

# 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도

## Lateral-Torsional Buckling Strength of Parabolic Arches

문지호\* · 윤기용\*\* · 이태형\*\*\* · 이학은\*\*\*\*

Moon, Jiho · Yoon, Ki-Yong · Lee, Tae-Hyung · Lee, Hak-Eun

### Abstract

The lateral-torsional buckling strengths of the parabolic arches are investigated in this study. The curvatures of a parabolic arch vary along the center line of the arch. Thus, the problem is much more complicated comparing that of arches with constant curvature such as circular arches. Moreover, most of previous studies are limited to the circular arches. In this study, lateral-torsional buckling equations are derived for the arches with varying curvatures considering the warping effects. To obtain the buckling strength of parabolic arches, numerical solutions based on the finite difference technique are provided. The numerical solutions are compared with the those of previous researchers and finite element analyses. Then, the lateral-torsional strengths of parabolic arches are successfully verified. Finally, comparison study of critical buckling loads of parabolic arches with those of circular arches for the various rise to span ratios are discussed.

**Keywords** : arch, lateral-torsional buckling, out-of-plane buckling, numerical solution, finite difference technique

### 요 지

본 연구에서는 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도에 관한 연구를 수행하였다. 포물선 아치는 아치의 중립축을 따라 곡률이 변하므로 일정한 곡률을 갖는 원형 아치의 경우보다 횡-비틀 좌굴 강도식을 유도하는 것이 복잡하며, 이에 대한 연구가 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 뒹의 효과를 고려하여 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴 강도식을 유도하고 포물선 아치의 좌굴 강도를 계산하기 위하여 유한차분법을 이용한 수치해법을 제안하였다. 이러한 수치해법은 기존 연구자 및 유한요소해석 결과와 비교하였으며, 그 타당성을 검증하였다. 마지막으로, 변수해석을 수행하여 라이즈비의 영향에 따른 원형과 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 비교·분석하였다.

**핵심용어** : 아치, 횡-비틀 좌굴, 면외 좌굴, 수치해법, 유한차분법

### 1. 서 론

아치부재에 면내로 하중이 작용하는 경우 아치부재는 면외 좌굴이 발생할 수 있다. 이러한 거동은 일반적인 직선보의 횡-비틀 좌굴과 유사하며, 여러 연구자들에 의하여 아치의 횡-비틀 좌굴에 관한 연구가 수행되었다. Timoshenko and Gere(1961)와 Vlasov(1961)는 순수 압축력이 작용하는 원형 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 제안하였다. 또한 Papangelis and Trahair(1987), Rajasekaran and Pandmanabhan(1989), Kang and Yoo(1994), Lim and Kang(2004)은 에너지 방법을 이용하여 순수 압축력 혹은 순수 휨모멘트가 작용하는 원형 아치의 횡-비틀 좌굴 강도에 관한 연구를 수행하였다. 대부분의 원형 아치에 관한 연구는 뒹(Warping)의 영향을 포함하고 있어 I-형의 단면과 같은 박벽 개단면(Thin-walled

open section)에 적용할 수 있다.

포물선 및 정현형(Sinusoidal)과 같은 비원형 아치에 관한 연구는 Ojalvo *et al.*(1969), Torkarz and Sandhu(1972), Tufekci and Dogruer(2006), Wen and Lange(1981)에 의하여 수행되었다. 이들 모두 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴 방정식을 유도 하였지만 뒹(Warping)의 영향을 포함하지 않아 박벽 개단면에 적용할 수 없는 단점이 있다.

본 연구에서는 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도에 관한 연구를 수행하였다. 이를 위하여 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴식을 Love(1944)의 곡선보에 대한 평형방정식으로부터 유도하였다. 유한차분법을 이용한 수치해법을 통하여 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 결정하였으며 제안된 좌굴식은 뒹의 영향 또한 포함하고 있어 박벽 개단면에도 적용이 가능하다. 마지막으로, 본 연구에서 제안된 아치의 횡-

\*고려대학교 건축·사회환경공학과 박사후과정·공학박사 (E-mail : deadalive@korea.ac.kr)

\*\*정회원·교신저자·선문대학교 토목공학과 교수·공학박사 (E-mail : kyyoon@sunmoon.ac.kr)

\*\*\*정회원·건국대학교 토목공학과 교수·공학박사 (E-mail : thlee@konkuk.ac.kr)

\*\*\*\*정회원·고려대학교 건축·사회환경공학과 교수·공학박사 (E-mail : helee@korea.ac.kr)

비틀 좌굴 강도는 기존 연구자 및 유한요소해석의 결과를 통하여 그 타당성을 검증하였다.

## 2. 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴식

이번 장에서는 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴식을 유도하였다. 유도 과정에 사용된 기본적인 가정은 아래와 같다.

- (a) 재료는 Hook의 법칙을 따른다.
- (b) 단면은 이축대칭이므로 단면의 중심과 전단 중심은 서로 일치 한다.
- (c) 아치의 중립축은 비신장 조건을 따른다.
- (d) 아치의 곡률은 단면에 비하여 크므로 휨모멘트-곡률 관계와 비틀림 모멘트-비틀림각 관계는 Bernoulli-Euler의 가정을 따른다.
- (e) 좌굴 전 변위는 작다.
- (f) 좌굴 전 모든 하중은 면내에 작용한다.

위와 같은 가정을 이용하여 순수 휨모멘트가 작용하는 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴식을 유도하였으며, 그 후 순수 압축력이 작용하는 경우로 이론을 확대 하였다.

### 2.1 순수 휨모멘트가 작용하는 아치

그림 1은 변형된 상태에서의 아치요소에 작용하는 외력 및 내력을 표현한 그림이다. 여기서  $F_x, F_y, F_z$ 는 각각  $x, y, z$  방향으로 작용하는 내력을 나타내며,  $M_x, M_y, M_z$ 는 각각  $x, y, z$  방향으로 작용하는 내력 모멘트를 나타낸다. 또한  $f_x, f_y, f_z$ 는  $x, y, z$  방향으로 작용하는 등분포 하중이며,  $m_x, m_y, m_z$ 는 각각  $x, y, z$  방향으로 작용하는 등분포 모멘트이다.

그림 1과 같은 변형된 아치 요소의 평형방정식은 Love (1944)에 의하여

$$\frac{dF_y}{ds} - F_z k_x + F_x k_z + f_y = 0 \quad (a) \quad (1)$$

$$\frac{dM_x}{ds} - M_y k_z + M_z k_y - F_y + m_x = 0 \quad (b)$$

$$\frac{dM_z}{ds} - M_x k_y + M_y k_x + m_z = 0 \quad (c)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $k_x$ 와  $k_y$ 는 각각  $x$ 와  $y$ 축에

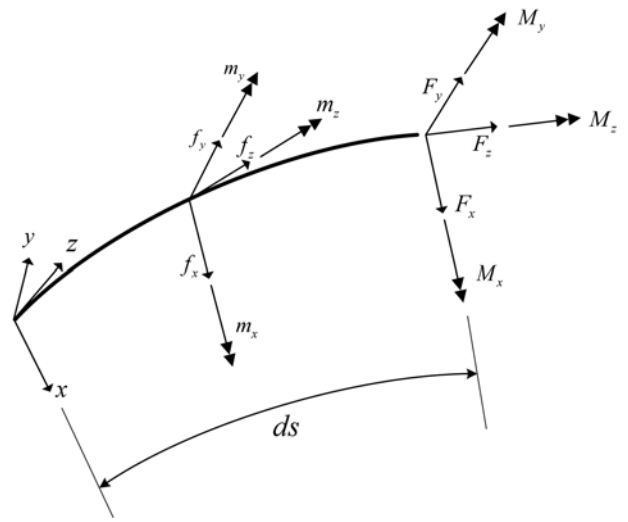


그림 1. 변형된 아치 요소

관한 곡률을 나타내며,  $k_z$ 는 비틀림을 나타낸다. 그림 1에 나타난 내력, 외력, 곡률 및 비틀림은 좌굴 전 성분과 좌굴 후 성분으로 나타낼 수 있으며

