

일정체적 정적 최강아치

Strongest Static Arches with Constant Volume

이병구* · 오상진** · 이태은***

Lee, Byoung Koo · Oh, Sang Jin · Lee, Tae Eun

Abstract

This paper deals with the strongest static arches with the solid regular polygon cross-section. Both span length and volume of arch are always held constant regardless the shape functions of cross-sectional depth of regular polygon. The normal stresses acting on such arches are calculated when both static vertical and horizontal point loads are subjected. By using the calculating results of stresses, the optimal shapes of strongest static arches are obtained, under which the maximum normal stress become to be minimum. For determining the redundant of such indeterminate arches, the least work theorem is adopted. As the numerical results, the configurations, i.e. section ratios, of the strongest static arches are reported in tables and figures. The results of this study can be utilized in the field of the minimum weight design of the arch structures.

Keywords : *strongest static arch, constant volume, least work theorem, tapered arch, minimum weight design*

요 지

이 논문은 정다각형 중실 변단면을 갖는 정적 최강아치에 관한 연구이다. 아치의 지간길이와 체적은 정다각형 단면깊이의 형상함수에 상관없이 항상 일정하다. 아치에 정적 연직 집중하중과 수평 집중하중이 작용하는 경우에 단면에 발생하는 최대 수직응력을 산정하였다. 산정된 최대 수직응력이 최소가 되는 정적 최강아치의 변단면 형상, 즉 일정체적 변단면 아치의 단면비를 산정하였다. 부정정 아치의 부정정력을 구하기 위하여 최소일의 원리를 이용하였다. 일련의 수치해석 예를 통하여 정적 최강아치의 단면비를 표 및 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과는 아치구조의 최소중량 설계에 매우 유용한 자료를 제공할 수 있다.

핵심용어 : 정적 최강아치, 일정체적, 최소일의 원리, 변단면 아치, 최소중량 설계

1. 서 론

아치는 보, 기둥, 평면판/곡면판 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 구조공학에서 빼대구조로 이용되고 있다. 구조물의 설계에서 최대 내하력을 갖는 최적형상을 찾는 것은 매우 중요한 문제이다(Hafika et al., 1990).

변단면은 구조물의 자중을 줄이고 작용하중에 대한 내하력을 증진시킬 수 있을 뿐만 아니라 미적 감각, 경제적 측면 등 다양한 목적 때문에 변단면의 이용은 날로 증가하는 추세이다.

이러한 관점에서 구조물의 최적형상을 찾는 문제는 구조공학에서 가장 주요한 연구대상 중에 하나이며 최적형상은 당연히 변단면 구조이다. 최적화 문제는 구조공학의 여러 분야에서 적용되고 있지만 이 연구와 직접 관련이 있는 최강구조에 대하여 연구동향을 고찰하면 다음과 같다. Keller (1960)는 최강기둥의 형상에 관한 연구에서 최강기둥

(strongest column)은 “일정량의 재료로 만들어진 길이가 동일한 기둥 중 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥”으로 정의하였다. Keller와 Niordson(1966)은 또 다른 최적화 개념인 최강기둥(tallest column)에 대하여 연구하였으며 여기서 최강기둥은 “일정량의 재료로 만들어진 기둥 중 자중에 의하여 좌굴이 발생하지 않는 최장길이를 갖는 기둥”으로 정의하였다. Taylor(1967)는 에너지 이론을 이용하여 최강기둥의 단면형상에 대한 연구를 수행하였다. Wilson 등(1971)은 삼각형 단면을 갖는 최강기둥의 단면깊이의 형상함수에 대하여 이론 및 실험적 연구를 수행하였다. Cox와 Overton(1992)은 좌굴에 대한 기둥의 최적 단면형상에 대하여 연구하였다. Atanackovic과 Simic(1999)은 기둥 축을 따라 등분포 비보존력이 작용하는 Pflüger 기둥의 최적형상에 대하여 연구하였다. 이 연구에서는 기둥의 제1고유진동수가 최대가 되는 동적 최강기둥의 단면형상을 찾았다. Lee와 Oh(2000)는 일정체적 기둥에 대하여 대변형 이론을 이용하여 최강기둥의

*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleest@wku.ac.kr)

**전남도립대학 토목환경과 교수 (E-mail : sjoh@dorip.ac.kr)

***정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 연구교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

단면형상을 찾았다. Lee 등(2006)은 기둥에 작용하는 압축하중에 대한 동적 개념을 이용하여 정적 최강기둥의 단면형상을 찾았다. 일정체적 정적 최강보에 대한 연구로는 이 등(2009a; 2009b)의 논문을 들 수 있다. 전자(이 등 2009a)는 단순지지 보를, 후자(이 등 2009b)는 고정-고정 및 고정-회전 지점으로 지지된 보를 대상으로 하였다. 이 연구들에서 정적 최강보는 “보의 기하적 조건 및 하중조건에 대하여 보의 최대 거동 값이 최소가 되는 단면형상을 갖는 보”로 정의하였으며, 최대 거동 값으로는 변위, 회전각 및 연응력을 택하여 최강보의 단면형상을 결정하였다.

위에서와 같이 정적 최강구조에 관한 연구는 기둥과 보를 대상으로 하고 있다. 아치는 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 작용하중에 대하여 큰 내하력을 갖는 단면형상을 찾는 문제는 최적설계의 분야에서 매우 중요한 연구과제이다.

이 연구는 일정체적 정적 최강아치(strongest static arch)에 관한 연구이다. 문헌고찰의 결과로 정적 최강아치에 관한 연구는 찾아볼 수 없었으며, 이 연구가 정적 최강아치에 관한 최초의 논문으로 생각된다. 이 논문에서 정적 최강아치는 “작용하중에 대하여 단면에 발생하는 최대 수직응력이 최소가 되는 아치”로 정의한다.

이 연구에서 아치의 지간길이나 체적은 항상 일정하고, 단면은 정다각형 중실단면이다. 아치의 기하, 지점 및 하중조건은 다음과 같다.

- 1) 아치 선형: 원호형, 포물선형, 정현형
- 2) 단면깊이 형상함수: 직선, 포물선, 정현
- 3) 지점조건: 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정
- 4) 작용하중: 연직 집중하중, 수평 집중하중

이 연구에서 해석대상 아치는 모두 부정정 구조이다. 이러한 부정정 아치를 최소일의 원리를 이용하여 지점반력을 산출하고 아치 축에 발생하는 합응력을 산정하였다. 합응력에 의하여 단면에 작용하는 수직 연응력의 최대값이 최소가 되는 정적 최강아치의 단면비를 산정하였다.

이 연구는 일정체적의 재료로 정적 최강아치의 형상을 찾는 논문이므로 최적설계의 문제에서 최소중량 설계의 한 분야로 분류할 수 있다.

2. 일정체적 곡선부재

2.1 부재의 정의

그림 1(a)는 지간길이 l , 높이 h , 부재(곡선)길이가 L 인 곡선부재를 나타낸다. 부재 축의 임의점은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며, 좌단 $a(x=0)$ 로부터 임의점 (x, y) 까지 곡선길이는 s 이다. 이 부재는 정점에 대하여 대칭이므로 정점($x=l/2$)에서 $s=L/2$ 이고, 우단 $b(x=l)$ 에서 $s=L$ 이다. 부재의 체적은 항상 일정체적 V 를 갖는다. 단면은 정다각형 중실(solid)단면이고 임의점 (x, y) 에서 정다각형 단면의 단면깊이, 단면적, 단면2차모멘트는 d, A, I 이다. 그림 1(b)는 (x, y) 에서 d 의 변화를 나타내며, 양단 a, b 에서 $d=d_a$ 이고, 정점에서 $d=d_c$ 이다. 임의점 (x, y) 에서 d 는 s/L 의 함수인 $d=d_a F(s/L)$ 로 표현되며, $F(s/L)$ 은 d 의 변화를 표현해주는 무차원 형상함수이다.

