

이동최소자승근사법을 이용한 개선된 신뢰도 기반 최적설계

An Improved Reliability-Based Design Optimization using Moving Least Squares Approximation

강수창* · 고현무**

Kang, Soo-Chang · Koh, Hyun-Moo

Abstract

In conventional structural design, deterministic optimization which satisfies codified constraints is performed to ensure safety and maximize economical efficiency. However, uncertainties are inevitable due to the stochastic nature of structural materials and applied loads. Thus, deterministic optimization without considering these uncertainties could lead to unreliable design. Recently, there has been much research in reliability-based design optimization (RBDO) taking into consideration both the reliability and optimization. RBDO involves the evaluation of probabilistic constraint that can be estimated using the RIA (Reliability Index Approach) and the PMA(Performance Measure Approach). It is generally known that PMA is more stable and efficient than RIA. Despite the significant advancement in PMA, RBDO still requires large computation time for large-scale applications. In this paper, A new reliability-based design optimization (RBDO) method is presented to achieve the more stable and efficient algorithm. The idea of the new method is to integrate a response surface method (RSM) with PMA. For the approximation of a limit state equation, the moving least squares (MLS) method is used. Through a mathematical example and ten-bar truss problem, the proposed method shows better convergence and efficiency than other approaches.

Keywords : *reliability-based design optimization, performance measure approach, response surface method, moving least squares approximation*

요 지

기존의 구조물의 설계에서는 안전성 및 경제성 등을 향상시키기 위해서 시방서에 명시된 설계지침을 제약조건으로 하여 확정론적 최적설계를 수행하는 것이 일반적이다. 하지만, 구조물의 설계에는 본질적으로 재료성질, 작용하중 및 시공오차 등의 불확실성이 내포되어 있으며, 이러한 불확실성과 경제성을 동시에 고려한 설계가 보다 더 합리적인 설계라 할 수 있다. 기존의 확정론적 최적설계에서는 이러한 불확실성을 고려하기 위하여 결정론적인 안전율을 도입하여 설계하지만, 이러한 경우 각 한계상태 및 파괴모드에 대한 일관된 안전성 및 신뢰도 수준을 확보하지 못한다. 최근에 이러한 불확실성 및 경제성을 동시에 고려하는 신뢰도 기반 최적설계에 대한 연구가 수행되고 있다. 신뢰도 기반 최적설계는 확률구축조건을 평가하는 방법에 따라 RIA(reliability index approach) 및 PMA(performance measure approach)로 구분된다. 일반적으로 PMA가 RIA 보다 안정성 및 효율성 측면에서 더 우수하다는 비교연구가 수행된 바 있다. 하지만 아직도 대형구조해석을 필요로 하는 경우에는 계산비용이 과다하여 최적설계가 불가능하므로 보다 개선된 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘이 필요하다고 할 수 있다. 본 연구에서는 계산비용을 줄이면서도 안정적으로 수렴하는 개선된 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 제안한다. PMA에 적합한 응답면 기법을 개발하였으며, 한계상태식의 근사는 이동최소자승근사법을 사용하였다. 이로부터 더 적은 표본점의 추출만으로 더욱더 정확한 응답면 함수를 얻게 되어 정확도 및 효율성을 개선할 수 있었다. 수학적 문제 및 10-bar truss 문제에 대하여 제안된 방법을 적용한 결과, 수렴성 및 효율성 측면에서 우수한 성능을 보여줌을 확인하였다.

핵심용어 : 신뢰도 기반 최적설계, PMA, 응답면 기법, 이동최소자승근사법

1. 서 론

사회기반시스템을 이루는 교량 및 건축물 등의 안전하고 효율적인 설계를 위해서는 다양한 외부하중, 재료특성 및 제작오차 등의 불확실성을 반드시 고려해야 한다. 기존의 구조

물 설계에서는 불확실성을 고려하기 위해서 과거의 경험적 사실에 기반한 안전계수를 사용하거나, 특정 한계상태식에 대한 신뢰도 지수가 목표 신뢰도지수 이하가 되도록 조정된 저항 및 하중계수를 사용하여 왔다(AASHTO LRFD bridge specifications, 2004). 하지만, 과거에 설계경험이 없는 새로

*정회원 · 교신저자 · 서울대학교 건설환경공학부 박사과정 (E-mail : sckang@sel.snu.ac.kr)

**정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 · 공학박사 (E-mail : hmkoh@snu.ac.kr)

운 구조물의 경우에는 저항 및 하중계수 선정에 한계가 있으며, 구조물의 파다설계 혹은 과소설계를 유발하여 안전성 및 효율성에 좋지 않은 영향을 미치게 된다. 이러한 문제점을 극복하고 보다 합리적인 구조물의 설계를 수행하기 위해서는 설계 시 고려해야 할 불확실성을 확률론적인 관점에서 접근할 필요성이 있다(강수창 등, 1995; 김동석 등, 2006; 함대기 등, 2006).

이러한 확률론적인 접근을 위해서는 먼저 구조물의 설계 시 고려해야 할 불확실성을 통계적인 확률변수로 처리해야 한다. 이는 기존의 수집된 데이터 혹은 가정을 통해서 정의되며, 될 수 있는 한 합리적으로 결정되어야 한다. 또한 구조물의 성능에 영향을 미치는 한계상태가 정의되어야 하고, 그 한계상태를 경계로 구조물의 안전과 파괴가 구분된다. 이때, 구조물의 특정 한계상태에 대한 파괴확률 및 신뢰도 지수를 구하는 것을 신뢰성 해석(Reliability analysis)이라 하며, 이를 통하여 각각의 불확실성들을 나타내는 확률변수들이 구조물의 안전에 어떠한 영향을 미치는지 정량적으로 평가할 수 있다. 이러한 신뢰성 해석을 직접적으로 구조물의 설계에 적용하기 위해서는 구조물의 여러 한계상태에 대하여 신뢰성 해석을 수행하여 목표 파괴확률 혹은 신뢰도 지수를 만족 할 때까지 계속적인 설계변경을 수행해야 한다. 이는 매우 시간이 오래 걸리는 작업이므로, 보다 합리적인 설계 값을 구하기 위해서는 신뢰성 해석과 최적설계의 결합이 필수적이다. 일반적으로 이러한 알고리즘을 신뢰도 기반 최적설계(Reliability-Based Design Optimization, RBDO)라 하며 기존의 확정론적 최적설계와는 다르게 확률구속조건을 갖고 있다(조효남, 1999; Moses, 1997; Frangopol 등, 2003).