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x0} + \Delta F_x, & k_x &= k_{x0} + \Delta k_x \\ F_y &= F_{y0} + \Delta F_y, & k_y &= k_{y0} + \Delta k_y \\ F_z &= F_{z0} + \Delta F_z, & k_z &= k_{z0} + \Delta k_z \\ M_x &= M_{x0} + \Delta M_x, & f_y &= f_{y0} + \Delta f_y \\ M_y &= M_{y0} + \Delta M_y, & m_x &= m_{x0} + \Delta m_x \\ M_z &= M_{z0} + \Delta M_z, & m_z &= m_{z0} + \Delta m_z \end{aligned} \quad (2)$$

과 같이 정의할 수 있다(Ojalvo et al., 1969). 여기서, 아래 첨자 0은 좌굴 전 평형 상태를 나타내며,  $\Delta$ 는 좌굴이 발생하는 동안 변화량을 나타낸다.

좌굴이 발생하기 전 하중은 면내에 작용하고 있으며, 아치의 중립축의 비틀림이 없다고 한다면

$$F_{y0} = M_{x0} = M_{z0} = f_{y0} = m_{x0} = k_{x0} = k_{z0} = 0 \quad (3)$$

의 조건을 만족한다. 또한 아치 단면에 순수 휨모멘트만 작용하는 경우

$$F_{x0} = F_{z0} = \Delta f_y = \Delta m_x = \Delta m_z = 0; \text{ and } M_{y0} = M \quad (4)$$

의 조건을 만족한다. 여기서  $M$ 은 상수로 취급된다. 식 (2),

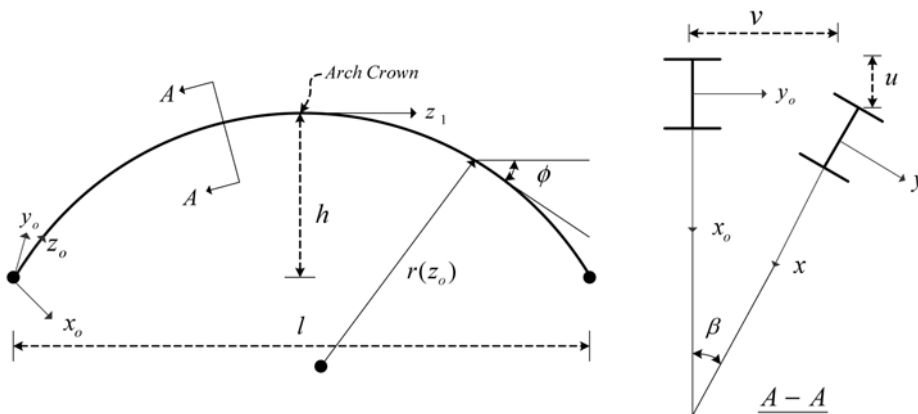


그림 2. 아치의 제원 및 아치 단면의 면외좌굴

(3) 및 (4)를 식 (1)에 대입하여 정리하고  $\Delta$ 에 대한 고차항을 무시하면

$$\frac{d(\Delta F)}{ds} = 0 \quad (a) \quad (5)$$

$$\frac{d(\Delta M_x)}{ds} - M\Delta k_z + \Delta M_z k_{y_0} - \Delta F_y = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d(\Delta M_y)}{ds} - \Delta M_x k_{y_0} + M\Delta k_x = 0 \quad (c)$$

와 같은 아치의 횡-비틀림 좌굴식을 얻을 수 있다.

그림 2는 아치의 제원 및 아치 단면의 횡-비틀림 좌굴 형상을 나타낸다. 여기서  $h$ 는 아치의 라이즈이며,  $l$ 은 아치의 지간,  $r$ 은 아치의 곡률을 나타낸다. 아치의 곡률  $r$ 은 변수이며,  $z_0$ 축을 따라 변하는 값을 가지게 된다. 또한  $\phi$ 는 아치 임의의 점에서 수평선과 접선이 이루는 각을 나타내며,  $z_1$ 은 아치 크라운을 원점으로 하는 수평 좌표,  $u, v$ 는 각각  $x_0, y_0$ 방향으로의 변위,  $\beta$ 는 단면의 회전각을 나타낸다. 변위의 크기가 아주 작다고 가정하며,  $x$ 축에 대한 곡률의 변화량  $\Delta k_x$ 와 비틀림의 변화량  $\Delta k_z$ 는

$$\Delta k_x = \beta k_{y_0} - \frac{d^2 v}{ds^2} \quad (a) \quad (6)$$

$$\Delta k_z = \frac{d\beta}{dx} + k_{y_0} \frac{dv}{ds} \quad (b)$$

과 같이 변위  $u, v$ 와 단면의 비틀림각  $\beta$ 의 함수로 나타낼 수 있다(Love, 1944). 여기서  $k_{y_0}$ 는  $y_0$ 축에 관한 초기 곡률을 나타내며, 이 값은 아치의 형상을 대표한다.

식 (6)을 이용하여  $x$ 축에 관한 내력 모멘트의 변화량  $\Delta M_x$ 와 비틀림 모멘트의 변화량  $\Delta M_y$ 는

$$\Delta M_x = EI_x \left( \beta k_{y_0} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) \quad (a) \quad (7)$$

$$\Delta M_y = GJ \left( \frac{d\beta}{ds} + k_{y_0} \frac{dv}{ds} \right) - EI_w \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{d\beta}{dx} + k_{y_0} \frac{dv}{ds} \right) \quad (b)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 여기서,  $E$ 는 탄성계수이며,  $G$ 는 전단 탄성 계수,  $I_x$ 는  $x$ 축에 대한 단면2차모멘트,  $J$ 는 순수 비틀림 상수,  $I_w$ 는 뒸(Warping)상수이다. 식 (6)과 (7)을 식 (5)에 대입하여 정리하고  $\Delta F_y$ 를 소거하여 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned} & [EI_x + EI_w k_{y_0}^2] \frac{d^4 v}{ds^4} + [4EI_w k_{y_0} \frac{dk_{y_0}}{ds}] \frac{d^3 v}{ds^3} + [Mk_{y_0} - GJk_{y_0}^2 + EI_w \\ & \left( 3k_{y_0} \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} + 2 \left( \frac{dk_{y_0}}{ds} \right)^2 \right)] \frac{d^2 v}{ds^2} + \left[ M \frac{dk_{y_0}}{ds} - 2GJk_{y_0} \frac{dk_{y_0}}{ds} \right. \\ & EI_w \left( k_{y_0} \frac{d^3 k_{y_0}}{ds^3} + \frac{dk_{y_0}}{ds} \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} \right)] \frac{dv}{ds} + [EI_w k_{y_0}] \frac{d^4 \beta}{ds^4} + \left[ EI_w \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{d^3 \beta}{ds^3} \\ & + [M - (EI_x + GJ)k_{y_0}] \frac{d^2 \beta}{ds^2} + \left[ -2EI_x \frac{dk_{y_0}}{ds} - GJ \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{d\beta}{ds} \\ & + \left[ -EI_x \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} \right] \beta = 0 \quad (a) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [EI_w k_{y_0}] \frac{d^4 v}{ds^4} + \left[ 3EI_w \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{d^3 v}{ds^3} + \left[ M - (EI_x + GJ)k_{y_0} + 3EI_w \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} \right] \frac{d^2 v}{ds^2} \\ & + \left[ EI_w \frac{d^3 k_{y_0}}{ds^3} - GJ \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{dv}{ds} + EI_w \frac{d^4 \beta}{ds^4} - GJ \frac{d^2 \beta}{ds^2} + [EI_x k_{y_0}^2 - Mk_{y_0}] \beta = 0 \quad (b) \end{aligned}$$

과 같은 2개의 순수 휨모멘트가 작용하는 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀림 좌굴 방정식을 얻을 수 있다.

