대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.2, 301-316. Jun. 2009

부정적분과 정적분의 관계에 관한 고찰

정 연 준* · 이 경 화**

적분과 적분 기호는 합과 미분의 역, 두 가지 의미를 지닌다. 기호와 그 의미에 기초할 때 부정적분은 정적분과 동일한 것처럼 생각될 여지가 있으며 많은 학생들이 부정적분을 구간이 결정되지 않은 정적분으로 간주하고 있다. 부정적분과 정적분의 개념 발생 과정은 현재 학교수학에서 충분히 다루어지고 있지 않다. 이는 부정적분과 정적분을 단지 기호와 그 기호를 다루는 방식에 의해서 다루기 때문으로 생각된다. 이 논문에서는 부정적분과 정적분의 개념 발생 과정과 상호 간의 관계에 대한 분석을 시도하였고, 이로부터 교육적 시사점을 도출하였다.

Ⅰ. 문제 제기

학교수학에서는 미분의 역으로 부정적분을 도입하고, 구분구적법에 대한 학습을 바탕으로 정적분의 정의를 도입한다. 특히, 폐구간에서 연속인 다항함수의 그래프와 x축 사이의 넓이를 이용하여 정적분에 대한 직관적인 이해를 유도한다. 이어서 정적분과 부정적분의 관계를 설명하기 위해, 미적분의 제 1 기본정리, 곧, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$를 학습하도록 한다. 이로부터 정적분의 계산법을 유도하며, 이후의 학습에서는 이 계산법에 따라 계산을 수행하는 활동에 초점을 둔다. 역사적으로 적분과 미분의 관계 확립은 미적분의 핵심적인 과제이었지만 매우 어려운 과정이었다(Toeplitz, 1963). 이러한 사실을 고려할 때, 이와 같은 간단하고 형식적인 접근이 아니라 각각의 의미와 구조를 풍부하게 파악하는 기회를 제공하는 것이 필요한 것으로 생각된다. 무엇보다 정적분의 계산법을 둘러싼 논의 외에 정적분과 부정적분의 개념적 차이 그리고 상호 간의 관계를 파악하도록 하는 기회를 제공할 필요가 있다. 이러한 필요성은 적분을 학습한 학생들을 대상으로 한 조사 결과들에서 강하게 확인된다. 학생들의 적분 개념 이해를 조사한 연구들은 많지 않지만 일관되게 대다수 학생들은 부정적분과 정적분을 제대로 구분하지 못한다는 것을 보여준다(박재범, 2003; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Thomas, 1995; Zandieh, 1998). 특히 부정적분을 구간이 결정되지 않은 정적분으로 간주하는 반응이 일반적으로 발견된다.

적분에는 분할하여 각각을 계산한 후, 그것을 합하여 전체를 구하는 것과 부정적분을 찾는 것, 두 가지 의미가 포함되어 있다(Thomas, 1969: 144). 학교수학에서는 이 두 가지 의미 중 전자를 구분구적법으로, 후자는 정적분의 계산법으로 구체화하여 반영하고 있다. 그러나 구분구적법의 경우, 정적분에 대한 직관적인 이해와

* 서울대 대학원(swamp_monk@lycos.co.kr)
** 서울대(khmath@snu.ac.kr)

미적분의 제 1 기본정리를 도출하는 데까지 의미 충실하게 연결되어 다루어지지 않으며, 학습의 초점은 주로 정적분의 계산법에 놓인다. 적분 기호 $\int$를 처음으로 도입했던 Leibniz는 이 기호가 합을 나타낸다고 하였지만, 현재 학교수학의 맥락에서는 합의 의미보다는 미분의 역인 부정적분, 그에 따른 정적분의 계산 도구의 의미가 부각된다. 이 논문에서는 관련 문헌고찰을 통해, 정적분의 계산법만이 아니라 정적분과 부정적분 각각에 대한 개념적 이해와 상호 간의 관계에 대한 의미 충실한 이해를 꾀한다는 것이 어떤 의미이고, 어떤 방식으로 구현가능한가에 대해 제안하고자 한다.