신뢰도 기반 최적설계는 확률구속조건을 평가하는 방법에 따라 RIA(reliability index approach) (Enevoldsen 등, 1994; Chandu 등, 1995, Lin 등, 1996) 및 PMA(performance measure approach) (Tu 등, 1999; Lee 등, 2002; Youn 등, 2003; Youn 등, 2004)로 구분된다. 일반적으로 토목구조물의 신뢰도 기반 최적설계에 사용되어 왔던 RIA는 신뢰도 지수를 이용하여 확률구속조건을 평가하는 방법이다. 하지만 RIA는 최적설계를 찾아가는 매 과정마다 신뢰도 지수를 구하기 위한 최적화 과정이 필요하며, 이는 수렴속도가 느리며 가끔은 수렴을 하지 않는 문제가 있음이 연구된 바 있다(Youn 등, 2003; Youn 등, 2004). 이러한 단점을 극복하기 위하여 비교적 최근에 개발된 PMA는 목표 신뢰도 지수를 만족하는 확률성능치(probabilistic performance measure)를 도입한 방법으로 RIA 보다 안정성 및 효율성 측면에서 더 우수하다는 비교연구가 수행된 바 있다(Youn 등, 2003). 하지만 아직도 대형구조해석을 필요로 하는 경우에는 계산비용이 과다하여 최적설계가 불가능하므로 보다 개선된 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘이 필요하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 계산비용을 줄이면서도 안정적으로 수렴하는 개선된 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 제안한다. 확률구속조건 평가에 있어서 응답면 기법(김상호, 1995; 허정원 등, 2003, 박미연 등, 2006; 조태준 등, 2008; Bucher 등, 1990; Rajashenkhar 등, 1993) 을 사용하였으며 한계상태식의 근사는 이동최소자승근사법(Moving least squares(MLS)

approximation) (Lancaster 등, 1981)을 사용하였다. 이 방법은 국지적 응답을 더 정확하게 묘사하여 수렴속도 및 정확도를 증대시키고, 기존에 추출된 표본점에 대한 응답결과를 폐기하지 않고 그 다음 응답 재근사에 사용할 수 있게 하여 구조해석 횟수를 줄일 수 있도록 하였다. 제안된 방법의 효율성을 검토하기 위해서 기존 연구자에 의해 제안된 수치적 문제 및 트러스 문제들에 대하여 신뢰도 기반 최적설계를 수행하였다.

2. 신뢰도 기반 최적설계

일반적인 확정론적 최적설계는 제약조건을 만족함과 동시에 목적함수가 최소가 되도록 하는 설계변수를 찾는 문제이며 다음 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(\mathbf{d}) \\ & \text{subject to} && G_i(\mathbf{d}) \geq 0, i = 1, \dots, NC \\ & && \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$ 는 n 개의 설계변수를 가지는 벡터, $f(\mathbf{d})$ 는 목적함수, $G_i(\mathbf{d})$ 는 제약조건, NC 는 제약조건의 개수, $\mathbf{d}^L, \mathbf{d}^U$ 은 각각 설계변수벡터의 하한 및 상한벡터이다. 신뢰도 기반 최적설계도 확정론적 최적설계와 마찬가지로 제약조건을 만족함과 동시에 목적함수를 최소화하는 기본 개념은 같다. 하지만 신뢰도 기반 최적설계는 확정론적 최적설계와 달리 제약조건을 평가하기 위해서 신뢰도 해석기법이 필요한 확률구속조건을 가지며 설계자가 요구하는 목표 신뢰도 지수 혹은 목표 파괴확률을 만족하는 최적 설계값을 구하는 것이다. 이는 다음 식 (2)와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(\mathbf{d}) \\ & \text{subject to} && P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) \leq P_f^i, i = 1, \dots, NC \\ & && \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 는 m 개의 확률변수를 갖는 벡터, $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 는 한계상태식 혹은 성능함수, P_f^i 는 i 번째 확률구속조건의 목표파괴확률, NC 는 확률제약조건의 개수이다. 즉, 신뢰도 기반 최적설계는 각각의 한계상태에 대한 파괴확률이 목표파괴확률보다 작아야 한다는 조건을 만족하는 설계변수를 찾는 문제이다.

한계상태식의 $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 에 대한 파괴확률은 다음 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) = F_{G_i}(\mathbf{d}, 0) = \int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

여기서, $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 는 \mathbf{x} 의 결합확률밀도함수, $F_{G_i}(\mathbf{d}, 0)$ 는 누적확률분포함수이다. 또한 목표 파괴확률 P_f^i 는 목표 신뢰도지수 β_{ti} 와 근사적으로 다음 식 (4)와 같은 관계를 가지고 있다.

$$P_f^i = \Phi(-\beta_{ti}) \quad (4)$$

여기서, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규누적분포함수이다.

식 (2)에서 확률구속조건 $P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) \leq P_f^i$ 는 $F_{G_i}(\mathbf{d}, 0) - \Phi(-\beta_{ti}) \leq 0$ 으로 표현될 수 있으며, 양변에 각각 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 및 $F_{G_i}^{-1}(\cdot)$ 를 적용하면 다음 식 (5), (6)과 같이 두가지 방법으로 표현된다(Tu 등, 1999; Youn 등, 2004).