2.2 단면의 성질

단면깊이 d 의 형상함수를 결정하기 위하여 단면비 e 를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \frac{d_c}{d_a} \quad (1)$$

단면깊이가 d 인 정 $k(k \geq 3)$ 각형 단면의 A, I 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = c_1 d^2 \quad (2.1)$$

$$c_1 = k \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad (2.2)$$

$$I = c_2 d^4 \quad (3.1)$$

$$c_2 = \frac{k}{12} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{k}\right) \left[3 + \tan^2\left(\frac{\pi}{k}\right)\right] \quad (3.2)$$

위 식에서 $k = \infty$ 이면 원형 단면이다.

단면깊이 d 는 변화깊이이므로 곡선길이 s 에 관한 형상함수 F 로 나타내면 다음 식과 같다.

$$d = d_a F \quad (4)$$

여기서 $F = F(s/L)$ 이다.

식 (2)를 이용하여 일정체적 V 를 구하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^L A ds = c_1 c_3 d_a^2 L \quad (5)$$

여기서 c_3 는 식 (4)의 형상함수식 F 에 따라서 결정되는 무차원 계수이다.

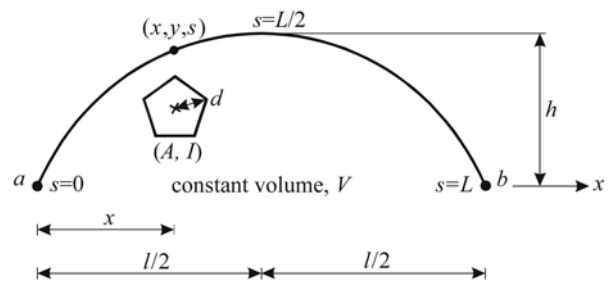
2.3 형상함수

변단면의 종류를 직선, 포물선, 정현으로 채택하면 식 (4)의 d 를 정의해주는 형상함수 F 및 식 (5)의 계수 c_3 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

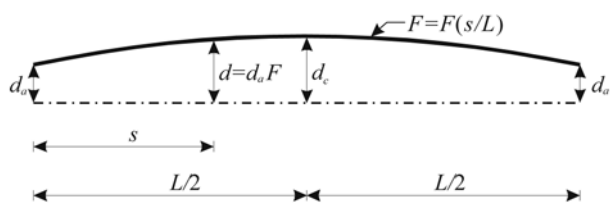
- 1) 직선 변단면(linear taper)

$$F = 2(e-1)\left(\frac{s}{L}\right) + 1, 0 \leq s \leq \frac{L}{2} \quad (6.1)$$

$$F = 2(e-1)\left(1 - \frac{s}{L}\right) + 1, \frac{L}{2} \leq s \leq L \quad (6.2)$$



(a) 일정체적 아치의 부재



(b) 단면깊이의 형상함수

그림 1. 일정체적 정다각형 변단면 곡선부재

$$c_3 = \frac{1}{3}(e^2 + e + 1) \quad (7)$$

2) 포물선 변단면(parabolic taper)

$$F = -4(e-1)\left(\frac{s}{L}\right)\left(\frac{s}{L}-1\right) + 1, 0 \leq s \leq L \quad (8)$$

$$c_3 = \frac{1}{15}(8e^2 + 4e + 3) \quad (9)$$

3) 정현 변단면(sinusoidal taper)

$$F = (e-1)\sin\left(\frac{\pi s}{L}\right) + 1, 0 \leq s \leq L \quad (10)$$

$$c_3 = \frac{e^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)e + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \quad (11)$$

식 (5)를 이용하여 부재 좌단 a 의 단면깊이 d_a 를 일정체적 V 로 나타내면 다음과 같다.

$$d_a = \left(\frac{V}{c_1 c_3 L}\right)^{1/2} \quad (12)$$

식 (12)를 이용하면 (x, y) 에서 식 (2), (3)의 A, I 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = c_1 d^2 = \left(\frac{V}{c_3 L}\right) F^2 \quad (13)$$

$$I = c_2 d^4 = c_2 \left(\frac{V}{c_1 c_3 L}\right)^2 F^4 \quad (14)$$

3. 수학적 모형

3.1 아치의 변수

그림 2는 제2장에서 정의된 곡선부재를 갖는 아치를 나타낸다. 시간길이, 높이, 부재길이, 일정체적은 각각 l, h, L, V 이다. 양단 a, b 는 회전 또는 고정지점으로 지지된다. 아치 선형은 직교좌표계 (x, y) 에서 $y=y(x)$ 로 정의되며, 임의점 (x, y) 에서 접선각은 θ 이고 곡선길이는 s 이다. P_v, P_h 는 정적 연직 및 수평 집중하중이고 작용위치는 $(x_v, y_v), (x_h, y_h)$ 이다. 좌측지점 a 의 수직반력, 수평반력 및 모멘트 반력은 R_v, R_h, M_a 이다. (x, y) 에서 휨 모멘트는 M , 축방향력은 N , 전단력은 Q 이며, N, M 의 조합에 의한 수직 연응력은 σ 이다.

하중이 여러 개 작용할 때에는 중첩의 원리가 적용되므로 각각 하중의 해석결과를 중첩시켜 해석한다. 분포하중인 경우에는 여러 개의 집중하중으로 이산화하여 적용한다.

3.2 최소일의 원리

이러한 부정정 아치를 최소일의 원리를 이용하여 구조해석을 실행한다. 최소일의 원리를 적용하기 위하여 임의점 (x, y) 에서 휨 모멘트 M 을 반력 R_v, R_h, M_a 를 이용하여 산정하

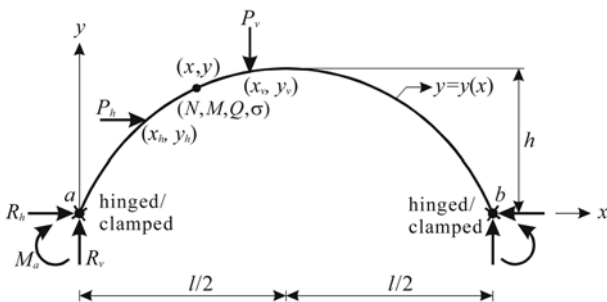


그림 2. 연직 및 수평 집중하중을 받는 아치

면 다음과 같다.

$$M = M_a + R_v x - R_h y + M_c \quad (15)$$

식 (15)에서 R_v, R_h, M_a 가 최소일의 원리를 이용하여 산정하여야 할 부정정력이고, M_c 는 그림 2의 부정정 아치를 그림 3과 같이 정정구조인 캔틸레버 아치로 전개했을 때 임의점 (x, y) 에서 휨 모멘트이며 다음 식과 같다.

$$M_c = P_v(x_v - x) + P_h(y_h - y) \quad (16)$$

위의 식 (16)은 $x > x_v, x > x_h$ 일 때에 만족하고 $x < x_v$ 이면 $P_v=0$ 으로, $x < x_h$ 이면 $P_h=0$ 으로 대체한다.

최소일의 원리를 적용하기 위해서는 변형에너지의 산정이 필요하다. 식 (15)의 휨 모멘트 식 M 을 이용하여 아치구조의 변형에너지 U 를 산정하면 다음과 같다.

$$U = \int_0^L \frac{1}{2EI} (M_a + R_v x - R_h y + M_c)^2 ds \quad (17)$$

낮은 아치에서는 축방향력 N 의 영향이 크기 때문에 이를 고려하여야 더 정확한 해석 결과를 얻을 수 있다. 이 연구에서는 식 (17)과 같이 변형에너지에 축방향력을 고려하지 않았지만 $f > 0.05$ 이상의 실용적인 범위의 아치에 대해서는 식 (17)로 충분하다.