## 2.2 순수 압축력이 작용하는 아치

아치의 형상이 작용하는 하중에 대하여 현수선과 같은 형태를 나타내면, 아치의 단면에는 압축력만 작용하게 된다. 예를 들어 원의 중심방향으로 작용하는 등분포 하중이 원형 아치에 작용하는 경우 아치의 단면에는 순수 압축력만 작용하게 된다. 유사하게 포물선 아치에 수직 등분포 하중이 작용하는 경우에 아치의 단면에는 순수 압축력이 작용한다. 아치에 순수 압축력이 작용하는 경우

$$F_{x_0} = M_{y_0} = \Delta m_x = \Delta m_z = 0; \text{ and } F_{z_0} = -F \quad (9)$$

의 조건을 만족한다. 여기서  $F$ 는 아치 단면에 작용하는 압축력으로써 반드시 상수일 필요는 없다. 예를 들어 포물선 아치에 수직 등분포 하중이 작용하는 경우 아치 단면에는 순수 압축력만 나타나게 되지만 그 크기는 아치의 축에 따라 변하며, 아치 크라운과 지점에서 각각 최소값과 최대값을 가지게 된다.

식 (2), (3) 및 (9)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 순수 압축력이 작용하는 아치의 횡-비틀림 좌굴 식은

$$\frac{d(\Delta F_y)}{ds} + F\Delta k_x + \Delta f_y = 0 \quad (a) \quad (10)$$

$$\frac{d(\Delta M_x)}{ds} + \Delta M_z k_{y_0} - \Delta F_y = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d(\Delta M_z)}{ds} - \Delta M_x k_{y_0} = 0 \quad (c)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식 (10)은 식 (6)과 (7)을 이용하여 아치의 단면상수  $EI_x, GJ$  및  $EI_w$ 와 면의 변위  $v$  그리고 단면의 비틀림각  $\beta$ 의 함수로

$$\begin{aligned} & [EI_x + EI_w k_{y_0}^2] \frac{d^4 v}{ds^4} + [4EI_w k_{y_0} \frac{dk_{y_0}}{ds}] \frac{d^3 v}{ds^3} + [F - GJk_{y_0}^2 + EI_w \\ & \left( 3k_{y_0} \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} + 2 \left( \frac{dk_{y_0}}{ds} \right)^2 \right)] \frac{d^2 v}{ds^2} + [-2GJk_{y_0} \frac{dk_{y_0}}{ds} \\ & + EI_w \left( k_{y_0} \frac{d^3 k_{y_0}}{ds^3} + \frac{dk_{y_0}}{ds} \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} \right)] \frac{dv}{ds} + [EI_w k_{y_0}] \frac{d^4 \beta}{ds^4} + \left[ EI_w \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{d^3 \beta}{ds^3} \\ & + [-(EI_x + GJ)k_{y_0}] \frac{d^2 \beta}{ds^2} + [-2EI_x \frac{dk_{y_0}}{ds} - GJ \frac{dk_{y_0}}{ds}] \frac{d\beta}{ds} \\ & + \left[ -EI_x \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} - Ek_{y_0} \right] \beta - \Delta f_y = 0 \quad (a) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [EI_w k_{y_0}] \frac{d^4 v}{ds^4} + \left[ 3EI_w \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{d^3 v}{ds^3} + \left[ -(EI_x + GJ)k_{y_0} + 3EI_w \frac{d^2 k_{y_0}}{ds^2} \right] \frac{d^2 v}{ds^2} \\ & + \left[ EI_w \frac{d^3 k_{y_0}}{ds^3} - GJ \frac{dk_{y_0}}{ds} \right] \frac{dv}{ds} + EI_w \frac{d^4 \beta}{ds^4} - GJ \frac{d^2 \beta}{ds^2} + [EI_x k_{y_0}^2] \beta = 0 \quad (b) \end{aligned}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

## 3. 포물선 아치의 횡-비틀림 좌굴 강도

### 3.1 수치 해법을 이용한 포물선 아치의 횡-비틀림 좌굴 강도 선정

포물선 아치의 경우 아치의 중심축을 따라 곡률이 변화하기 때문에 원형 아치와 같이 간단한 대수식으로 횡-비틀림 좌굴 강도를 결정하기가 어렵다. 따라서 본 연구에서는 수치 해법을 이용하여 포물선 아치의 횡-비틀림 좌굴 강도를 결정하

였다. 본 연구에서 사용된 수치 해법은 좌굴 해석 문제에 광범위하게 사용되는 유한차분법(Finite difference technique)으로 Richardson's extrapolation(Chajes, 1974)을 추가적으로 사용하여 수렴도를 높였다.

유한 차분법을 사용하여 변곡률을 갖는 아치의 좌굴 방정식 식 (8)과 (11)은

$$\begin{aligned} ([P]-M[Q])\{D\} &= 0 \text{ for pure bending (a)} \\ ([P]-F[Q])\{D\} &= 0 \text{ for pure axial compression (b)} \end{aligned} \quad (12)$$

와 같이 행렬의 형태로 나타낼 수 있다. 여기서 [P]와 [Q]는 각각 정방 행렬이며 행렬의 요소는 아치 형상의 함수로 정의된다. 그리고 {D}는 변위 벡터이다. 식 (12)의 자세한 행렬 요소성분은 부록에 첨부되어 있다. 식 (12)를 정리하면

$$[P]^{-1}[Q]\{D\} = [J]\{D\} = \frac{1}{M}\{D\} \text{ for pure bending (a)} \quad (13)$$

$$[P]^{-1}[Q]\{D\} = [J]\{D\} = \frac{1}{F}\{D\} \text{ for pure axial compression (b)}$$

과 같이 변형되며, 임계 휨모멘트  $M_{cr}$  및 임계 압축력  $F_{cr}$ 은 식 (13)의 고유치 해석(Eigen-value analysis)을 통하여 계산할 수 있다. 본 연구에서는 수치해의 정도를 높이기 위하여 Richardson's extrapolation을 사용하였다. 이 방법은

$$M_{cr} = \frac{n_1^2 M_{cr1} - n_2^2 M_{cr2}}{n_1^2 - n_2^2} \text{ for pure bending (a)} \quad (14)$$

$$F_{cr} = \frac{n_1^2 F_{cr1} - n_2^2 F_{cr2}}{n_1^2 - n_2^2} \text{ for pure axial compression (b)}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서,  $M_{cr1}$ ,  $M_{cr2}$  및  $F_{cr1}$ ,  $F_{cr2}$ 는 각각 아치를  $n_1$ 과  $n_2$ 등분 한 경우의 수치해를 나타낸다. 본 연구에서는  $n_1=51$ 과  $n_2=101$ 을 사용하였다.