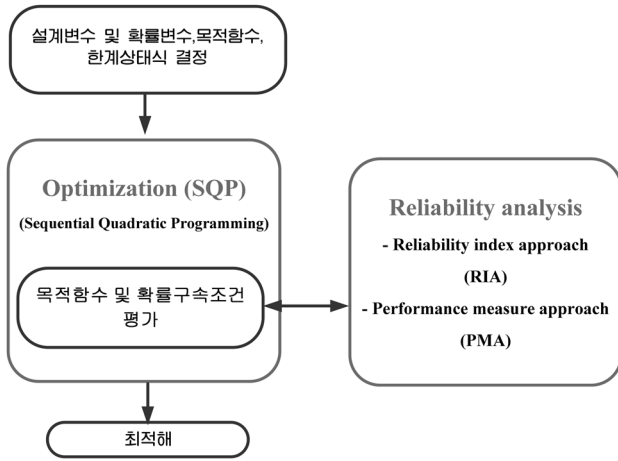


그림 1. 신뢰도 기반 최적설계 흐름도

$$\beta_i(\mathbf{d}) = -\Phi^{-1}(F_{G_i}(\mathbf{d}, 0)) = -\Phi^{-1}\left(\int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right) \geq \beta_{ti} \quad (5)$$

$$G_{pi}(\mathbf{d}) = F_{G_i}^{-1}(\mathbf{d}, \Phi^{-1}(-\beta_{ti})) = F_{G_i}^{-1}\left(\int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right) \geq 0 \quad (6)$$

여기서, $\beta_i(\mathbf{d})$ 및 $G_{pi}(\mathbf{d})$ 는 각각 i 번째 한계상태식에 대한 신뢰도 지수(Reliability index) 및 확률성능치(Probabilistic performance measure)이다. 식 (5)처럼 신뢰도 지수로 표현되는 확률구속조건을 이용한 방법을 RIA(Reliability index approach), 식(6)처럼 확률성능치를 적용한 방법을 PMA(Performance measure approach)라고 한다.

다음 그림 1은 신뢰도 기반 최적설계에 대한 흐름도를 보여준다. 먼저 설계변수, 확률변수, 목적함수 및 한계상태식을 설정한 다음에 설계변수를 찾는 최적화 문제는 일반적으로 SQP(Sequential quadratic Programming)(Rao, 1996)를 사용한다.

3. 확률구속조건 평가방법

3.1 신뢰도 지수 기법(Reliability index approach, RIA)

식 (5)와 같은 신뢰도 지수 계산을 수행하기 위한 방법으로는 MCS(Monte Carlo Simulation) (Bjorager, 1988) 혹은 FORM(First Order Reliability Method) (Hasofer 등, 1974; Rackwitz 등, 1978) 등이 있다. FORM을 적용하기 위해서는 식 (7)과 같이 먼저 비정규분포 확률변수 \mathbf{x} 를 표준정규분포 확률변수 \mathbf{u} 로 변환해야 한다. 이때 식 (5)의 신뢰도 지수는 다음 식 (7)과 같이 \mathbf{u} 공간상에서 한 개의 제약조건을 갖는 최적화 문제로부터 구할 수 있다.

$$\text{Minimize } \|\mathbf{u}\| \quad (7)$$

$$\text{Subject to } G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{d}, T^{-1}(\mathbf{u})) = 0$$

여기서 한계상태함수 위의 최적값인 MPFP(Most Probable Failure Point) 혹은 설계점을 \mathbf{u}_{RIA}^* 이라 했을 때, 신뢰도 지수는 원점에서 한계상태식까지의 최단거리인 $\beta_i(\mathbf{d}) = \|\mathbf{u}_{RIA}^*\|$ 로 표현되며, $\|\cdot\|$ 은 Norm을 의미한다. 이때 설계변수를 찾는 최적화 과정에서는 설계변수에 대한 신뢰도 지수의 미분값 정보가 필요한데, 이는 다음의 체인룰(Chain rule)로부터 구할 수 있다(Lee 등, 2002).

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial d_i} = \frac{\partial(\mathbf{u}^t)}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \|\mathbf{u}\|}{\partial d_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^t)^{1/2} \cdot (2\mathbf{u}^t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial d_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \cdot \frac{\mathbf{u}^t}{\beta_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial d_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \quad (8)$$

3.2 성능치 기법(Performance measure approach, PMA)

PMA에서도 확률구속조건 식 (6)을 평가하기 위해서는 먼저 RIA방법에서의 마찬가지로 비정규분포 확률변수 \mathbf{x} 를 표준정규분포 확률변수 \mathbf{u} 로 변환을 수행한다. 이때 확률성능치(Probabilistic performance measure)는 \mathbf{u} 공간상에서 한 개의 제약조건을 갖는 최적화 문제로부터 구할 수 있다.

$$\text{Minimize } G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \quad (9)$$

$$\text{Subject to } \|\mathbf{u}\| = \beta_i$$

여기서 $\|\mathbf{u}\| = \beta_i$ 위의 최적값인 MPP(Most Probable Point) 혹은 설계점을 \mathbf{u}_{PMA}^* 이라 했을 때, 확률성능치(Probabilistic performance measure)는 $G_{pi}(\mathbf{d}) = G(\mathbf{d}, T^{-1}(\mathbf{u}_{PMA}^*))$ 로 나타내어진다.

식 (9)의 최적화 문제를 푸는 수치해석적 알고리즘으로는 AMV(Advanced Mean-Value)방법, CMV(Conjugate Mean-Value)방법 및 HMV(Hybrid Mean-Value)방법(Youn, 2003) 등이 있다. AMV 방법은 한계상태식이 볼록함수(convex function)인 경우에는 빠른 수렴성을 보이지만 오목함수(concave function)인 경우에는 수렴이 느리거나 발산하는 성질을 갖고 있다. 반면에 CMV는 AMV 방법과는 달리 오목함수인 경우에는 매우 효율적이지만, 볼록함수인 경우에는 그 수렴이 느리다. 이러한 AMV와 CMV 장점을 결합한 방법이 HMV 방법이다. 이 방법은 매 반복계산 과정 중에서 MPP에서의 함수 형태가 볼록함수인 경우에는 AMV 방법을 적용하고 오목함수인 경우에는 CMV 방법을 적용한다. 본 논문에서는 수치적 안정과 효율성 측면에서 우수한 HMV 방법을 적용하기로 한다. HMV 방법에서 함수형태를 판단하는 식은 다음 식 (10)과 같다.