그림 2의 부정정 아치에서 좌측지점 a 의 부정정력 R_v, R_h, M_a 를 최소일의 원리를 이용하여 다음과 같이 지점조건 별로 산정한다.

3.2.1 회전-회전 아치

회전-회전 아치에서 $M_a=0$ 이고, 우측지점 b 에 대한 모멘트 평형방정식 $\sum M_b = 0$ 을 적용하여 R_v 를 구하면 다음 식과 같다.

$$R_v = \frac{1}{l} [P_v(l - x_v) - P_h y_h] \quad (18)$$

회전-회전 아치는 1차부정정 구조이므로 미지반력 R_h 를 부정정력으로 채택하면 최소일의 원리로부터 $\partial U / \partial R_h = 0$ 이 된다. 여기에 식 (17)을 적용하면 다음과 같이 R_h 를 구할 수 있다.

$$R_h = \frac{1}{\kappa_1} (\kappa_2 R_v + \kappa_3) \quad (19)$$

여기서,

$$\kappa_1 = \int_0^L \frac{y^2}{EI} ds \quad (20)$$

$$\kappa_2 = \int_0^L \frac{xy}{EI} ds \quad (21)$$

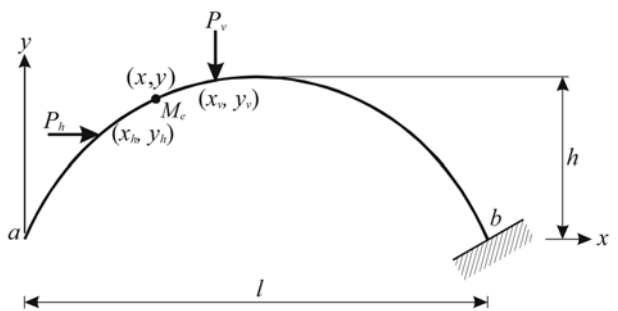


그림 3. M_c 산정을 위한 캔틸레버 아치

$$\kappa_3 = \int_0^L \frac{M_c y}{EI} ds \quad (22)$$

3.2.2 회전-고정 아치

회전-고정 아치에서 $M_a=0$ 이고 2차부정정이다. 2개의 미지 반력 R_v, R_h 를 부정정력으로 채택하면 최소일의 원리로부터 $\partial U/\partial R_v = 0, \partial U/\partial R_h = 0$ 이 된다. 이 식들에 식 (17)을 적용하고 연립방정식을 풀면 R_v, R_h 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = \frac{\kappa_1 \kappa_5 - \kappa_2 \kappa_3}{\kappa_2^2 - \kappa_1 \kappa_4} \quad (23)$$

$$R_h = \frac{1}{\kappa_1} (\kappa_2 R_v + \kappa_3) \quad (24)$$

여기서,

$$\kappa_4 = \int_0^L \frac{x^2}{EI} ds \quad (25)$$

$$\kappa_5 = \int_0^L \frac{M_c x}{EI} ds \quad (26)$$

3.2.3 고정-고정 아치

고정-고정 아치는 3차부정정이다. 따라서 3개의 미지반력 R_v, R_h, M_a 를 부정정력으로 채택하면 최소일의 원리로부터 $\partial U/\partial R_v = 0, \partial U/\partial R_h = 0, \partial U/\partial M_a = 0$ 이 된다. 여기에 식 (17)을 적용하고 연립방정식을 풀면 R_v, R_h, M_a 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = \frac{x_1 x_6 - x_3 x_5}{x_2 x_5 - x_1 x_4} \quad (27)$$

$$R_h = \frac{1}{x_1} (x_2 R_v + x_3) \quad (28)$$

$$M_a = -\frac{1}{\kappa_6} (\kappa_7 R_v - \kappa_8 R_h + \kappa_9) \quad (29)$$

여기서,

$$\kappa_6 = \int_0^L \frac{1}{EI} ds \quad (30)$$

$$\kappa_7 = \int_0^L \frac{x}{EI} ds \quad (31)$$

$$\kappa_8 = \int_0^L \frac{y}{EI} ds \quad (32)$$

$$\kappa_9 = \int_0^L \frac{M_c}{EI} ds \quad (33)$$

식 (27), (28)에서 $x_1 \sim x_6$ 은 다음과 같다.

$$x_1 = \kappa_7 \kappa_8 - \kappa_2 \kappa_6 \quad (34.1)$$

$$x_2 = \kappa_7^2 - \kappa_4 \kappa_6 \quad (34.2)$$

$$x_3 = \kappa_7 \kappa_9 - \kappa_5 \kappa_6 \quad (34.3)$$

$$x_4 = \kappa_4 \kappa_8 - \kappa_2 \kappa_7 \quad (34.4)$$

$$x_5 = \kappa_2 \kappa_8 - \kappa_1 \kappa_7 \quad (34.5)$$

$$x_6 = \kappa_5 \kappa_8 - \kappa_3 \kappa_7 \quad (34.6)$$

이상의 식들에서 적분 $\kappa_1 \sim \kappa_9$ 는 아치의 기하 및 하중조건에 의하여 산정되는 값이므로 아치의 지점조건 별로 좌측 지점의 반력 R_v, R_h, M_a 를 산정할 수 있다. $\kappa_1 \sim \kappa_9$ 의 계산

에서 $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ 이므로 ds 를 이 식으로 대체하고, 적분상한인 부재길이 L 을 지간길이 l 로 대체하여 적분을 실행한다. 예를 들어 식 (20)의 적분 κ_1 은 다음과 같은 식으로 변환하여 적분을 실행하는 것이 실용적이다.

$$\kappa_1 = \int_0^l \frac{y^2}{EI \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dx \quad (35)$$

3.3 연응력

위와 같이 좌측지점의 반력이 모두 산정이 되면 아치 축의 임의점 (x, y) 에서 휨 모멘트 M 은 식 (15)로 계산할 수 있고, 축방향력 N 및 전단력 Q 는 평형방정식을 이용하여 정적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N = (R_v - P_v) \sin \theta + (R_h + P_h) \cos \theta \quad (36)$$

$$Q = (R_v - P_v) \cos \theta - (R_h + P_h) \sin \theta \quad (37)$$

위의 식 (36), (37)은 $x > x_v, x > x_h$ 일 때에 만족하고 $x < x_v$ 이면 $P_v = 0$ 으로, $x < x_h$ 이면 $P_h = 0$ 으로 대체한다.

기존의 연구에서 최강구조를 판단하기 위한 구조의 거동 값으로는 처짐, 회전각, 연응력 등을 채택하였다(이 등, 2009a,b). 아치는 연직방향 구조이므로 보, 평판 등과 같은 수평방향 구조에 비하여 처짐과 회전각은 최강구조를 결정하기 위한 거동 값으로는 적합하지 못하다. 아치는 축방향력과 휨에 저항하는 구조이므로 축방향력 N 과 휨 모멘트 M 이 조합된 다음 식 (38)과 같은 연응력(extreme fiber stress) σ 를 최강아치를 결정하기 위한 거동 값으로 채택하였다.

$$\sigma = \frac{|N| + |M|}{A} \quad (38)$$

이 연구에서는 단면의 국부좌굴은 고려하지 않으므로 축방향력과 휨 모멘트에 절대값을 취하여 연응력을 모두 “+”의 수직응력으로 산정하였다.