II. 원시함수와 부정적분의 구분과 통합: Courant의 논의

Courant은 미분의 역을 적분으로 제시하는 기존 교재들을 강하게 비판한 바 있다. 그에 의하면 원시함수를 부정적분이라 하고 그것을 구하는 과정을 적분이라 한 다음 적절히 강조하지 않고 정적분을 단순히 넓이 혹은 합의 극한으로 소개하는 것은 이론의 핵심을 감추는 일이다(Courant & Robbins, 1996: 438). 그는 미분의 역을 부정적분으로 정의하는 것은 언어적으로 미분과 적분을 연결하는 조치라고 보았다. 미적분 교재에서 일반적으로 미분의 역 과정의 결과물이 부정적분으로 정의되지만, 부정적분과 정적분의 관계 역시 수학적으로 명확하게 제시된다. 이 점을 고려하면 Courant의 비판은 용어상의 문제 때문에 이론의 핵심이 가려진다거나 언어적으로 미분을 적분에 연결시킨다는 것으로 보일 수 있다. Courant은 기존 교재의 전개 방식을 비판하는 것에서 그치지 않고, 자신이 직접 '이론의 핵심'이 드러나도록 정적분과 부정적분의 관계를 제시하였다. 여기에서는 Courant(1970: 109-117)을 살펴보면서 그의 비판과 주장의 의미를 논의하겠다.

Courant은 부정적분과 원시함수를 구분해야 한다고 주장하였는데, 그는 부정적분을 아래끝 a가 고정된 정적분, $\int_a^x f(u)du$으로 정의한다. 아래끝의 값이 다른 부정적분 사이에는 다음과 같이 설명한다: $F(x)=\int_a^x f(u)du$에 대하여, 아래끝을 a에서 α로 바꾼 부정적분을 $G(x)=\int_\alpha^x f(u)du$이라 하면, $G(x)-F(x)=\int_\alpha^a f(u)du$. 따라서 동일한 함수의 서로 다른 두 부정적분 F와 G 사이에는, 적당한 상수 c가 존재하여 $G(x)=F(x)+c$의 관계가 성립한다. 한편 미적분의 제 1 기본정리에 의하여 부정적분은 모두 피적분 함수의 원시함수이다. 동일한 함수의 원시함수 사이에는 항상 상수만큼의 차이가 난다. 따라서 주어진 함수 $f(x)$의 모든 원시함수 $F(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$F(x)=C+\int_a^x f(u)du.$$

여기에서 C와 a는 상수이다. a를 변경하는 것에 의하여 C를 없앨 수 있는 것처럼 보이지만, 부정적분만으로 표현되지 않는 원시함수도 있을 수 있기 때문에 상수 C를 아예 없앨 수는 없다. 결국 부정적분은 원시함수의 일부이며, 모든 원시함수는 부정적분에 상수를 더하여 나타낼 수 있다. Courant은 이상과 같이 '부정적분'과 원시함수의 관계를 제시한 후, '부정적분' 아이디어를 확장하여 부정적분과 원시함수가 동일한 것으로 간주하겠다고 선언한다. "지금 발견한 관계는 부정적분 아이디어의 확

대를 시사한다. 따라서 이제

$$[\cdots=] \ C+\int_{a}^{x} f(u)du$$

형태의 모든 표현을 $f(x)$의 부정적분이라고 부르겠다. 달리 표현하면, 원시함수와 부정적분 사이에 어떠한 차이도 두지 않겠다(Courant, 1970: 116)." Courant(1970: 116)은 부정적분과 원시함수가 서로 다른 것임에도 불구하고, "둘 사이의 관계에 대한 지식"이 "'부정적분'이라는 용어를 원시함수에 적용할 수 있는 권리를 부여"한다고 보았다. Courant은 이로부터 부정적분 기호가 비롯된 것으로 설명한다. 부정적분을 그 자체로 완전히 명확하지 않은 표기로 나타내는 것이 일반적인데, 이는 위의 관계식에서 정적분의 위 끝 x와 아래 끝 a, 상수 C를 생략하고 적분 변수를 x로 나타낸 것이다. 즉

$$F(x)=C+\int_{a}^{x} f(u)du=\int f(x)dx.$$

이러한 결론은 Courant이 기존 교재를 비판한 이유가 원시함수와 부정적분을 동일시한 것 자체가 아니라 원시함수가 (Courant식) 부정적분에 의해 대체되었다는 사실을 적절하게 강조하거나 명확하게 설명하지 않는 것이라는 점을 보여준다.