$$\zeta^k = (\mathbf{n}(\mathbf{u}^k) - \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1})) \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1}) - \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-2})) \quad (10)$$

$$\text{where } \mathbf{n}(\mathbf{u}^k) = \frac{\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{d}, \mathbf{u}^k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{d}, \mathbf{u}^k)\|}$$

여기서, \mathbf{n}^k 는 k 번째 \mathbf{u}^k 에서의 한계상태함수에 대한 최대급 경사방향(Steepest Descent Direction)이다. ζ^k 이 부호에 따라 $k+1$ 번째의 설계점 \mathbf{u}^{k+1} 은 다음 식 (11)로부터 구한다.

$$\mathbf{u}^{k+1} = \beta_i \mathbf{n}(\mathbf{u}^k) \quad \text{when } \text{sign}(\zeta^k) > 0 \text{ or } 0 \leq k \leq 1$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \beta_i \frac{\mathbf{n}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-2})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-2})\|} \quad \text{when } \text{sign}(\zeta^k) \leq 0 \text{ and } k \geq 2 \quad (11)$$

또한 설계변수에 대한 확률성능치의 미분값은 다음 식으로부터 결정할 수 있다.

$$\frac{\partial G_{pi}}{\partial d_i} = \frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial d_i} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} \quad (12)$$

4. 응답면 기법을 이용한 신뢰도 기반 최적설계

응답면 기법은 적은 횟수의 구조해석 결과로부터 회귀분석 등의 방법으로 관심있는 응답을 확률변수의 함수로 근사한 다음, 근사된 한계상태식을 이용해 FORM 등의 신뢰성 해석을 수행하는 기법이다. 일반적인 응답면 기법은 최소자승 근사법(least squares approximation)을 사용하여 표본점들에 동일한 가중치를 주어 응답면 함수의 계수값 들을 구한다.

하지만, 응답면 함수는 실제 한계상태식을 가능한 한 정확하게 묘사해야 한다. 따라서 본 논문에서는 이동최소자승근사법을 사용하여 설계점에 가까운 표본점에 더 큰 가중치를 주어 응답면 함수의 정확도를 향상시켰다. 또한 함수평가(function evaluation) 혹은 구조해석 횟수를 줄이기 위해서 응답함수를 재근사할 경우 다시 표본점들을 추출하지 않고, 신뢰성 해석으로부터 나온 새로운 설계점과 기준에 추출된 표본점들을 함께 이용하여 응답함수를 재근사하였다.

4.1 이동최소자승근사법

n 개의 변수를 갖는 임의의 \mathbf{x} 벡터에서의 근사 함수값 $\tilde{G}(\mathbf{x})$ 는 기저 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 와 각 항들에 대응하는 계수벡터 \mathbf{a} 를 사용하여 다음 식 (13)과 같이 정의된다.

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

\mathbf{x} 에서의 지역 이동최소자승 근사는 다음과 같다.

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

여기서 \mathbf{x}_i 는 표본점들이고, 일반적으로 기저 다항식 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 는 1차 및 2차항으로 식 (15)와 같이 나타낸다.

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x_1 \ \dots \ x_n \ x_1^2 \ \dots \ x_n^2]^T \quad (15)$$

설계점 \mathbf{x} 에서의 이동최소자승 근사식의 계수 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 구하기 위해 가중잔여치 $E(\mathbf{x})$ 를 정의하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) (\tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) (\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}_i))^2 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, N 은 표본점들의 개수이고 $w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$ 는 \mathbf{x} 와 표본점 \mathbf{x}_i 사이의 거리에 따른 가중함수(weight function)이며 $G(\mathbf{x}_i)$ 는 표본점 \mathbf{x}_i 에 대하여 계산된 한계상태식 값이 된다. 표본점 \mathbf{x}_i 를 중심으로 일정한 영역(영향영역, Domain of influence)에 포함되는 점들에서 가중함수는 양수이며, singularity를 피하기 위해 충분한 개수의 인접된 표본점들이 포함되어야 한다. 식 (16)은 다음 식과 같은 행렬식의 형태로 표현된다.

$$E(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{G})^T \mathbf{W}(\mathbf{x})(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{G}) \quad (17)$$

여기서,

$$\mathbf{G} = [G(\mathbf{x}_1), G(\mathbf{x}_2), \dots, G(\mathbf{x}_n)]^T \quad (18a)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]^T \quad (18b)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag}[w(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}), w(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}), \dots, w(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})]^T \quad (18c)$$

$\partial E(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{a}(\mathbf{x}) = 0$ 로부터 가중잔차를 최소화 시키는 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 구하면 다음 식과 같다.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{G} \quad (19)$$

식 (13)와 식 (19)로부터 이동최소자승근사법에 의한 응답면 함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T (\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{G} \quad (20)$$

4.2 영향영역과 가중함수

이동최소자승 근사법의 정확도를 좌우하는 중요한 요소는 가중함수로, 확률변수 벡터 \mathbf{x} 에 영향을 미치는 표본점의 가중치를 결정해준다. \mathbf{x} 에서 가까운 표본점 \mathbf{x}_i 는 큰 가중함수 값을 갖고 반대로 \mathbf{x} 에서 먼 표본점 \mathbf{x}_i 는 작은 가중함수 값을 가진다. 따라서 가중함수는 \mathbf{x} 와 \mathbf{x}_i 사이의 거리 및 \mathbf{x}_i 의 영향반경의 함수로 다음 식 (21)과 같이 표현될 수 있다.