4. 수치해석 방법

4.1 아치의 선형 방정식

아치의 선형에는 매우 다양한 선형들이 있지만 구조공학 분야에서 실용적인 선형으로는 원호형, 포물선형, 정현형 아치를 들 수 있다(Leontovich, 1974). 일정체적을 갖는 아치의 단면성질 및 부정정 아치를 해석하기 위해서는 아치 축의 좌표 (x, y) 를 정의하여야 한다. 이 연구에서는 적용 아치의 선형을 원호형, 포물선형, 정현형으로 채택하였다.

4.1.1 원호형 아치

그림 2에서 지간길이가 l 이고 높이가 h 인 원호형 아치(circular arch)의 선형 방정식은 다음 식과 같다.

$$y = \sqrt{\frac{(l^2 + 4h^2)^2}{64h^2} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{l^2}{2} \frac{l}{8h} \quad (39)$$

식 (36), (37)의 합응력 N, Q 를 산정하기 위한 접선각 θ 는 다음 식을 이용하여 산정한다.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (40)$$

식 (6), (8), (10)에서 나타낸 형상함수 F 를 산정하기 위하여 아치축 (x, y) 에서 곡선길이 s 는 다음 식으로 산정할 수 있다.

$$s = \int ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (41)$$

위의 식에서 $x=0$ 에서 $s=0$ 이므로 적분상수는 "0"이다. 우측지점에서 곡선길이 $L=s_x=\rho$ 이다.

식 (40), (41)에서 dy/dx 는 식 (39)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \left[\frac{(l^2 + 4h^2)^2}{64h^2} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (42)$$

이상과 같이 원호형 아치의 선형과 관련된 식 (39)~(42)가 정의되었으므로 부정정 원호형 아치를 해석할 수 있다.

4.1.2 포물선형 아치

그림 2에서 지간길이가 l 이고 높이가 h 인 포물선형 아치 (parabolic arch)의 선형 방정식 y 와 dy/dx 는 다음과 같다.

$$y = -\frac{4h}{l^2}x(x-l) \quad (43)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4h}{l^2}(2x-l) \quad (44)$$

4.1.3 정현형 아치

그림 2에서 지간길이가 l 이고 높이가 h 인 정현형 아치 (sinusoidal arch)의 선형 방정식 y 와 dy/dx 는 다음과 같다.

$$y = h \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (45)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi h}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (46)$$

4.2 무차원 변수

공학적인 해석결과를 무차원으로 표현하는 것은 매우 중요하다. 이러한 점에서 이 연구에서 얻어진 최강아치의 수치해석 결과를 무차원으로 표현하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$f = \frac{h}{l}, \alpha = \frac{l}{l}, \beta = \sqrt{\frac{l}{l^3}} \quad (47) \sim (49)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \eta = \frac{y}{l}, \lambda = \frac{s}{l} \quad (50) \sim (52)$$

$$\xi_v = \frac{x_v}{l}, \xi_h = \frac{x_h}{l} \quad (53), (54)$$

$$P_v = \frac{P_v l^4}{EV^2}, P_h = \frac{P_h l^4}{EV^2} \quad (55), (56)$$

$$r_v = \frac{R_v l^4}{EV^2}, r_h = \frac{R_h l^4}{EV^2} \quad (57), (58)$$

$$m_a = \frac{M_a l^3}{EV^2}, m_c = \frac{M_c l^3}{EV^2} \quad (59), (60)$$

$$m = \frac{Ml^3}{MV^2} = m_a + r_v \xi - r_h \eta + m_c \quad (61)$$

$$n = \frac{Nl^4}{EV^2} = (r_v - p_v) \sin \theta + (r_h + p_h) \cos \theta \quad (62)$$

$$q = \frac{Ql^4}{EV^2} = (r_v - p_v) \cos \theta - (r_h + p_h) \sin \theta \quad (63)$$

$$\varepsilon = \frac{|\sigma|}{\beta E} = \left(\frac{|N|}{EA} + \frac{|M|}{EI} d \right) \frac{l^{3/2}}{V^{1/2}} = \frac{\alpha \beta c_3 |n|}{F^2} + \frac{(\alpha c_1 c_3)^{3/2} |m|}{c_2 F^3} \quad (64)$$

식 (47)의 f 는 높이 지간길이 비이다. 식 (48)의 α 는 부재 길이 지간길이 비이며 f 값에 종속되는 값이다. 식 (49)의 β 는 형상비이며, $\beta^2 (= l/l^3)$ 은 지간길이 l^3 에 대한 체적 V 의 비로 정의된다. 식 (50), (51)의 (ξ, η) 는 무차원 직교 좌표계이고, 식 (52)의 λ 는 무차원 곡선길이이다. 식 (53), (54)의 (ξ_v, ξ_h) 는 연직 및 수평 집중하중의 무차원 수평좌표이다. 식 (55), (56)의 (p_v, p_h) 는 무차원 연직 및 수평 집중하중이다. 식 (57)~(59)의 (r_v, r_h, m_a) 는 무차원 반력, 식 (60)의 m_c 는 그림 3에서 정적으로 산정되는 무차원 휨 모멘트, 식 (61)~(63)의 (m, n, q) 는 무차원 합응력이다. 여기서, 식 (62), (63)은 $\xi > \xi_v, \xi > \xi_h$ 일 때에 만족하고 $\xi < \xi_v$ 이면 $p_v = 0$ 으로, $\xi < \xi_h$ 이면 $p_h = 0$ 으로 대체한다. 식 (64)의 ε 은 무차원 연응력이다.

4.3 최강아치의 결정과정

이상에서 전개한 이론을 이용하면 주어진 일정체적을 갖는 아치들 중에서 연응력에 대하여 가장 강인(robust)한 정적 최강아치의 단면비를 결정할 수 있다. 최강단면비를 찾기 위한 수치해석 과정을 순차적으로 설명하면 다음과 같다.

- 1) 해석조건 즉, 아치 선형(원호형/포물선형/정현형), 변단면종류(직선/포물선/정현), 지점조건(회전-회전/회전-고정/고정-고정), 높이 지간길이 비 f , 형상비 β 정다각형 변수 k , 하중조건 $(p_v, \xi_v), (p_h, \xi_h)$ 을 입력한다.
 - 2) 단면비 e 를 입력한다.
 - 3) 계수 c_1, c_2, c_3 를 계산한다.
 - 4) 아치 축의 좌표 (ξ, η) 를 계산한다.
 - 5) (ξ, η) 에서 곡선길이 λ 및 접선각 θ 를 계산한다. 부재 길이 지간길이 비 $\alpha = \lambda_{\xi=1}$ 이다.
 - 6) (ξ, η) 에서 무차원 형상함수 $F(\lambda/\alpha)$ 를 계산한다.
 - 7) 수평 집중하중의 작용위치 η_h 를 계산한다.
 - 8) (ξ, η) 에서 휨 모멘트 m_c 를 계산한다.
 - 9) Runge-Kutta 법(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하여 $\kappa_1 \sim \kappa_9$ 의 무차원 값을 계산한다.
 - 10) 좌측지점의 반력 r_v, r_h, m_a 를 계산한다.
 - 11) (ξ, η) 에서 합응력 m, n, q 를 계산한다.
 - 12) (ξ, η) 에서 연응력 ε 을 계산한다.
 - 13) 2)에서 입력한 단면비 e 로 계산된 (ξ, η) 의 ε 값들 중에서 최대연응력 ε_m 을 찾는다.
 - 14) 단면비 $e(0 < e \leq 5)$ 를 변화시키며 2)~13)의 과정을 반복시행하여 (e, ε_m) 을 찾는다.
 - 15) (e, ε_m) 의 결과로부터 ε_m 이 최소가 되는 연응력 $\varepsilon_{m,m}$ 을 갖는 단면비 e 를 최강단면비 e_{st} 로 결정한다.
 - 16) 계산된 $(r_v, r_h, m_a), (m, n, q, \varepsilon), (e_{st}, \varepsilon_{m,m})$ 을 출력한다.
- 이렇게 찾은 단면비 e_{st} 가 1)의 단계에서 입력한 아치의 최강단면비가 되며 이 e_{st} 를 갖는 아치가 정적 최강아치이다. 정적 최강아치는 일정체적 $V(= \beta^2 l^3)$ 에 대하여 최대연응력 ε_m 이 최소가 되는 연응력 $\varepsilon_{m,m}$ 을 가지므로 연응력 ε 에 대하여 가장 강인한 아치가 된다. 따라서 $\sigma_{m,m} < \sigma_{all}$ 을 만족하는

최소제적을 갖는 아치가 최소중량 아치이다. 여기서 식 (64)에 의하여 $\sigma_{m,m} = E\beta\varepsilon_{m,m}$ 이고, σ_{all} 은 아치 재료의 허용 응력이다.

