c}{k} \nabla^2 h + R_s |\nabla h|^2 \right) \phi_0 = 0 \quad (34)$$

위 식에서 R_c 와 R_s 는 각각 수심의 곡률 효과와 수심경사의 체공 효과를 결정짓는 항으로 다음과 같다.

$$R_c = \frac{\sinh 2kh - 2kh \cosh 2kh}{(2kh + \sinh 2kh)^2} \quad (35)$$

$$R_s = \frac{4}{2kh + \sinh 2kh} \{ k h \tanh^2 kh + \frac{1}{(2kh + \sinh 2kh)} [-\tanh kh \sinh 2kh + k h \tanh kh (3 - 4k h \tanh kh) + (kh)^2] + \frac{1}{6(2kh + \sinh 2kh)^2} [3 \sinh 2kh - 6kh \cosh 2kh - 6k h \tanh kh \cdot (-\sinh 2kh + 2kh \cosh 2kh) + 12(k h \tanh kh)^2 (2kh + \sinh 2kh) - 8(kh)^3] + \frac{1}{2(2kh + \sinh 2kh)^2} \left[1 + \cosh 2kh + \frac{2}{2kh + \sinh 2kh} (\sinh 2kh + kh - kh \cosh 2kh) \right] \cdot [-\sinh 2kh + 2kh \cosh 2kh - 2k h \tanh kh (2kh + \sinh 2kh)] \} \quad (36)$$

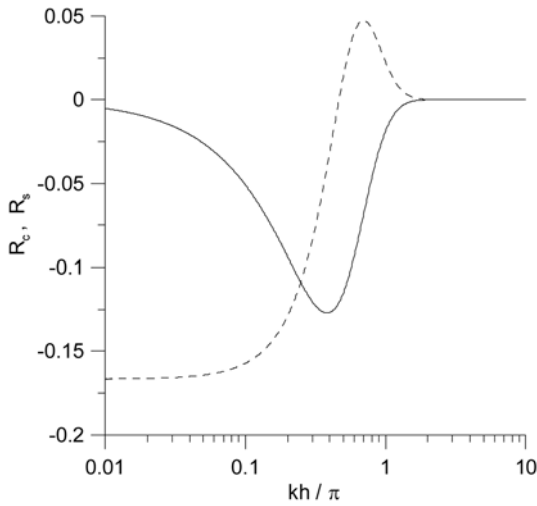


Fig. 1 Variation of R_c and R_s with kh : — = R_c , ... = R_s .

Massel(1993)은 Galerkin 방법을 사용하여 식 (34)와 같은 확장형 완경사방정식을 개발하였고, Suh 등(1997)은 Massel의 고차 수심변화 항에 오류를 확인하고 다음과 같이 정정하였다.

$$R_c = -\frac{4 \tanh kh}{2kh + \sinh 2kh} (U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3) \quad (37)$$

$$R_s = -\frac{4 \tanh kh}{2kh + \sinh 2kh} (W_1 I_1 + W_2 I_2 + W_3 I_3 + W_4 I_4 + W_5 I_5) \quad (38)$$

위 식에서 U_i , W_i , I_i 는 상대수심 kh 의 함수이다(Suh 등, 1997). 또한, Chamberlain과 Porter(1995)는 다음과 같은 고차의 수심변화 항을 유도하였다.

$$R_c = \frac{\sinh 2kh - 2kh \cosh 2kh}{(2kh + \sinh 2kh)^2} \quad (39)$$

$$R_s = \frac{1}{3(2kh + \sinh 2kh)^4} \{ (2kh)^4 + 4(2kh)^3 \sinh 2kh - 9 \sinh 2kh \sinh 4kh + 6kh(2kh + 2 \sinh 2kh)(\cosh^2 2kh - 2 \cosh 2kh + 3) \} \quad (40)$$