포물선 아치를  $\Delta s$ 간격으로  $n$ 개의 요소로 나눈 경우 아치의 임의의 요소까지의 거리 좌표  $z_1$ 은

$$\Delta s = \left[ \frac{1}{2} \left[ z_1 \sqrt{1 + \left(\frac{8h}{l^2}\right)^2 z_1^2} + \left(\frac{l^2}{8h}\right) + \ln \left( \left(\frac{8h}{l}\right) z_1 + \sqrt{1 + \left(\frac{8h}{l^2}\right)^2 z_1^2} \right) \right] \right] \quad (15)$$

를 이용하여 계산할 수 있다(그림 2참조).

또한 아치 임의의  $z_1$ 좌표에 해당하는 포물선 아치의 초기 곡률  $k_{yo}$ 은

$$k_{yo} = \frac{\left| \frac{8h}{l^2} \right|}{\left( 1 + \left(\frac{8h}{l^2}\right)^2 z_1^2 \right)^{3/2}} \quad (16)$$

과 같이 계산할 수 있다.

포물선 아치에 수직 등분포 하중이 작용하는 경우 아치의 단면에는 순수 압축력만 발생하게 된다. 이 경우 좌굴이 발생하는 동안 하중은 계속 수직방향이며 하중은 아치 단면의 중심에 작용하고 아치의 지점 사이에 어떠한 면의 구속이 없는 경우 아치 단면에 작용하는 압축력  $F$ 와  $\Delta f_y$ 는

$$F = \frac{qL^2}{8h} \sec \phi \quad (a)$$

$$\Delta f_y = -q(\cos \phi^2)\beta + q(\sin \phi \cos \phi) \frac{dv}{ds} \quad (b)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식 (17)에서  $w$ 는 수직 등분포 하중의 크기를 나타낸다. 또한  $\phi$ (그림 2 참조)는

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + (8hz/l^2)^2}} \quad (18)$$

과 같이 정의 된다. 본 연구에서는 단순 지지된 아치에 연계를 국한 하고 있으며, 단순 지지된 아치의 경계조건은

$$v = \frac{d^2v}{ds^2} = \beta = \frac{d^2\beta}{ds^2} = 0 \quad (19)$$

와 같다. 따라서, 식 (15)-(19)와 식 (13) 및 (14)를 이용하여 포물선 아치의 임계 휨모멘트  $M_{cr}$ 과 임계 압축력  $F_{cr}$ 을 구할 수 있다.

### 3.2 제안된 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도 검증

여기서는 앞 절에서 설명한 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 기존 연구자의 결과 및 유한요소해석 결과와 비교하여 제안식의 타당성을 검증하였다. 먼저 본 연구에서 사용된 수치해법의 수렴도를 검증하고 이후 뒀의 영향이 없는 순수 압축력이 작용하는 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 기존 연구자(Torkaz & Sandhu, 1972)의 결과와 비교하여 제안식의 타당성을 검증 하였다. 마지막으로 뒀의 영향이 포함된 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 유한요소해석 결과와 비교하였다.

그림 3은 본 연구에서 사용된 수치해법의 수렴도를 나타낸다. 여기서 x축은 해석에 사용된 요소의 수를 나타내며, y축은 임계 좌굴 강도의 비를 나타낸다. 해석에 사용된 단면은  $GJ/EI_x=1.4$ 이며, 아치의 라이즈비  $h/l$ 는 0.3이다. 또한 뒀의 영향이 없으므로  $I_w$ 은 0이다. 본 연구에서는 수렴도를 높이기 위하여 Richardson's extrapolation을 사용하였으며, 이 값을 1로 하는 경우 그림 3에서와 같이 해석에 사용된 요소의 수가 증가할수록 이 값에 접근하여 가는 것을 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서 사용된 Richardson's extrapolation을 사용하는 경우 적절한 수렴도를 확보할 수 있는 것으로 판단된다.

Torkaz & Sandhu(1972)는 뒀의 영향이 무시된 순수 압축력이 작용하는 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 제안하였다. 비교에 사용된 아치의 단면 성질은 앞의 수렴도 검증에 사용된 모델과 같으며, 다만 아치의 라이즈비는 0.1-0.4의 범위를 갖는다. 비교 결과는 그림 4와 같다.

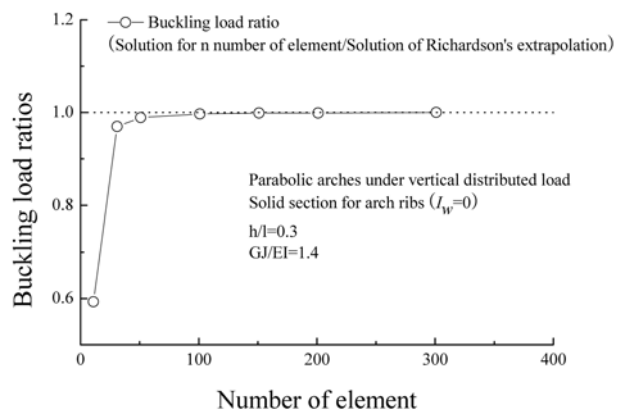


그림 3. 본 연구에서 사용된 수치해법의 수렴도 검증

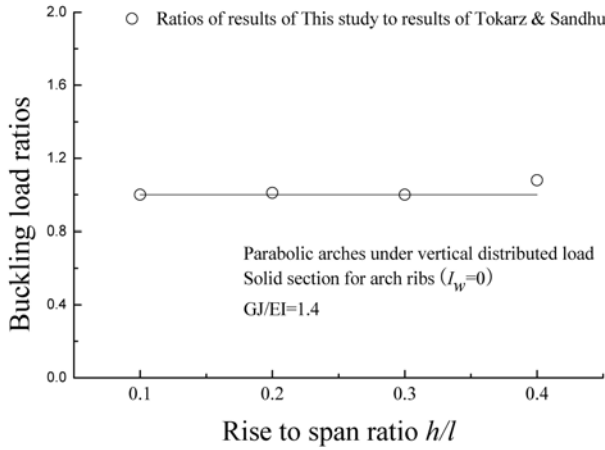
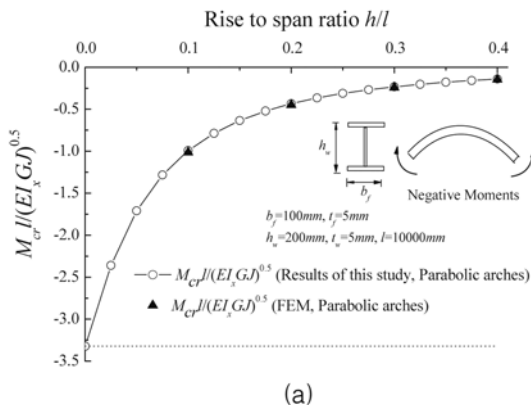


그림 4. 제안된 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도의 검증 (순수 압축력 작용,  $I_w=0$ )

그림 4에서 알 수 있듯이 Torkaz & Sandhu(1972)와 본 연구의 결과가 서로 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 비교 결과 오차는 라이즈비  $h/l$ 이 0.1-0.3 구간에서 2% 이내로 발생하였으며,  $h/l=0.4$ 인 경우 약 7%로 가장 크게 발생하였다.