5. 수치해석 예 및 토의

이상의 해석이론을 FORTRAN어로 컴퓨터 프로그래밍하였다. 입력변수 및 수치해석의 결과는 4.3절에서 도입한 무차원 변수를 이용하여 나타내었다. 아치 선형(원호형/포물선형/정현형), 변단면 종류(직선/포물선/정현), 지점조건(회전-회전/회전-고정/고정-고정) 및 높이 지간길이 비 f , 정다각형 변수 k , 형상비 β , 하중조건 $(p_v, \xi_v), (p_h, \xi_h)$ 을 입력하고 최강단면 비 e_{st} 및 최대연응력의 최소값 $\varepsilon_{m,m}$ 을 계산하였다. “최대연응력의 최소값” $\varepsilon_{m,m}$ 을 간단한 표기를 위하여 이후 “최소연응력”으로 표기한다. 아치의 구조해석 만을 실행하는 경우에는 단면비 e 값을 추가로 입력하고 무차원 반력 m, n, q , 무차원 합응력 r_v, r_h, m_a , 및 무차원 연응력 ε 을 산정하였다.

5.1 수렴해석 및 검증

수치해석 예를 보이기 전에 3.2절의 $\kappa_1 \sim \kappa_9$ 의 적분 값의 정확도를 확보하기 위하여 수렴해석을 실시하고 그 결과를 그림 4에 나타내었다. 아치의 해석조건을 그림의 상단에 표시하였으며 r_v, r_h, m_a 은 β 값의 크기와 상관없다. 이 그림에서 $1/\Delta\xi$ 는 무차원 지간길이의 분할개수를 나타낸다. 반력 r_v, r_h, m_a 은 $1/\Delta\xi$ 를 50이상으로 할 때 충분한 정도로 수렴한다. 이 연구에서는 수치해의 정확도를 충분히 확보하기 위하여 $1/\Delta\xi=100$ 을 채택하여 수치해를 얻었다. 이 경우에 r_v, r_h, m_a 은 $1/\Delta\xi=200$ 의 수치해에 대하여 유효숫자 3자리의 정도를 갖는다.

이 연구의 이론 및 수치해석 방법을 검증하기 위하여 이 연구와 SAP 2000에서 산정한 반력 및 합응력(아치 정점)을 표 1에 수록하였다. 수치해석에 이용한 아치의 기하 및 하중 조건은 다음과 같고, 요소 수는 100을 이용하였다.

- 원호형 아치, 선형 변단면, 직사각형 단면
- 지점조건: 회전-회전; 회전-고정; 고정-고정

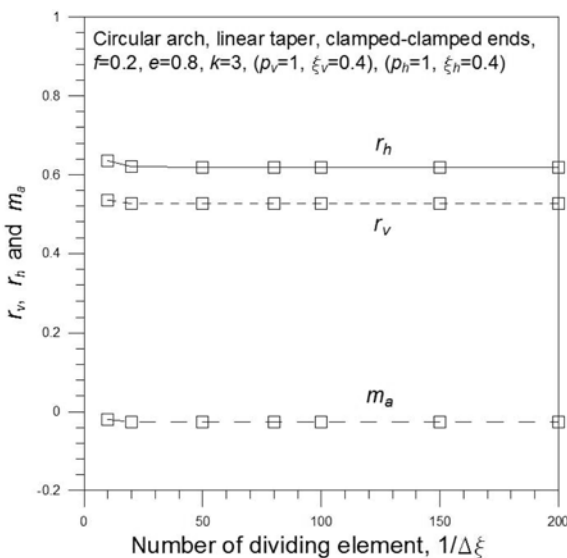


그림 4. 수렴해석

표 1. 본 연구와 SAP 2000의 해석결과 비교

• 반력 비교: SAP 2000

지점 조건	자료 출처	반력		
		$R_v(N)$	$R_h(N)$	$M_a(Nm)$
회전-회전	본 연구	317.91	326.63	0
	SAP 2000	317.91	325.25	0
회전-고정	본 연구	398.71	567.46	0
	SAP 2000	397.38	561.76	0
고정-고정	본 연구	411.34	482.58	-20.55
	SAP 2000	411.37	468.97	-22.58

• 합응력 비교

지점 조건	자료 출처	합응력(아치 정점)		
		$N(N)$	$Q(N)$	$M(Nm)$
회전-회전	본 연구	1107.88	-463.34	10.09
	SAP 2000	1103.27	-470.96	10.37
회전-고정	본 연구	1348.71	-382.54	2.32
	SAP 2000	1340.33	-393.12	2.80
고정-고정	본 연구	1263.83	-369.91	5.06
	SAP 2000	1247.63	-378.49	5.77

- $l=1$ m, $h=0.2$ m, $V=0.000625$ m³
- $d_v=0.0187$ m, $d_c=0.0150$ m
- $P_v=781.25$ N, $x_v=0.4$ m, $P_h=781.25$ N, $x_h=0.4$ m

표 1에서 두 결과의 차이는 반력의 경우에 평균 3.48%, 합응력의 경우에 평균 4.56%를 보이고 있어 이 연구의 타당성을 검증할 수 있었다. $f > 0.05$ 이상의 실용적인 범위의 아치에서는 이 연구와 SAP 2000의 결과는 위와 거의 같은 수준의 차이가 있는 것을 확인할 수 있었다.

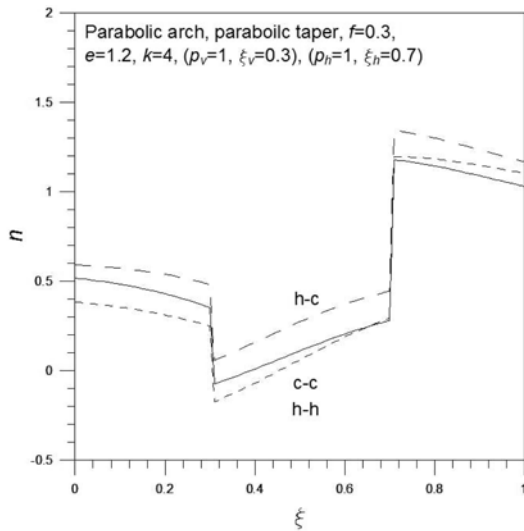
5.2 합응력

최강단면비를 결정하기 위해서는 합응력을 산정하여야 한다. 그림 5는 구조해석 결과인 합응력도 (a) 축방향력도 (AFD), (b) 휨 모멘트도(BMD) 및 (c) 전단력도(SFD)를 나타낸다. 이 그림 상단에 해석조건을 나타내었으며, 합응력은 β 값의 크기와 상관없다.