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = w\left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|}{d_{mi}}\right) = w(r) \quad (21)$$

여기서 d_{mi} 는 표본점 \mathbf{x}_i 에서의 영향반경의 크기이며 본 논문에서는 \mathbf{x} 에서 $1+2N(N, \text{확률변수의 개수})$ 번째로 가까운 절점의 거리를 사용한다. 가중함수의 형태는 여러가지가 있는데 이 연구에서는 spline 가중함수 식 (22)를 사용하였다. 즉, \mathbf{x} 에 가까운 표본점에서는 더 높은 가중치를, \mathbf{x} 에 멀리 떨어진 표본점에서는 더 낮은 가중치를 준다.

$$w(r) = \begin{cases} 1-6r^2+8r^3-3r^4 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (22)$$

4.3 이동최소자승근사법을 적용한 PMA 기법

앞에서 언급한 이동최소자승근사법을 PMA에 적용하였다. 신뢰도 해석을 위한 응답면 기법의 방법은 크게 표본추출, 응답의 근사화 및 정확도 향상을 위한 응답의 재근사로 이루어져 있다. 먼저 표본 추출에서는 $\|\mathbf{u}\| = \beta_i$ 인 제약조건을 포함하도록 영역설정을 한 다음 이 영역 내에서 Bucher-Bourgund법(Bucher, 1987)을 이용해 표본들을 추출한다. 이때 k 값은 1.2~1.5로 설정한다. 그림 2는 2차원 영역에서의 5개의 표본점을 추출한 예를 보여준다. 즉, PMA 해석으로부터 구한 MPP는 항상 $\|\mathbf{u}\| = \beta_i$ 인 선 위에 있기 때문에 추출된 표본점들로 구성된 영역은 MPP를 항상 포함하고 있음을 알 수 있다.

이렇게 추출된 표본점들을 사용하여 이동최소자승근사법을 이용하여 응답을 근사화한다. 생성된 근사함수식을 이용하여 PMA 해석을 수행하면 MPP를 그림 3에서와 같이 얻을 수

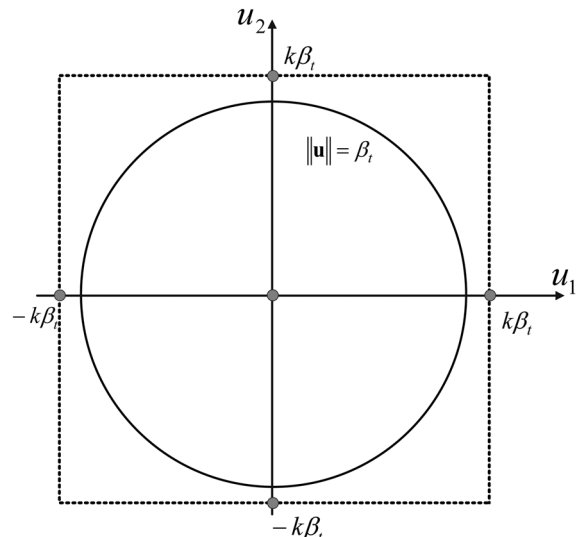


그림 2. 확률변수가 2개인 경우의 표본점 추출

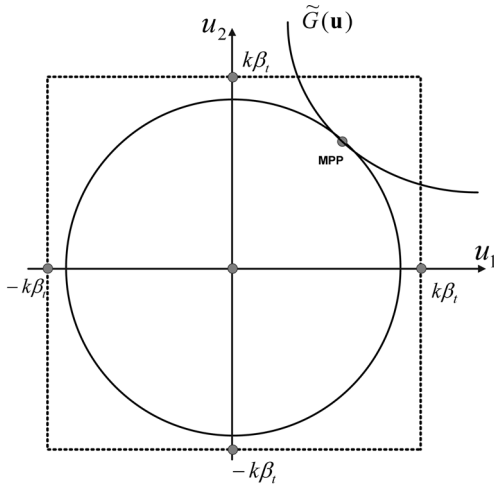


그림 3. PMA기법을 통한 MPP 계산

있다.

그림 3에서 얻은 MPP는 정확한 한계상태식이 아닌 근사된 한계상태식에 대하여 얻은 결과이므로 실제 MPP와는 어느 정도 차이가 있다. 이러한 오차를 개선하기 위하여 새로 추출된 MPP를 기존 표본점들에 추가하여 응답을 재근사한다. 또한, 설계점을 찾아가는 최적화 과정에서 MPP가 크게 변하지 않는다면, 그림 3에서 MPP를 찾는 영역도 크게 변화하지 않는다. 따라서 기존에 추출된 표본점들을 이용하여 MPP를 찾으면 구조해석 횟수를 크게 줄일 수 있다. 구체적인 절차는 다음과 같다.

Step 1: 확률변수(\mathbf{x}), 설계변수(\mathbf{d}), 목적함수, 확률구속조건 및 한계상태식($G(\mathbf{d}, \mathbf{x})$)을 설정한다.

Step 2: i 번째 최적화 설계변수인 \mathbf{d}^i 에 대하여 $\mathbf{u}=T(\mathbf{d}^i, \mathbf{x})$ 영역에서 그림 4와 같이 $1+N(N, \text{확률변수의 개수})$ 개의 표본점을 추출한다. 이때 k 는 보통 1.2~1.5로 설정한다.

Step 3: Step 2에서 추출된 표본점에 대하여 한계상태식값을 구하고, 이동최소자승근사법을 이용해 1차 근사다항식을 생성한다.

Step 4: 근사된 다항식을 이용해 PMA 방법을 적용하여 새로운 MPP를 결정한다.

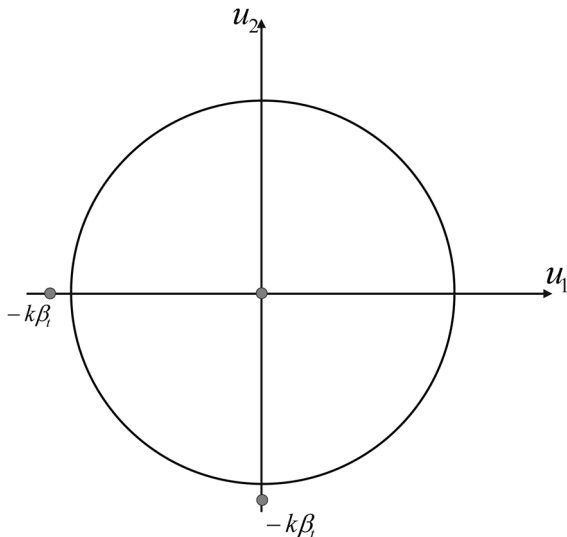


그림 4. $1+N$ 개 확률변수 선택 (2차원 : 3개의 표본점 추출)

Step 5: Step4에서 얻어진 MPP를 중심으로 삼아 그림 2와 같이 Bucher-Bourgund 방법을 이용해 $1+2N(N, \text{확률변수의 개수})$ 개의 표본점을 추출한다. 이때 k 는 Step 2에서 구한 k 값의 반을 사용한다. 이는 해를 찾는 영역을 줄여줘서 정확도를 더 개선시켜주는 효과가 있다.