이 밖에 본 연구에서는 유한요소해석을 이용하여 본 연구에서 제안된 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 검증하였다. 유한요소해석에 사용된 프로그램은 범용 구조해석 프로그램 ABAQUS(2001)이며, 해석 방법은 고유치 해석을 사용하여 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 산정하였다. 또한 사용된 요소는 B320S로 ABAQUS(2001)에서 제공하는 박벽 직선보요소이며, 한절점당 7개의 자유도를 가진다. 비교에 사용된 단면은 플랜지의 폭  $b_f=100$  mm, 복부판의 높이  $h_w=200$  mm, 플랜지의 두께  $t_f$  및 복부판의 두께  $t_w$ 는 5 mm, 아치의 지간  $l=10000$  mm이며, 재료 성질은 탄성계수  $E=210000$  Mpa와  $G=80,769$  Mpa이다.

유한요소해석 결과와 제안된 횡비틀 좌굴 강도 비교 결과는 그림 5-6과 같다. 여기서  $x$ 축은 아치의 라이즈비  $h/l$ 을 나타내며,  $y$ 축은 무차원화된 횡비틀 좌굴 강도를 나타낸다. 그림 5(a)에서 알 수 있듯이 음의 방향의 휨모멘트가 작용하는 경우 라이즈비  $h/l$ 이 증가함에 따라 임계 휨모멘트  $M_{cr}$ 의 값은 감소하는 경향을 나타냈다. 반면에 그림 5(b)에서 알 수 있듯이 양의 방향의 휨모멘트가 작용하는 경우는  $M_{cr}$ 의 값이 증가하다가 다시 감소하는 경향을 보였다. 이러



(a)

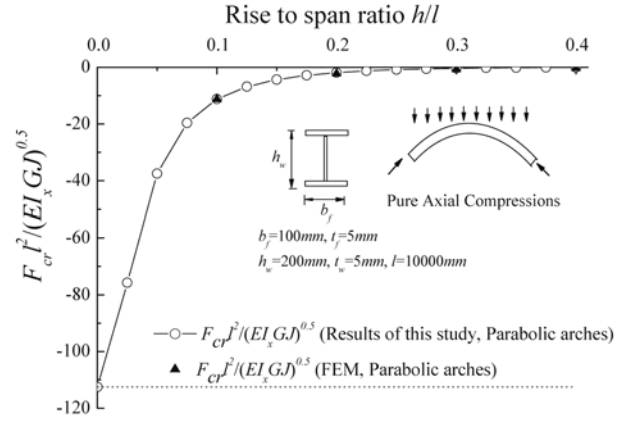


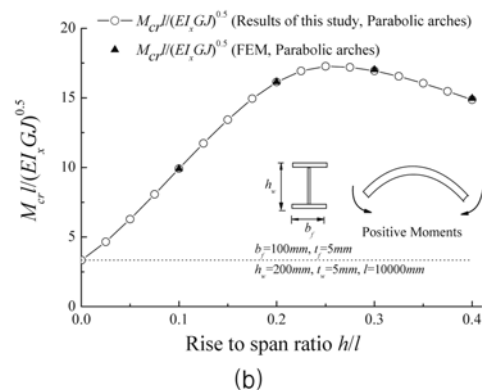
그림 6. 유한요소해석 결과와 비교(순수 압축력이 작용하는 포물선 아치)

한 경향은 유한요소해석 결과도 유사하게 나타났으며, 본 연구에서 제안한  $M_{cr}$ 값과 유한요소해석 결과 나타난  $M_{cr}$ 의 값은 음의 방향의 휨모멘트와 양의 방향의 휨모멘트가 작용하는 경우 최대 약 4%와 0.7%의 차이를 각각 보였다. 그림 6은 순수 압축력이 작용하는 포물선 아치의 횡비틀 좌굴 강도를 비교한 그림이다. 음의 휨모멘트가 작용하는 경우와 유사하게 임계 압축력  $F_{cr}$ 은  $h/l$ 이 증가하면서 감소하는 것을 알 수 있으며, 유한요소해석과 본 연구 결과의 차이가 평균 4%이며, 최대 차이는  $h/l=0.4$ 인 경우 약 11% 발생하였다.

위에서 알 수 있듯이 라이즈비가 커지는 경우 유한요소해석과 본 연구의 차이가 커지는 것을 확인할 수 있었다. 대부분의 임밀해에서는 라이즈비가 0.5인 경우 해가 발산을 하며, 수치 해석에서 라이즈비가 증가하는 경우 해가 발산하려는 경향이 나타난다. 또한 라이즈비가 0.4이상인 곳에서는 수치해가 상당히 불안정해지며, 이러한 이유로 라이즈비가 0.4에서 유한요소해석 결과와 보다 큰 차이를 보인 것으로 판단된다.

### 3.3 원형과 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도 비교

여기서는 원형 및 포물선 아치의 라이즈비  $h/l$  및 뒹의 영향에 따른 횡비틀 좌굴 강도를 비교 하였다. 비교에 사용된 단면은 표 1과 같다.



(b)

그림 5. 유한요소해석 결과와 비교(순수 휨모멘트가 작용하는 포물선 아치): (a) 음의 휨모멘트가 작용하는 경우; (b) 양의 휨모멘트가 작용하는 경우

표 1. 비교 모델의 제원

	$b_f$ (mm)	$h_w$ (mm)	$t_f$ (mm)	$t_w$ (mm)	$l$ (mm)	$h/l$	$W^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_w}{GJ}}$
Section1	100	200	5	5	10000	0-0.4	0.12
Section2	178	350	5	5	10000	0-0.4	1.22
Section3	205	447	5	5	10000	0-0.4	2.52

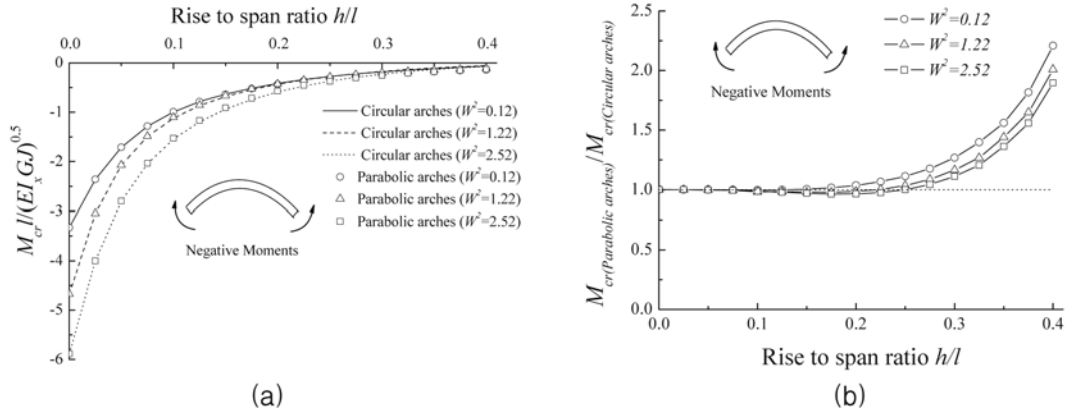


그림 7. 포물선과 원형 아치의 횡-비틀 좌굴 강도 비교(음의 휨모멘트 작용): (a) 라이즈비에 따른 좌굴 강도, (b) 라이즈비에 따른 좌굴 강도 비