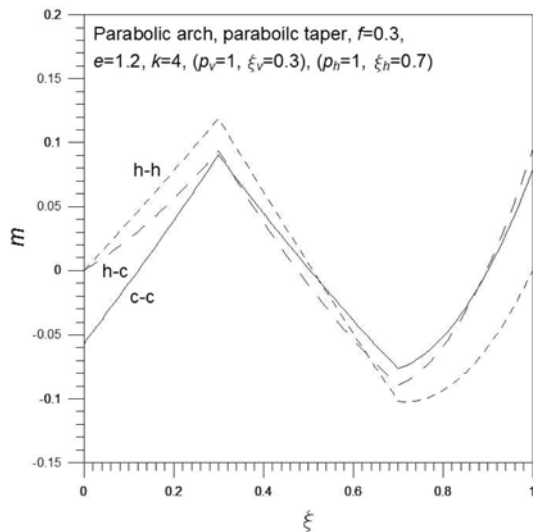
지점조건을 나타내는 기호인 ‘h’는 회전지점을, ‘c’는 고정 지점을 나타낸다. 예로서 ‘h-c’는 회전-고정 지점의 아치를 나타낸다. 하중 작용점 ($\xi_v=0.3, \xi_h=0.7$)에서 (AFD) 및 (SFD)는 축방향력 및 전단력의 단락 현상을 보이고, 하중 작용점에서 (BMD)는 최대, 최소값을 나타낸다.

5.3 최강단면비 결정

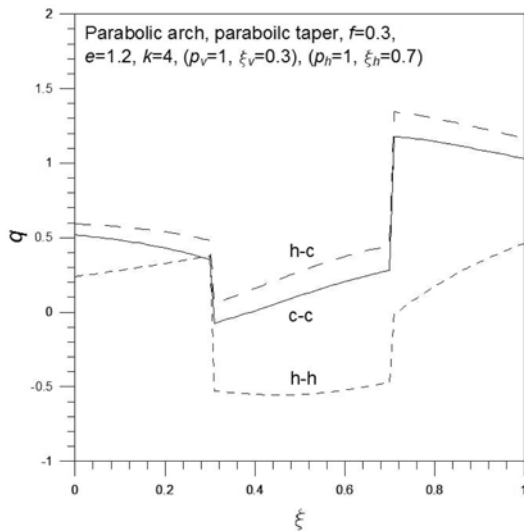
주어진 아치 선형, 변단면 종류, 지점조건, 정다각형 변수, 하중크기 및 하중위치에 대하여 최강단면비 e_{st} 를 결정하는 순서를 그림을 통하여 설명하면 다음과 같다. 그림 6은 주어진 해석조건 및 단면비 e (그림 상단에 표시)에 대한 아치 축(ξ)의 연응력(ε) 곡선을 나타낸다. 이 그림으로부터 단면비 $e=0.6$ 에 대한 최대연응력 ε_m 을 회전-회전(h-h)은 1.049, 회전-고정(h-c)은 0.754, 고정-고정(c-c)은 0.810으로 결정할 수



(a) 축방향력도(AFD)



(b) 휨 모멘트도(BMD)



(c) 전단력도(SFD)

그림 5. 합응력도

있으며 이 값들의 좌표를 ▲로 표시하였다.

이와 같은 방법으로 단면비 e 값을 변화시키며 $\varepsilon_{m,m}$ 값을 계산하고 이를 그림으로 나타내면 그림 7과 같다. 그림 6에서 계산한 $e=0.6$ 에 대한 ▲의 ε_m 값이 이 그림에서도 ▲로 표시되어 있다. 그림 7로부터 ε_m 이 최소가 되는 좌표 ($e_{st}, \varepsilon_{m,m}$)

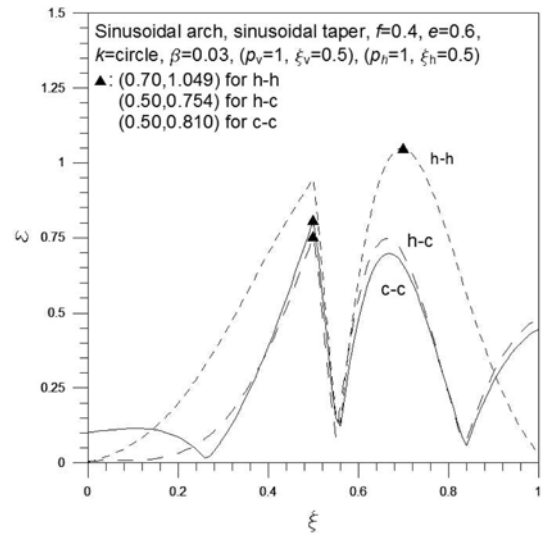


그림 6. ξ - ε 곡선

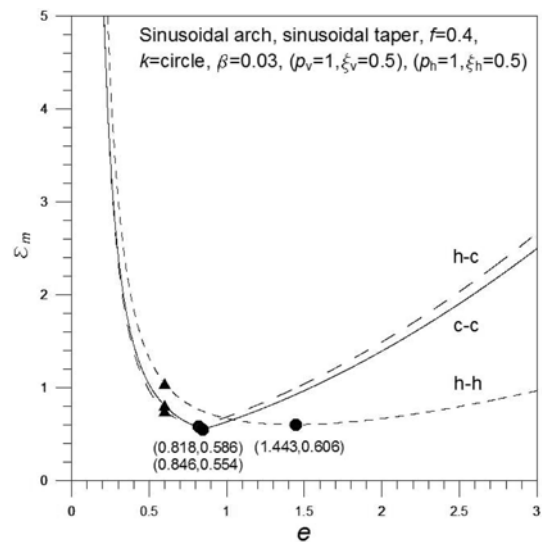


그림 7. e - ε_m 곡선

을 ●로 표시하고 이 값들을 그림의 ()에 수록하였다. 따라서 그림 7의 상단에 표시한 값은 e_{st} 를 회전-회전은 1.443, 회전-고정은 0.818, 고정-고정은 0.846으로 결정할 수 있고 이에 대응하는 $\varepsilon_{m,m}$ 값들을 각각 0.606, 0.586, 0.554로 결정할 수 있다. 이렇게 산정된 최강단면비 e_{st} 를 갖는 값이 정적 최강이치이며 식 (49)를 이용하여 최소체적 V 를 산정할 수 있다.

5.4 변수연구

이상의 해석방법을 이용하여 여러 가지 무차원 변수를 변화시키며 최강단면비 e_{st} 및 최소연응력 $\varepsilon_{m,m}$ 을 산정하고 그 영향을 분석하였다.

표 2는 이치 선형이 e_{st} 와 $\varepsilon_{m,m}$ 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 해석조건은 선형변단면, $f=0.1$, $k=3$, $\beta=0.03$, ($p_v=1$, $\xi_v=0.4$), ($p_h=1$, $\xi_h=0.7$)이다. e_{st} 값은 정현형, 포물선형, 원호형 선형의 순서로 크며, $\varepsilon_{m,m}$ 값은 위의 순서와 반대이다. e_{st} 값은 단지 단면깊이 d 의 형상을 결정하며, 이에 대응하는 $\varepsilon_{m,m}$ 값이 구조의 안전성에 관여한다. $\varepsilon_{m,m}$ 값이 더 작아지면 더 안전하므로 정현형, 포물선형, 원호형 선형의 이치 순서로 유리하다. 예로서 회전-회전 지점조건에서 원호형은 정

표 2. 아치 선형이 최강단면비(e_{st}) 및 최소연응력($\epsilon_{m,m}$)에 미치는 영향

지점 조건	아치 선형	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$	비율*
회 전 - 회 전	원호형	1.290	0.635	1.110
	포물선형	1.298	0.625	1.093
	정현형	1.351	0.572	1.000
회 전 - 고 정	원호형	0.851	0.684	1.112
	포물선형	0.859	0.674	1.096
	정현형	0.917	0.615	1.000
고 정 - 고 정	원호형	0.893	0.666	1.128
	포물선형	0.906	0.654	1.108
	정현형	0.993	0.590	1.000