Step 6: Step5에서 추출된 표본점에 대하여 한계상태식값을 구하고, 이동최소자승근사법을 이용해 2차 근사다항식을 생성한다.

Step 7: 근사된 다항식을 이용해 PMA 방법을 적용하여 새로운 MPP를 결정한다.

Step 8: 기존에 추출된 표본점과 구해진 MPP에서의 한계상태식값을 구하고, 이동최소자승 근사법을 이용해 2차 근사다항식을 생성한다.

Step 9: MPP가 식 (23)과 같은 수렴조건을 만족할 때까지 Step 7 및 step 8의 과정을 반복수행한다.

$$\frac{\|\mathbf{u}_{k+1}-\mathbf{u}_k\|}{\|\mathbf{u}_{k+1}\|} < 0.001 \quad (23)$$

Step 10: Step 9에서 얻어진 확률구속조건값 및 확률변수에 대한 확률구속조건의 미분값을 얻어 다음 설계값(\mathbf{d}^{i+1})을 최적화 과정으로부터 결정한다.

Step 11: 다음 식 (24)를 만족하면 기존의 추출된 표본점을 이용해서 Step 8부터 Step 9의 과정을 반복하고, 만일 다음 식을 만족하지 않으면 Step 2부터 step 9까지 수행한다.

$$\frac{\|\mathbf{d}^{i+1}-\mathbf{d}^i\|}{\|\mathbf{d}^{i+1}\|} < 0.1 \quad (24)$$

Step 12: 설계변수값이 식 (25)를 만족할 때 까지 Step 11 과정을 수행하여 최적의 설계변수값을 결정한다

$$\frac{\|\mathbf{d}^{i+1}-\mathbf{d}^i\|}{\|\mathbf{d}^{i+1}\|} < 0.001 \quad (25)$$

5. 해석예제

5.1 예제 1 : 수학적 예제

개발된 방법의 효용성을 검증하기 위하여 기존 논문에서 제시되었던 수학적 문제(Youn 등 2004; Yi 등, 2008)에 대해서 해석하였다. 이 문제는 다음 식 (26)과 같이 2개의 설계변수, 2개의 확률변수 및 3개의 제약조건으로 구성된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(\mathbf{d}) = d_1 + d_2 \\ \text{Subject to } & PG_i((\mathbf{x}) \leq 0) - \Phi(-\beta_i) \leq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ & 0 \leq d_i \leq 10, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 세 개의 제약조건식은 다음 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 / 20 - 1 \\ G_2(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2 - 5)^2 / 30 + (x_1 - x_2 - 12)^2 / 120 - 1 \\ G_3(\mathbf{x}) &= 80 / (x_1^2 + 8x_2 + 5) - 1 \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 설계변수는 $\mathbf{d} = [d_1, d_2]$ 이고, 확률변수는 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ 이다. 확률변수분포의 영향을 분석하기 위하여, 확률변수를 Normal 분포, Lognormal 분포, Weibul 분포, Gumbel 분포 4가지로 가정하고 표준편차는 모두 0.3으로 설정하였다. 여기서 설계변수 d_1 및 d_2 는 확률변수 x_1 및 x_2 의 평균값이다.

표 1. 예제1번에 대한 신뢰도 기반 최적설계값 비교

Distribution Type		RIA	PMA	RSM-PMA
Normal	Optimum	6.7251 (3.4386,3.2864)	6.7254 (3.4393,3.286)	6.7253 (3.4399,3.2869)
	NFE	686 (108/456/122)	165 (60/60/45)	83 (30/29/24)
Lognormal	Optimum	6.5866 (3.4007,3.1859)	6.5862 (3.4014,3.1848)	6.5861 (3.4029,3.1872)
	NFE	709 (83/374/252)	147 (45/57/45)	86 (31/29/26)
Weibull	Optimum	Not converged	7.2207 (3.5789,3.6418)	7.2208 (3.5763,3.6375)
	NFE		177 (75/57/45)	100 (34/34/32)
Gumbel	Optimum	Not converged	6.2868 (3.2838,3.0030)	6.2887 (3.2823,3.0065)
	NFE		192 (60/72/60)	122 (43/45/34)

표 1은 초기 설계값이 $\mathbf{d}^0 = [5.0, 5.0]^T$ 이고, 목표 신뢰도 지수 $\beta_{ii} = 3.0$ 인 경우에 대하여 RIA 방법, PMA 방법 및 제안된 방법(RSM-PMA)으로 해석한 결과를 나타내었다. 신뢰도 기반 최적설계를 수행하기 위해서는 확률변수에 대한 한계상태식의 미분값이 필요하게 하는데, 비록 식 (27)이 양함수이기 때문에 직접적으로 그 미분값을 구할 수 있지만 응답면 해석과의 비교를 위해 음함수로 가정하고 FFD (Forward Finite Difference) 방법을 사용하여 미분값을 구하였다. 각 확률분포 및 해석 방법에 따라 위에는 목적함수값 (최적설계점)을 아래에는 총 함수평가횟수(1번함수 평가횟수/2번함수 평가횟수/3번함수 평가횟수)를 나타내었다. RIA로 해석한 경우에 Normal 분포 및 Lognormal 분포의 경우에는 해가 수렴을 하지만, Weibull 및 Gumbel 분포의 경우에는 수렴이 되지 않음을 알 수 있다. 반면에 PMA는 모든 확률분포에 대해서 수렴성이 확보되며 Normal 분포의 경우에는 전체 함수평가횟수가 165번으로 RIA의 686번의 1/4 정도가 됨을 확인 할 수 있다. Lognormal 분포의 경우에도 마찬가지로 양상을 보여줘서, PMA 기법이 RIA 보다 수렴성 및 효율성 측면에서 우수함을 확인 할 수 있다. RSM-PMA 방법과 PMA 방법을 비교하였을 때, 최적목적함수값 및 최적설계점은 거의 유사하면서, 전체 불러오는 횟수는 분포 형

태에 따라 165에서 83, 147에서 86, 177에서 100, 192에서 122로 줄어듦을 확인 할 수 있어 제안된 방법의 계산 효율성이 더 우수함을 알 수 있다.