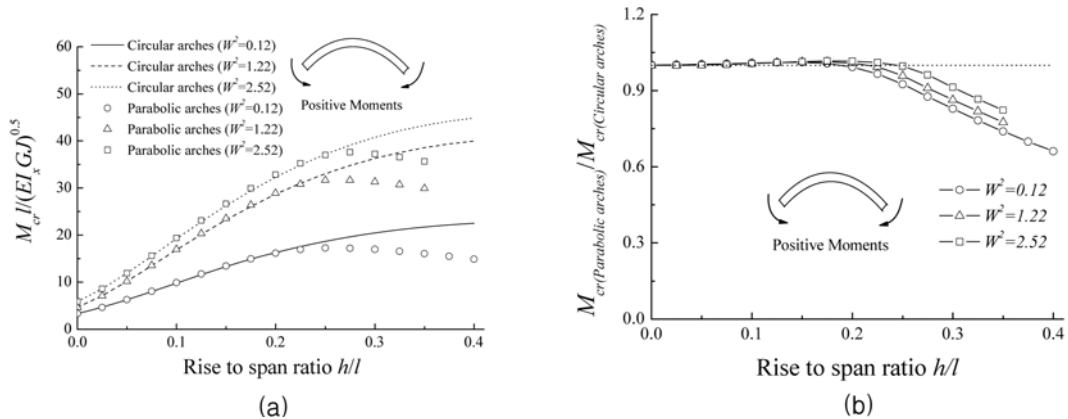


그림 8. 포물선과 원형 아치의 횡-비틀 좌굴 강도 비교(양의 휨모멘트 작용): (a) 라이즈비에 따른 좌굴 강도, (b) 라이즈비에 따른 좌굴 강도 비

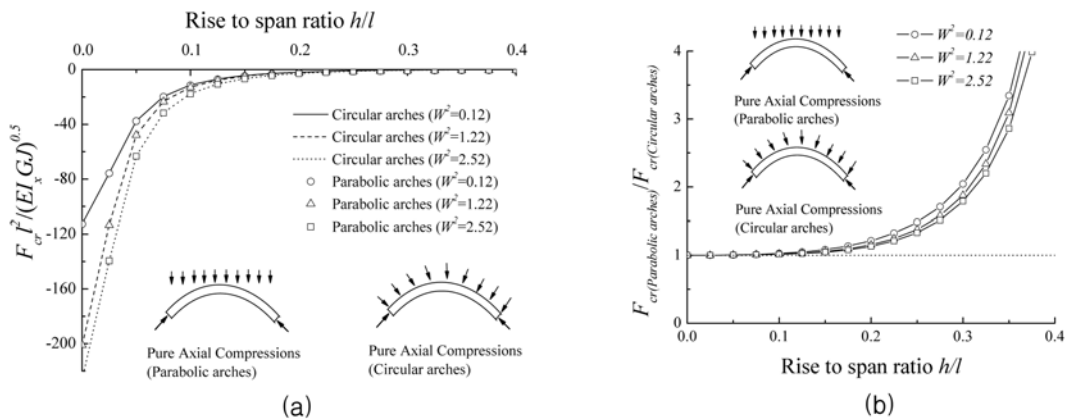


그림 9. 포물선과 원형 아치의 횡-비틀 좌굴 강도 비교(순수 압축력 작용): (a) 라이즈비에 따른 좌굴 강도, (b) 라이즈비에 따른 좌굴 강도 비

사용된 단면은 I형태의 박벽 개단면이며, 표 1에서  $b_f$ 는 플랜지의 폭,  $h_w$ 는 복부판의 높이,  $t_f$ 는 플랜지의 두께,  $t_w$ 는 복부판의 두께,  $l$ 은 아치의 지간,  $h/l$ 은 아치의 라이즈비,  $W^2$ 은 뒹의 영향을 나타내는 계수이다. 사용된 재료 성질은 탄성계수  $E=210000$  Mpa와  $G=80,769$  Mpa이다. 본 연구에

서는 서로 다른  $W^2$ 을 표 1과 같이 선정하여 본 연구 및 기존 연구자의 결과를 비교하였으며, 그 결과는 그림 7-9와 같다. 비교에 사용된 원형 아치의 임계 좌굴하중은 식 (8)과 (11)을 곡률이 일정한 경우에 적용하여 계산하였다.

그림 7과 8은 각각 음과 양의 휨모멘트가 작용하는 경우

의 결과이다. 그림 7(a) 및 8(a)는 라이즈비  $h/l$ 에 따른 횡-비틀 좌굴 강도를 비교한 그림이며, 그림 7(b) 및 8(b)는  $h/l$ 에 따른 원형과 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도비를 나타낸다. 음의 휨모멘트가 작용하는 경우 원형 및 포물선 아치 모두  $h/l$ 이 증가할수록 임계 좌굴 강도가 감소하는 것을 알 수 있다. 하지만  $h/l$ 이 약 0.2보다 커지는 경우 좌굴 강도는 포물선 아치가 원형 아치보다 커지는 것을 그림 7(b)에서 확인 할 수 있으며, 좌굴 강도의 비는  $w^2$ 이 작을수록 더 커지는 것을 알 수 있다. 양의 휨모멘트가 작용하는 경우에는  $h/l$ 이 증가하면서 원형 아치의 임계 좌굴 강도는 계속 증가하는 반면에 포물선 아치의 임계 좌굴 하중은 증가 후 감소한다. 결과적으로 약  $h/l$ 이 0.2보다 커지는 경우 포물선 아치의 임계 좌굴 강도가 원형 아치의 좌굴 강도보다 작아지는 것을 그림 8(b)에서 알 수 있다. 또한 그림 8(b)에서  $w^2$ 이 작을수록 좌굴 강도의 비가 작아지는 것을 확인 할 수 있다.

그림 9는 순수 압축력이 작용하는 경우 원형 및 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 비교한 그림이다. 여기서 원주 방향의 등분포 하중이 작용하는 원형 아치의 경우 단면에 작용하는 압축력의 크기는 일정한 반면에 수직 등분포 하중이 작용하는 포물선 아치 단면에 작용하는 압축력의 크기는 아치의 축을 따라 변화하며, 지점부에서 가장 큰 값을 갖는다. 본 연구에서는 비교를 위하여 포물선 아치의 경우 지점부에서 임계 압축력을 계산하였다.

순수 압축력이 작용하는 경우 음의 휨모멘트가 작용하는 경우와 유사한 거동이 나타남을 알 수 있다.  $h/l$ 가 증가하면서 임계 좌굴 강도는 감소하며,  $h/l$ 이 약 0.2보다 작은 경우에는 원형 및 포물선 아치의 좌굴 강도가 유사하나,  $h/l$ 이 약 0.2보다 커지는 경우 원형과 포물선 아치의 좌굴 강도는 큰 차이를 나타내었다. 또한 그림 9(a)에서 알 수 있듯이  $w^2$ 이 커지는 경우 임계 좌굴 하중은 증가하였으나, 원형과 포물선 아치의 좌굴 강도비는 감소하는 것을 그림 9(b)에서 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도에 관한 연구를 수행하였다. 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 결정하기 위하여 변곡률을 갖는 아치의 횡-비틀 좌굴 방정식을 식 (8)과 (11)과 같이 유도하였다. 제안된 좌굴식은 뒀의 영향을 포함하고 있어 박벽 개단면에 적용이 가능하며, 또한 곡률이 변화하는 비원형 아치에도 적용할 수 있다.