원시함수는 미분 과정의 역이므로, 그 존재성이 자명하게 보이지만, 미분의 역 그 자체만으로는 존재하는 모든 원시함수를 찾을 수는 없으며, 원시함수의 존재성을 보장할 수도 없다(정연준 · 이경화, 2009). 그런데 미적분의 제 1 기본정리에 의하면 부정적분 $\int_{a}^{x} f(u)du$는 $f(x)$의 원시함수이다. 이는 $f(x)$의 원시함수가 존재한다는 것이 정적분에 의해 보장된다는 의미를 지닌다. 미적분의 제 1 기본정리와 관련하여 원시함수의 존재성 보장을 지적하는 언급은 교재에서 쉽게 찾을 수 있다. Courant은 이것을 의식화하여 정적분과 부정적분의 관계 전면에 내세운 것이다. Courant(1970: 121-3)은 이하에서 소개하는 바와 같이, 질량과 밀도 관계를 예로 하여 자신이 제기한 논점의 의미를 구체화하였다.

함수 F가 x축 위에 따라서 놓인 전체 질량을 나타내는 함수라 하자. 그러면, F의 두 함수값의 차 $F(x_2)-F(x_1)$은 두 점 x_1과 x_2 사이에 있는 전체 질량을 나타내며, 구간 x_1에서 x_2 사이의 단위 길이당 평균 질량은

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$$

이다. $F(x)$가 미분가능하다고 가정하면 $x_2 \to x_1$할 때 이 값은 미분계수 $F'(x_1)$으로 수렴한다. 이 양이 점 x_1에서 밀도이다. 이때 밀도 $f(x)$와 함수 $F(x)$ 사이에는 $F(x)=\int_{0}^{x} f(u)du$, $f(x)=F'(x)$의 관계가 성립한다. 여기에서 $f(x)=F'(x)$이기 때문에 미분의 역 과정에 의해, $\int f(x)dx$에 의해 $F(x)$를 결정할 수 있는 것처럼 생각할 수 있다. 그러나 부정적분은 원시함수를 미분 역 과정을 이용하여 찾을 수 있을 때에만 의미가 있다. 그렇기 때문에 $F(x)$는 $\int f(x)dx$가 아니라 $\int_{0}^{x} f(u)du$에 의해서 결정된다고 해야 한다. $\int f$는 원시함수를 찾을 수 있는 함수들에 대하여 $\int_{a}^{x} f$를 계산할 수 있는 방법을 제공하는 역할을 한다.

위에 제시된 내용의 의미는 다음과 같이 설명될 수 있다. 변화율과 변화량 관계에서 보면, 미분에 의하여 변화량 함수에서 변화율 함수가 결정되기 때문에, f와 $\int f$를 가지고 변화율과 변화량 관계를 분석할 수 있을 것처럼 생각된다. 그러나 f와 $\int_{a}^{x} f$가 변화율과 변화량 관계

를 분석하는 올바른 수학적 방법이며, $\int f$는 $\int_a^x f$를 계산하는 간편 계산법이다. 곧 속도와 위치의 관계에서 보면, 미분 과정에 의해서 위치 함수에서 속도 함수가 결정된다. 속도 함수의 정적분이 위치를 결정하는 수학적 방법이며, 부정적분은 보조적인 계산법의 역할은 한다. 그렇기 때문에 부정적분을 이용하여 정적분을 계산한다고 해도, 거리 계산이 정적분의 활용으로 다루어지는 것이다. 곧 정적분과 부정적분의 관계는 각각을 양에 대한 정의와 양에 대한 보조적 계산법으로 구분하여 설명할 수 있다. 미분의 역에 의존하여 적분이 계산되지만, 이러한 점에서 "적분과 미분의 역은 완전히 서로 다른 것(Courant:1970: 116)"이다. 다시 말하면 거리 계산이 정적분의 활용으로서 다루어지는 것은 미분의 역이 적분과 동등한 것이 아니라는 것이 적분법의 구조 안에 확립되어 있다는 것을 의미한다. 정적분을 언어적으로 미분의 역으로 정의하는 것이 이러한 정적분과 부정적분의 차이를 감추는 것으로 보았기 때문에 Courant은 일반적인 미적분 교재의 적분법 전개 방식을 비판한 것으로 판단된다. 그는 부정적분과 원시함수를 구분함으로써 적분법의 구조를 보다 명확하게 드러낼 수 있다고 생각한 것으로 보인다.