*비율: $\epsilon_{m,m}$ 의 정현형 선형에 대한 비율

표 3. 변단면 종류가 최강단면비(e_{st}) 및 최소연응력($\epsilon_{m,m}$)에 미치는 영향

지점조건	변단면 종류	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$	비율*
회 전 - 회 전	선형	1.132	0.522	1.004
	포물선	1.242	0.520	1.000
	정현	1.207	0.523	1.006
회 전 - 고 정	선형	0.978	0.544	1.007
	포물선	0.977	0.540	1.000
	정현	0.977	0.540	1.000
고 정 - 고 정	선형	0.926	0.549	1.009
	포물선	0.924	0.544	1.000
	정현	0.924	0.547	1.006

*비율: $\epsilon_{m,m}$ 의 포물선 변단면에 대한 비율

표 4. 정다각형 변수(k)가 최강단면비(e_{st}) 및 최소연응력($\epsilon_{m,m}$)에 미치는 영향

지점 조건	k	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$	비율*
회 전 - 회 전	3	1.280	0.912	1.260
	4	1.279	0.854	1.179
	5	1.278	0.809	1.117
	∞	1.276	0.724	1.000
회 전 - 고 정	3	1.267	0.844	1.260
	4	1.263	0.790	1.179
	5	1.261	0.749	1.117
	∞	1.254	0.670	1.000
고 정 - 고 정	3	0.891	0.885	1.260
	4	0.891	0.828	1.179
	5	0.892	0.784	1.117
	∞	0.892	0.702	1.000

* $\epsilon_{m,m}$ 의 $k=\infty$ (원형 단면)에 대한 비율

현형보다 $\epsilon_{m,m}$ 이 약 11%(0.635/0.572=1.11) 더 크다.

표 3은 변단면 종류가 e_{st} 및 $\epsilon_{m,m}$ 에 미치는 영향을 나타낸 표이다. 해석조건은 원호형 선형, $f=0.2$, $k=4$, $\beta=0.03$, ($p_v=1$, $\xi_v=0.5$), ($p_h=0.7$, $\xi_h=0.3$)이다. 변단면 종류의 변화에 따라서 e_{st} , $\epsilon_{m,m}$ 값 모두 큰 변화는 없다. 이 표에서와 같이 포물선 변단면이 가장 작은 $\epsilon_{m,m}$ 을 나타내고, 선형 변단면이 가장 큰 $\epsilon_{m,m}$ 을 보이므로 최소중량 설계에서 포물선 변단면

표 5. 가장 유리한 아치와 가장 불리한 아치의 최강단면비(e_{st}) 및 최소연응력($\epsilon_{m,m}$) 비교

기하 및 하중 조건	지점 조건	가장 유리한 아치		가장 불리한 아치		비율 (b/a)
		e_{st}	$\epsilon_{m,m}$ (a)	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$ (b)	
[A]*	회전-회전	1.349	0.342	1.059	0.638	1.865
	회전-고정	0.996	0.368	0.918	0.643	1.747
	고정-고정	0.988	0.368	0.876	0.659	1.791
[B]*	회전-회전	2.793	0.254	0.923	0.460	1.811
	회전-고정	2.827	0.259	1.079	0.472	1.822
	고정-고정	2.398	0.272	1.115	0.480	1.765

*[A]: $f=0.2$, $\beta=0.03$, ($p_v=1$, $\xi_v=0.5$), ($p_h=1$, $\xi_h=0.5$)

[B]: $f=0.3$, $\beta=0.03$, ($p_v=1$, $\xi_v=0.3$), ($p_h=-1$, $\xi_h=0.7$)

이 가장 유리하고, 선형 변단면이 가장 불리한 형상함수이다.

표 4는 정다각형 변수 k 가 e_{st} 및 $\epsilon_{m,m}$ 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 해석조건은 포물선형 선형, 포물선 변단면, $f=0.3$, $\beta=0.03$, ($p_v=1.5$, $\xi_v=0.5$), ($p_h=-1$, $\xi_h=0.7$)이다. k 값 변화에 따라서 e_{st} 값에는 큰 변화가 없고, $\epsilon_{m,m}$ 값에는 큰 변화가 있다. 즉, k 가 변화하여도 단면깊이 d_a , d_c 에는 큰 변화가 없지만 연응력 σ 에는 큰 변화가 있다. 이 표에서와 같이 $k=3$ (정삼각형 단면)은 $k=\infty$ (원형 단면)에 비하여 $\epsilon_{m,m}$ 이 약 26% 더 크다. 즉, 정다각형 변수 k 가 큰 단면일수록 내하력은 더 커진다. 특징적인 구조적 내용으로는 지점조건에 상관없이 k 값의 변화에 따른 $\epsilon_{m,m}$ 의 비율은 모두 같다.

이상의 표 2-4의 결과를 종합하면 가장 유리한 아치와 가장 불리한 아치의 선형, 변단면, 정다각형 변수의 조건을 다음과 같이 조합할 수 있다.

1) 가장 유리한 아치
정현형 선형; 포물선 변단면; $k=\infty$ (원형 단면)

2) 가장 불리한 아치
원호형 선형; 선형 변단면; $k=3$ (정삼각형 단면)

위의 2가지 유불리한 아치에 대하여 기하 및 하중조건 [A], [B]를 적용하여 e_{st} 및 $\epsilon_{m,m}$ 을 산출하고 그 결과를 표 5에 정리하였다. [A], [B]의 조건은 표 하단에 표시되어 있다. 이 표에서와 같이 회전-회전 아치의 경우에 $\epsilon_{m,m}$ 의 비율(b/a)이 1.865로 가장 불리한 아치는 가장 유리한 아치에 비하여 최소연응력 $\epsilon_{m,m}$ 이 86.5% 더 크다. 이 표 이외의 다른 하중조건들에 대해서도 거의 동일한 결과를 얻었다. 따라서 아치의 최소중량 설계에서 적절한 아치의 선형, 변단면 종류 및 정다각형 변수를 채택하는 것은 매우 중요하다.

5.5 최소중량 설계예제

이 연구의 이론을 적용하여 최소중량 아치의 설계예제를 실행하였다. 아치의 기하, 재료 및 하중조건은 다음과 같다.

• $l=10$ m, $h=3$ m

• $E=209$ GPa, $\sigma_y=550$ MPa, $\sigma_{all}=\sigma_y/f_s=183.3$ MPa(σ_y 에 대한 안전율 $f_s=3$)

• $P_v=20$ kN, $\xi_v=5$ m, $P_h=15$ kN, $x_h=5$ m.