제안된 식을 이용하여 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 제안하였다. 포물선 아치의 경우 아치의 곡률이 중립축을 따라 변하기 때문에 본 연구에서는 유한차분법을 이용한 수치 해법을 통하여 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 결정하였

다. 이 방법에 의하여 이산화된 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 식은 부록의 식(A1)과 (A2)와 같으며, 제안된 수치해법을 검증하기 위하여 기존 연구자 및 유한요소해석의 결과와 비교하였다. 마지막으로 원형 및 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도를 비교하였다. 그 결과 라이즈비  $h/l$ 이 약 0.2보다 작은 경우 원형과 포물선 아치의 횡-비틀 좌굴 강도는 서로 유사하였으나,  $h/l$ 이 약 0.2보다 커지는 경우 횡-비틀 좌굴 강도의 차이는 급격하게 증가하였다.

#### 감사의글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발 사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

#### 참고문헌

- ABAQUS (2001) *ABAQUS standard user's manual version 6.2*, Hibbit, Karsson and Sorensen Inc..
- Chajes, A. (1974) *Principles of structural stability theory*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ.
- Kang, Y.J. and Yoo, C.H. (1994) Thin-walled curved beams II: analytical solutions for buckling of arches. *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 120, No. 10, pp. 2102-2125.
- Lim, N.H. and Kang, Y.J. (2004) Out-of-plane stability of circular arches. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 46, pp. 1115-1137.
- Love, A.E.H. (1944) *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4th ed. Dover Publications, New York.
- Ojalvo, M., Demuts, E., and Tokarz, F.J. (1969) Out-of-plane buckling of curved members. *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 95, No. 10, pp. 2305-2316.
- Papangelis, T.P. and Trahair, N.S. (1987) Flexural-torsional buckling of arches. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, Vol. 113, No. 4, pp. 889-906.
- Rajasekaran, S. and Padmanabhan, S. (1989) Equations of curved beams. *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 115, No. 5, pp. 1094-1111.
- Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. (1961) *Theory of elastic stability*, 2nd ed. McGraw-Hill Book Co., Inc..
- Tokarz, F.J. and Sandhu, R.S. (1972) Lateral-torsional buckling of parabolic arches. *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 98, No. 5, pp. 1161-1179.
- Tufekci, E. and Dogruer, O.Y. (2006) Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section. *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 132, No. 6, pp. 600-609.
- Vlasov, V.Z. (1961) *Thin walled elastic beam*, 2nd ed., National Science Foundation, Washington (DC).
- Wen, R.K. and Lange, J. (1981) Curved beam element for buckling analysis. *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 107, No. 11, pp. 2053-2067.

(접수일: 2008.9.5/심사일: 2008.10.2/심사완료일: 2008.12.17)

부 록

유한차분법에 의하여 이산화된 순수 휨모멘트가 작용하는 변곡률을 갖는 아치의 좌굴 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{a_{1(n)}}{S^4} - \frac{a_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n-2)} + \left( -\frac{4a_{1(n)}}{S^4} + \frac{a_{2(n)}}{S^3} + \frac{a_{4(n)}}{S^2} - \frac{a_{6(n)}}{2S} \right) v_{(n-1)} + \left( \frac{6a_{1(n)}}{S^4} - \frac{2a_{4(n)}}{S^2} \right) v_{(n)} \\
 & + \left( -\frac{4a_{1(n)}}{S^4} - \frac{a_{2(n)}}{S^3} + \frac{a_{4(n)}}{S^2} + \frac{a_{6(n)}}{2S} \right) v_{(n+1)} + \left( \frac{a_{1(n)}}{S^4} + \frac{a_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n+2)} + \left( \frac{a_{7(n)}}{S^4} - \frac{a_{8(n)}}{2S^3} \right) \beta_{(n-2)} \\
 & + \left( -\frac{4a_{7(n)}}{S^4} + \frac{a_{8(n)}}{S^3} + \frac{a_{9(n)}}{S^2} - \frac{a_{10(n)}}{2S} \right) \beta_{(n-1)} + \left( \frac{6a_{7(n)}}{S^4} - \frac{2a_{9(n)}}{S^2} + a_{11(n)} \right) \beta_{(n)} \\
 & + \left( -\frac{4a_{7(n)}}{S^4} - \frac{a_{8(n)}}{S^3} + \frac{a_{9(n)}}{S^2} + \frac{a_{10(n)}}{2S} \right) \beta_{(n+1)} + \left( \frac{a_{7(n)}}{S^4} + \frac{a_{8(n)}}{2S^3} \right) \beta_{(n+2)} + M \left[ \left( \frac{a_{3(n)}}{S^2} - \frac{a_{5(n)}}{2S} \right) v_{(n-1)} \right. \\
 & + \left. \left( -\frac{2a_{3(n)}}{S^2} \right) v_{(n)} + \left( \frac{a_{3(n)}}{S^2} + \frac{a_{5(n)}}{2S} \right) v_{(n+1)} + \left( \frac{1}{S^2} \right) \beta_{(n-1)} + \left( -\frac{2}{S^2} \right) \beta_{(n)} + \left( \frac{1}{S^2} \right) \beta_{(n+1)} \right] = 0 \\
 & \left( \frac{b_{1(n)}}{S^4} - \frac{b_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n-2)} + \left( -\frac{4b_{1(n)}}{S^4} + \frac{b_{2(n)}}{S^3} + \frac{b_{3(n)}}{S^2} - \frac{b_{4(n)}}{2S} \right) v_{(n-1)} + \left( \frac{6b_{1(n)}}{S^4} - \frac{2b_{3(n)}}{S^2} \right) v_{(n)} \\
 & + \left( -\frac{4b_{1(n)}}{S^4} - \frac{b_{2(n)}}{S^3} + \frac{b_{3(n)}}{S^2} + \frac{b_{4(n)}}{2S} \right) v_{(n+1)} + \left( \frac{b_{1(n)}}{S^4} + \frac{b_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n+2)} + \left( \frac{b_{5(n)}}{S^4} \right) \beta_{(n-2)} \\
 & + \left( -\frac{4b_{5(n)}}{S^4} + \frac{b_{6(n)}}{S^2} \right) \beta_{(n-1)} + \left( \frac{6b_{5(n)}}{S^4} - \frac{2b_{6(n)}}{S^2} + b_{7(n)} \right) \beta_{(n)} + \left( -\frac{4b_{5(n)}}{S^4} + \frac{b_{6(n)}}{S^2} \right) \beta_{(n+1)} + \left( \frac{b_{5(n)}}{S^4} \right) \beta_{(n+2)} \\
 & + M \left[ \left( \frac{1}{S^2} \right) v_{(n-1)} + \left( -\frac{2}{S^2} \right) v_{(n)} + \left( \frac{1}{S^2} \right) v_{(n+1)} + (b_{8(n)}) \beta_{(n)} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{A1}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= S/(n-1) & (a) \\
 a_{1(n)} &= EI_x + EI_w k_{yo(n)}^2 & (b) \\
 a_{2(n)} &= 4EI_w k_{yo(n)} \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (c) \\
 a_{3(n)} &= k_{yo(n)} & (d) \\
 a_{4(n)} &= -GJk_{yo(n)}^2 + EI_w \left( 3k_{yo(n)} \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} + 2 \left( \frac{dk_{yo(n)}}{ds} \right)^2 \right) & (e) \\
 a_{5(n)} &= \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (f) \\
 a_{6(n)} &= -2GJk_{yo(n)} \frac{dk_{yo(n)}}{ds} + EI_w \left( k_{yo(n)} \frac{d^3 k_{yo(n)}}{ds^3} + \frac{dk_{yo(n)}}{ds} \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} \right) & (g) \\
 a_{7(n)} &= EI_w k_{yo(n)} & (h) \\
 a_{8(n)} &= EI_w \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (i) \\
 a_{9(n)} &= -(EI_x + GJ)k_{yo(n)} & (j) \\
 a_{10(n)} &= -2EI_x \frac{dk_{yo(n)}}{ds} - GJ \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (k) \\
 a_{11(n)} &= -EI_x \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} & (l) \\
 b_{1(n)} &= EI_w k_{yo(n)} & (m) \\
 b_{2(n)} &= 3EI_w \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (n) \\
 b_{3(n)} &= -(EI_x + GJ)k_{yo(n)} + 3EI_w \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} & (o) \\
 b_{4(n)} &= EI_w \frac{d^3 k_{yo(n)}}{ds^3} - GJ \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (p) \\
 b_{5(n)} &= EI_w & (q) \\
 b_{6(n)} &= -GJ & (r) \\
 b_{7(n)} &= EI_x k_{yo(n)}^2 & (s) \\
 b_{8(n)} &= -k_{yo(n)} & (t)
 \end{aligned} \tag{A2}$$