본 연구에서 유도된 R_c 와 R_s 는 (즉, 식 (35), (36))은 Massel의 항(즉, 식 (37), (38))과 Chamberlain과 Porter의 항(즉, 식 (39), (40))과 똑같았다. 상대수심에 따른 R_c 와 R_s 의 변화를 Fig. 1에 도시하였다. R_c 로 표현되는 곡률 효과는 심해에서 아주 작고, 중간수심에서 커지다가 $kh=0.38\pi$ 의 중간수심에서 최대로 효과가 나타나고, 천해로 갈수록 작아진다. R_s 로 표현되는 수심경사의 제곱 효과는 심해에서 아주 작고, 중간수심에서 양(+)의 효과로 커지다가 $kh=0.47\pi$ 의 중간수심에서 그 효과가 없어지다가 $kh=0.47\pi$ 보다 작은 수심에서 음(-)의 효과로 커지고, 천해에서는 효과가 점근적으로 가장 크게 나타난다. Lee 등(1998)은 곡률의 효과를 찾고자 할 때 식 (34)에서 R_c/k 대신에 R_c/k_0 를 사용하였다. $k_0(=\omega^2/g)$ 는 심해파의 파수이다. 곡률을 무차원화 하기 위해 사용하는 파수로 심해파의 파수보다는 각 수심에서의 파수를 사용함이 더 타당하다고 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서 Euler-Lagrange 식을 사용하여 속도포텐셜로

표현되는 확장형 완경사방정식을 유도하였다. 먼저, Euler-Lagrange 식을 사용하여 흐름함수로 표현된 확장형 완경사 방정식을 유도한 Kim과 Bai(2004)의 유도과정을 따라가면서 Euler-Lagrange 식의 의미를 찾아보았다. 그리고, 속도포텐셜로 표현된 Euler-Lagrange 식을 찾아낸 다음 고차의 수심변화 항을 유도하였다. 본 연구에서 유도된 확장형 완경사방정식은 기존의 식인 Massel(1993)의 식과 Chamberlain과 Porter(1995)의 식과 정확히 일치하였다. 본 연구의 연구 성과는 확장형 완경사방정식의 유도 방법을 하나 더 보태어 학문의 영역을 넓히는데 의의가 있다. 본 연구에서 확장형 완경사방정식을 유도할 때 공간적으로 감쇠하는 evanescent mode를 생략하였다. 변 수심의 중간수심에서는 evanescent mode가 중요하게 나타나기 때문에(이창훈 등, 2003) 향후 연구에서 파랑변형을 보다 더 정확히 규명하기 위해 evanescent mode를 포함시킬 필요가 있겠다. 또한 파랑간의 비선형 현상도 중요하기 때문에 이를 포함한 연구도 필요할 것이다.

감사의 글

본 논문은 2007년도 세종대학교 교내연구비의 지원을 받은 논문입니다.

참고문헌

- 이창훈, 조대희, 조용식(2003) 선형과 이론을 사용하여 파랑변형 예측 시 소멸과 성분의 중요성 검토: 2. 수치실험. **한국해양해양공학회지**, 한국해양해양공학회, 제15권 제1호, pp. 51-58.
- Berkhoff, J.C.W. (1972) Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engineering*, ASCE, pp. 471-490.
- Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995) The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, Vol. 291, pp. 393-407.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Lagrange_equation.
- Kim, J.W. and Bai, K.J. (2004) A new complementary mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, Vol. 511, pp. 25-40.
- Lee, C., Kim, G., and Suh, K.D. (2003) Extended mild-slope equation for random waves. *Coastal Engineering*, Vol. 48, pp. 277-287.
- Lee, C., Park, W.S., Cho, Y.-S., and Suh, K.D. (1998) Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, Vol. 34, pp. 243-257.
- Massel, S.R. (1993) Extended refraction-diffraction equation for surface waves, *Coastal Engineering*, Vol. 19, pp. 97-126.
- Radder, A.C. and Dingemans, M.W. (1985) Canonical equations for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves. *Wave Motion*, Vol. 7, pp. 473-485.
- Smith, R. and Sprinks, T. (1975) Scattering of surface waves by a conical island. *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, pp. 373-384.
- Suh, K.D., Lee, C., and Park, W.S. (1997) Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, Vol. 32, pp. 91-117.

(접수일: 2009.5.11/심사일: 2009.8.4/심사완료일: 2009.8.4)