위의 설계조건에 대하여 가장 유리한 아치(정현형 선형; 포물선 변단면; 원형 단면)와 가장 불리한 아치(원호형 선형; 선형 변단면; 정삼각형 단면)의 2가지 경우에 대하여 최소중량

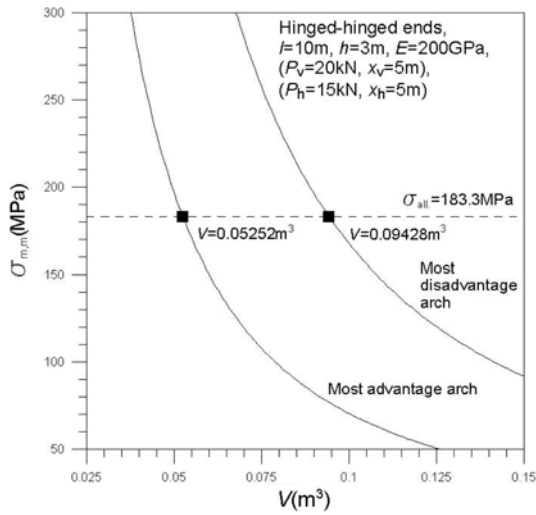


그림 8. V - $\sigma_{m,m}$ 곡선

표 6. 최소중량 아치의 설계 결과

지점 조건	설계 변수	가장 유리한 아치	가장 불리한 아치
회 전 - 회 전	$V(m^3)$	0.05252	0.09428
	β	0.00725	0.00971
	$d_a(m)$	0.09722	0.23984
	$d_c(m)$	0.15857	0.25207
	e_{st}	1.63104	1.05099
회 전 - 고 정	$V(m^3)$	0.05717	0.09340
	β	0.00756	0.00966
	$d_a(m)$	0.10144	0.23872
	$d_c(m)$	0.10459	0.21509
	e_{st}	1.03105	0.90101
고 정 - 고 정	$V(m^3)$	0.05715	0.09490
	β	0.00756	0.00974
	$d_a(m)$	0.10142	0.24062
	$d_c(m)$	0.10558	0.20717
	e_{st}	1.04102	0.86098

설계를 실행하고 체적 $V(m^3)$, 단면깊이 $d_a(m)$, $d_c(m)$ 를 산정하였다.

아치의 최소연응력 $\sigma_{m,m}(MPa)$ 이 허용응력 $\sigma_{all}(MPa)$ 과 같아지는 V 를 찾기 위하여 V 값을 변화시키며 $\sigma_{m,m}$ 을 계산하고 그림 8의 V - $\sigma_{m,m}$ 곡선을 그렸다. 이 그림에서 ■로 표시한 V 값이 최소연응력 $\sigma_{m,m}$ 이 허용응력 σ_{all} 과 같아지는 아치의 체적이며 최소중량아치의 체적이 된다. 식 (1), (12)를 이용하여 최소중량 아치의 단면깊이 d_a , d_c 를 계산하고, 식 (4)와 형상함수 식 (6), (8), (10)을 이용하여 아치 축 (x , y)에서 단면깊이 d 를 계산하면 최소중량 아치의 설계가 끝난다.

이렇게 설계된 설계변수의 결과를 표 6에 정리하였다. 이 표와 같이 가장 불리한 아치는 가장 유리한 아치에 비하여 $\epsilon_{m,m}$ 이 σ_{all} 이 되기 위하여 훨씬 더 큰 체적이 필요하다. 예를 들어서 회전-회전 아치의 경우에 두 체적 비는 $1.80(=0.09428 m^3/0.05252 m^3)$ 으로 가장 불리한 아치는 가장 유리한 아치에 비하여 약 80%의 체적이 더 소요된다.

이 표에서 지점조건 변화에 따른 최소체적 V 는 큰 차이가

없다. 그림 6에서 동일한 체적, 동일한 단면비를 갖는 아치에서는 ▲로 표시한 최대연응력 ϵ_m 에는 큰 차이가 있다. 특히 회전-회전 아치의 ϵ_m 은 회전-고정, 고정-고정 아치와 비교하여 ϵ_m 값이 매우 크다. 이와 같이 최소중량 설계의 결과로 얻어진 최소체적 V 에서는 지점조건 사이에 큰 차이가 없어서 최소중량 설계가 매우 효과적임을 알 수 있다. 가장 유리한 아치의 회전-회전 지점조건은 고정-고정 지점조건을 갖는 다른 두 지점조건(회전-고정, 고정-고정)보다 오히려 체적이 더 작다. 가장 불리한 아치에서도 3가지 지점조건은 거의 동일한 수준의 체적이 필요하다.

이상의 토의결과로부터 회전-회전 지점조건의 최소중량 아치도 고정지점을 갖는 다른 두 지점조건의 최소중량 아치와 비교하여 동일한 수준 또는 그 이상의 내하력을 갖는 것을 알 수 있었다.

6. 결 론

이 논문은 정적 최강아치에 관한 연구이다. 아치의 지간길 이와 체적은 항상 일정하고, 단면은 정다각형 중실단면을 갖는다. 단면의 단면깊이가 형상함수를 갖는 부정정 아치의 구조해석을 실시하여 아치의 최대연응력이 최소가 되는 최강 단면비를 산정하였다. 수치해석 예제를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 아치 선형은 정현형, 포물선형, 원호형 선형의 순서로 연응력에 대하여 유리하다.
2. 아치 변단면은 포물선, 정현, 선형 변단면의 순서로 연응력에 대하여 유리하다.
3. 아치 단면은 정다각형 변수가 클수록 연응력에 대하여 유리하다. 즉, 원형 단면이 가장 유리하고 정삼각형 단면은 가장 불리하다.
4. 1, 2, 3의 결과로 연응력에 가장 유리한 아치는 정현형 선형-포물선 변단면-원형 단면의 아치이고, 가장 불리한 아치는 원호형 선형-선형 변단면-정삼각형 단면의 아치이다.
5. 동일한 체적을 갖는 가장 유리한 아치는 가장 불리한 아치에 비하여 약 75% 이상의 연응력의 감소를 가져온다.
6. 동일한 하중조건에 대하여 가장 유리한 최소중량 아치는 가장 불리한 아치에 비하여 약 80% 이상의 체적의 감소를 가져온다.
7. 동일한 단면비를 갖는 서로 다른 지점조건은 일반 아치에서는 연응력에서 큰 차이를 보여 내하력에 큰 차이가 있으나, 최소중량 아치에서는 내하력에 큰 차이가 없다.

이 연구와 관련된 추후의 연구과제로는 첫째, 축방향력의 영향을 고려한 일정체적 정적 최강아치의 해석과 둘째, 동하중이 작용하는 일정체적 동적 최강아치에 대한 연구도 계속 되어야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

- 이병구, 이태은, 김영일(2009a) 일정체적 단순지지 최강보. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제29권, 제2A호, pp. 155-162.
- 이병구, 이태은, 신성철(2009b) 고정-고정 및 고정-회전 지점으로

- 지지된 일정체적 최강보. *대한토목학회논문집*, 대한토목학회, 제 29권, 제3A호, pp. 251-258.
- Atanackovic, T.M. and Simic, S.S. (1999) On the optimal shape of a Pflüger column. *European Journal of Mechanics A-Solid*, Vol. 18, pp. 903-913.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969) *Applied numerical methods*. John Wiley & Sons, NY, USA.
- Cox, S.J. and Overton, M.I. (1992) On the optimal design of columns against buckling. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, pp. 287-325.
- Gere, J.M. and Timoshenko, S.P. (1997) *Mechanics of materials*. PWS Publishing Company, USA.
- Haftka, R.T., Grüdal, Z., and Kamat, M.P. (1990) *Elements of structural optimization*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherlands.
- Keller, J.B. (1960) The Shape of the strongest column. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, pp. 275-285.
- Keller, J.B. and Niordson, F.I. (1966) The tallest column. *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 16, pp. 433-446.
- Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling loads of simple tapered columns with constant volume. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, Issue 18, pp. 2507-2518.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume. *Journal of Sound and Vibrations*. Vol. 294, Issues. 1-2, pp. 381-387.
- Leontovich, V. (1974) *Frames and arches*, McGraw-Hill Book Company, NY, USA.
- Taylor, J.E. (1967) The strongest column - Energy approach. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 34, pp. 486-487.
- Wilson, J.F., Holloway, D.M., and Biggers, S.B. (1971) Stability experiments on the strongest columns and circular arches. *Experimental Mechanics*, Vol. 11, pp. 303-308.

(접수일: 2009.5.21/심사일: 2009.7.1/심사완료일: 2009.7.14)