5.2 예제 2 : 트러스 예제

검증예제로 다음 그림 5와 같은 10-bar 트러스(Choi 등, 2007; Ping 등 2008)의 단면최적화 문제를 RIA, PMA 및 제안된 방법(RSM-PMA)으로 각각 풀어 비교하였다. 확률론적 최적화 문제는 다음 식과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & V = \sum_{i=1}^{10} A_i L_i \\ \text{Subject to } & P(G_i(A, R) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_{ii}) (i=1, \dots, 10) \\ & G_i = R - |\sigma_i(A)| (i=1, \dots, 10) \\ & 0.1 \leq x_i \leq 10 (i=1, \dots, 10) \end{aligned} \quad (28)$$

설계변수는 각 트러스 부재의 단면적(10개)이고, 확률변수는 트러스부재의 단면적(10개) 및 허용응력이다. 한계상태는 각 트러스 부재의 응력이 허용응력을 초과하면 파괴로 설정하였다. 각 확률변수 관련 식들은 다음 식과 같이 표현된다.

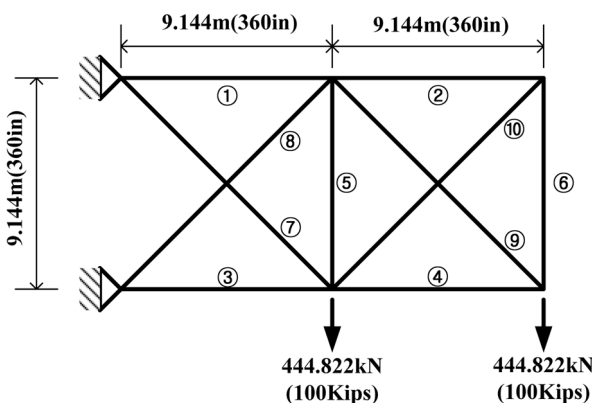


그림 5. 10-bar 트러스 구조물

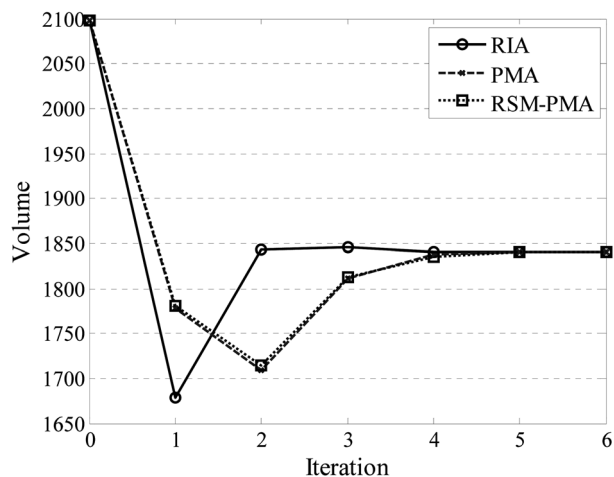


그림 6. 전체 트러스 부피에 대한 이력곡선

표 2. 10-bar truss 구조물에 대한 신뢰도 지수 비교

Approach	Volume	Optimum design	NFE
RIA	1840.3	(9.1937, 0.1000, 9.3182, 4.5691, 0.1000, 0.1000, 6.6165, 6.4405, 6.4582, 0.1000)	4947
PMA	1840.3	(9.1937, 0.1000, 9.3182, 4.5682, 0.1000, 0.1000, 6.6166, 6.4406, 6.4583, 0.1000)	2940
RSM-PMA	1840.3	(9.1937, 0.1000, 9.3184, 4.5683, 0.1000, 0.1000, 6.6165, 6.4405, 6.4584, 0.1000)	304

$$R \sim N(2.5E4, (1.25E3)^2)psi$$

$$A_i \sim N(\mu_{A_i}, (0.05\mu_{A_i})^2)(in^2) \quad (29)$$

$$\beta_{ii} = 2.0$$

즉, 허용응력 및 트러스 부재의 단면적은 정규분포를 따르고 목표 신뢰도지수는 2.0이다.

그림 6은 RIA, PMA, RSM-PMA 에 대하여 최적화의 반복과정에 따른 전체 트러스 부재의 이력곡선을 나타내었다. 3가지 방법 모두 안정적으로 최적해 값으로 수렴해 감을 알 수 있다. 또한 RSM-PMA 방법은 PMA 방법과 거의 같은 이력곡선을 가지고 있음을 알 수 있다. 이는 RSM-PMA 방법이 구조해석 횟수를 줄이기 위해서 응답면 함수를 사용하였을 뿐, 확률구속조건 평가는 PMA 기법을 사용하였기 때문에 PMA와 거의 유사한 이력곡선을 보인다.