유사하게 유한차분법에 의하여 이산화된 순수 압축력이 작용하는 변곡률을 갖는 이치의 좌굴 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{a_{1(n)}}{S^4} - \frac{a_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n-2)} + \left( -\frac{4a_{1(n)}}{S^4} + \frac{a_{2(n)}}{S^3} + \frac{a_{3(n)}}{S^2} - \frac{a_{5(n)}}{2S} \right) v_{(n-1)} + \left( \frac{6a_{1(n)}}{S^4} - \frac{2a_{3(n)}}{S^2} \right) v_{(n)} \\
 & + \left( -\frac{4a_{1(n)}}{S^4} - \frac{a_{2(n)}}{S^3} + \frac{a_{3(n)}}{S^2} + \frac{a_{5(n)}}{2S} \right) v_{(n+1)} + \left( \frac{a_{1(n)}}{S^4} + \frac{a_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n+2)} + \left( \frac{a_{6(n)}}{S^4} - \frac{a_{7(n)}}{2S^3} \right) \beta_{(n-2)} \\
 & + \left( -\frac{4a_{6(n)}}{S^4} + \frac{a_{7(n)}}{S^3} + \frac{a_{8(n)}}{S^2} - \frac{a_{9(n)}}{2S} \right) \beta_{(n-1)} + \left( \frac{6a_{6(n)}}{S^4} - \frac{2a_{8(n)}}{S^2} + a_{11(n)} \right) \beta_{(n)} \\
 & + \left( -\frac{4a_{6(n)}}{S^4} - \frac{a_{7(n)}}{S^3} + \frac{a_{8(n)}}{S^2} + \frac{a_{9(n)}}{2S} \right) \beta_{(n+1)} + \left( \frac{a_{6(n)}}{S^4} + \frac{a_{7(n)}}{2S^3} \right) \beta_{(n+2)} + F \left[ \left( \frac{1}{S^2} - \frac{a_{4(n)}}{2S} \right) v_{(n-1)} \right. \\
 & \left. + \left( -\frac{2}{S^2} \right) v_{(n)} + \left( \frac{1}{S^2} + \frac{a_{4(n)}}{2S} \right) v_{(n+1)} + (a_{10(n)}) \beta_{(n)} \right] = 0 \\
 & \left( \frac{b_{1(n)}}{S^4} - \frac{b_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n-2)} + \left( -\frac{4b_{1(n)}}{S^4} + \frac{b_{2(n)}}{S^3} + \frac{b_{3(n)}}{S^2} - \frac{b_{4(n)}}{2S} \right) v_{(n-1)} + \left( \frac{6b_{1(n)}}{S^4} - \frac{2b_{3(n)}}{S^2} \right) v_{(n)} \\
 & + \left( -\frac{4b_{1(n)}}{S^4} - \frac{b_{2(n)}}{S^3} + \frac{b_{3(n)}}{S^2} + \frac{b_{4(n)}}{2S} \right) v_{(n+1)} + \left( \frac{b_{1(n)}}{S^4} + \frac{b_{2(n)}}{2S^3} \right) v_{(n+2)} + \left( \frac{b_{5(n)}}{S^4} \right) \beta_{(n-2)} \\
 & + \left( -\frac{4b_{5(n)}}{S^4} + \frac{b_{6(n)}}{S^2} \right) \beta_{(n-1)} + \left( \frac{6b_{5(n)}}{S^4} - \frac{2b_{6(n)}}{S^2} + b_{7(n)} \right) \beta_{(n)} + \left( -\frac{4b_{5(n)}}{S^4} + \frac{b_{6(n)}}{S^2} \right) \beta_{(n+1)} + \left( \frac{b_{5(n)}}{S^4} \right) \beta_{(n+2)} = 0
 \end{aligned} \tag{A2}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \bar{S} &= S/(n-1) & (a) \\
 a_{1(n)} &= EI_x + EI_w k_{yo(n)}^2 & (b) \\
 a_{2(n)} &= 4EI_w k_{yo(n)} \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (c) \\
 a_{3(n)} &= -GJ k_{yo(n)}^2 + EI_w \left( 3k_{yo(n)} \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} + 2 \left( \frac{dk_{yo(n)}}{ds} \right)^2 \right) & (d) \\
 a_{4(n)} &= -\frac{8h}{l^2} \cos^2 \phi_{(n)} \sin \phi_{(n)} & (e) \\
 a_{5(n)} &= -2GJ k_{yo(n)} \frac{dk_{yo(n)}}{ds} + EI_w \left( k_{yo(n)} \frac{d^3 k_{yo(n)}}{ds^3} + \frac{dk_{yo(n)}}{ds} \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} \right) & (f) \\
 a_{6(n)} &= EI_w k_{yo(n)} & (g) \\
 a_{7(n)} &= EI_w \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (h) \\
 a_{8(n)} &= -(EI_x + GJ) k_{yo(n)} & (i) \\
 a_{9(n)} &= -2EI_x \frac{dk_{yo(n)}}{ds} - GJ \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (j) \\
 a_{10(n)} &= -k_{yo(n)} + \frac{8h}{l^2} \cos^3 \phi_{(n)} & (k) \\
 a_{11(n)} &= -EI_x \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} & (l) \\
 b_{1(n)} &= EI_w k_{yo(n)} & (m) \\
 b_{2(n)} &= 3EI_w \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (n) \\
 b_{3(n)} &= -(EI_x + GJ) k_{yo(n)} + 3EI_w \frac{d^2 k_{yo(n)}}{ds^2} & (o) \\
 b_{4(n)} &= EI_w \frac{d^3 k_{yo(n)}}{ds^3} - GJ \frac{dk_{yo(n)}}{ds} & (p) \\
 b_{5(n)} &= EI_w & (q) \\
 b_{6(n)} &= -GJ & (r) \\
 b_{7(n)} &= EI_x k_{yo(n)}^2
 \end{aligned} \tag{A2}$$