표 2는 RIA, PMA 및 RSM-PMA에 대하여 그 결과를 비교하였다. 최적부피 및 각 트러스 부재의 단면에서는 유사한 결과를 보여줌을 확인할 수 있다. 여기서 NFE는 구조해석을 수행하는 횟수로, RIA는 4947번, PMA는 2940번을 요구한 것에 반해, RSM-PMA는 304번만의 구조해석 횟수만을 필요로 함을 알 수 있다. 따라서, RSM-PMA가 RIA 및 PMA 보다 그 효율성 및 성능 측면에서 우수함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 PMA 기법과 응답면 기법을 결합하여 새로운 신뢰도 기반 최적설계기법을 제안하였다. PMA에서 제약조건을 포함하는 영역에서 표본점들을 추출한 다음, 추출된 표본을 사용하여 이동최소자승근사법을 이용하여 응답을 근사화한다. 정확도 및 효율성 향상을 위해 근사된 응답면 함수에 대한 PMA 해석으로부터 얻어진 MPP를 기존에 추출된 표본점에 추가하여 만족할만한 정확도가 나올 때까지 한계상태식을 재근사하여 최종해를 얻도록 한다.

개발된 기법의 검증을 위하여 수학적 문제 및 10-바 트러스 문제에 적용하였다. 수학적 문제의 경우, 제안된 방법은 RIA 및 PMA 보다 수렴성 및 효율성 측면에서 더 우수함을 알 수 있었다. 또한 10-bar 트러스 문제의 경우는 한번의 구조해석으로 여러 개의 한계상태를 동시에 평가가 가능한 문제로, 제안된 방법은 이러한 경우 매우 효과적으로 구조해석횟수를 줄여줌을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 국토해양부 건설 핵심기술연구개발사업 및 안전하고 지속가능한

사회기반 건설 사업단을 통하여 지원된 Brain Korea 21에 의하여 수행되었습니다. 연구지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 강수창, 서정관, 고현무, 박관순(2005) 동조질량감쇠기를 장착한 강합성형 고속철도교의 피로 신뢰성 평가, **한국지진공학회는 논문집**, 한국지반공학회, Vol. 9, No. 5, pp. 1-10.
- 김동석, 최현석, 박원석, 고현무(2006) 에너지 소산장치를 장착한 사장교의 지진 취약도 해석, **한국지진공학회는논문집**, 한국지반공학회, Vol. 10, No. 3, pp. 1-11.
- 김상호, 나성원(1995) 개선된 응답면기법을 이용한 구조신뢰성해석. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제15권 제1호, pp. 63-72.
- 박미연, 조효남, 조태준(2006) 붕괴모드 조합 예측법에 의한 PSC 사장교의 위험도 평가. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제26권, 제4A호, pp. 647-657.
- 조태준, 김이현, 조효남(2008) 개선된 응답면기법에 의한 신뢰성 평가. **한국강구조학회논문집**, 한국강구조학회, Vol. 20, No. 1, pp. 21-31.
- 조효남, 이두화, 정지승, 민대홍(1999) 신뢰성에 기초한 강상형 연속교의 단면 최적설계, **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제19권, 제I-3호, pp. 397-406.
- 함대기, 박원석, 박관순, 고현무(2006) 사장교에 장착된 MR 댐퍼의 비용효율성 평가 및 최적설계 연구, **한국지진공학회는논문집**, 한국지반공학회, Vol. 10, No. 6, pp. 1-10.
- 허정원(2003) 실제 구조물의 유한요소 신뢰성 해석을 위한 복합 알고리즘. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제23권, 제6A호, pp. 1321-1329.
- AASHTO LRFD bridge specifications (2004).
- Bjerager, P. (1988) Probability integration by directional simulation. *J Eng Mech*, Vol. 114, No. 8, pp. 1285-301.
- Bucher, C.G. and Bourgund, U. (1987) *Efficient use of response surface methods*, Institute of Engineering Mechanics, Report No. 9-87, University of Innsbruck, Austria
- Choi, S.K., Grandhi, R.V., and Canfield, R.A. (2007) *Reliability-based structural design*, Springer.
- Chandu, S. and Grandi, R. (1995) General purpose procedure for reliability based structural optimization under parametric uncertainties, *Advances in Engineering Software*, Vol. 23, pp. 7-14.
- Enevoldsen, I. and Sorensen, J.D. (1994) Reliability-based optimization in structural engineering, *Structural safety*, Vol. 15, No. 3, pp. 169-196.
- Frangopol, D.M. and Maute, K. (2003) Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures, *Computers and Structures*, Vol. 81, pp. 397-410.
- Hasofer, A.M. and Lind, N.C. (1974) Exact and invariant second-moment code format. *J Eng Mech*, ASCE, Vol. 100, pp. 111-121.
- Lee, J.O., Yang, Y.S., and Ruy, W.S. (2002) A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural design optimization, *Computers and Structures*, Vol. 80, pp. 257-269.
- Lin, K.Y. and Frangopol, D.M. (1996) Reliability-based optimum design of reinforced concrete girders, *Structural Safety*, Vol. 18,

- No. 2-3, pp. 239-258.
- Moses, F. (1997) Problems and prospects of reliability-based optimization, *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 293-301.
- Yi, P., Cheng, G. and Jiang, L. (2008) A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization, *Structural safety*, 30(2), 91-109.
- Rackwitz, R. and Fiessler, B. (1978) Structural reliability under combined random load sequences. *Comput Struct* 9, pp. 489-494.
- Rajashekhhar, M.R. and Ellingwood, B.R. (1993) A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Struct Safety*, Vol. 12, No. 3, pp. 205-220.
- Rao, Singiresu S. *Engineering optimization : Theory and Practice*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1996.
- Tu, J., Choi, K.K., and Park, Y.H. (1999) A new study on reliability based design optimization, *ASME J Mech Des*, Vol. 121, No. 4, pp. 557-564.
- Youn, B.D. and Choi, K.K. (2004) An investigation of nonlinearity of reliability-based design optimization approaches. *J Mech Des*, Vol. 126, No. 403-411.
- Youn, B.D. and Choi, K.K. (2004) A new response surface methodology for reliability-based design optimization, *Computers and Structures*, Vol. 82, pp. 241-256.
- Youn, B.D., Choi, K.K., and Park, Y.H. (2003) Hybrid analysis method for reliability-based design optimization, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, No. 2, pp. 221-232.
- (접수일: 2008.9.9/심사일: 2008.11.11/심사완료일: 2008.11.11)