Courant은 정적분과 부정적분 혹은 (Courant 식) 부정적분과 원시함수의 차이를 아는 것이 중요하다는 점을 강조하였고, 그러한 차이가 어떠한 의미를 지닌 것인지를 보여주었다. 그런데 Courant은 부정적분과 원시함수의 의미를 구분하고 다시 통합하는 전개를 주장하였다. 정적분과 미분의 역 과정의 차이에도 불구하고, 원시함수를 부정적분이라 부르고 적분 기호를 이용하여 나타내고 원시함수 찾는 것을 적분이라 하는 것은 사실상 부정적분 혹은 미분의 역을 적분으로 간주하는 것이라 할 수 있다. 그러나 적용 맥락에서는 미분의 역과 적분의 차이가 명확하게 확립되어 있다. 이러한 점에서 적분법의 구성은 이중적이라 할 수 있다. 여기에 비추어 보면 Courant은 적분법 구조의 이중성을, 암묵적으로 따르는 것이 아니라, 명확하게 아는 것이 중요하다고 주장한 것이 된다. 그런데 수학적으로 원시함수가 부정적분에 의하여 정당성이 부여된다고 해도, 굳이 기호와 용어를 적분에서 빌려와서 나타낼 필요는 없다. 게다가 이렇게 적분 기호와 용어에 이중성을 허용해가면서 미분의 역과 원시함수를 적분이라고 할 이유는, 특히 Courant이 주장한 것처럼 정적분과 부정적분 혹은 미분의 역의 차이가 큰 것이라면, 더더욱 없다. 결국 Courant은 적분법의 구조의 이중성을 아는 것이 중요하다고 주장하였지만, 이중성의 의미가 무엇인지 설명하지 않았다. 다음 절에서 정적분과 부정적분 관계의 역사적 발달과정을 살펴보면서 그에 대한 단서를 찾아볼 것이다.

Ⅲ. 정적분과 부정적분 관계의 역사적 발달과정 분석

정적분과 부정적분의 관계는 미분과 적분 개념이 확립되기 이전부터 넓이를 이용한 거리 계산을 통해서 인식되었다. 역사적으로 정적분과 부정적분의 관계, 그리고 적분의 이중성은 넓이와 거리의 관계에 바탕을 두고 발달하였다.

1. Newton과 Leibniz 이전 ― 넓이와 거리의 관계 발견과 적분 개념의 변화

속도와 거리 사이에는 기본적으로 비례 관계

가 성립한다. 고대 그리스 시기에 등속도 운동의 속도와 거리의 관계는 비례를 통해서 설명되었다(Krejca, 1992: 13-4; Sherry, 1982: 96). Aristotle의 물리학에서 거리는 대표적인 일차원적인 양, 곧 선분의 길이를 통해서 표현되는 양이었다. 고대 그리스 시기에 거리와 넓이의 관계는 논의되지 않았다. 중세 이후 넓이와 거리가 연결되게 되는데, 이를 통해서 적분 개념에 변화가 나타난다(Medvedev, 1991: 175-6). 고대 그리스 시기의 적분은 넓이나 부피를 계산하고자 하는 대상에 대한 이미 알고 있는 다른 대상과의 비였다. 거리를 넓이로 측정하게 되면서 넓이를 시간에 따라서 변하는 것으로 볼 수 있게 되었고, 이를 출발점으로 하여 적분 관념에 변화가 생기게 된다.

14세기에 Oresme은 최초로 넓이와 거리 사이의 연결을 시도하였다. Oresme의 시도는 넓이로 다른 물리적 양을 나타낸 첫 번째 사례이다(Boyer, 1959: 84). Oresme의 접근은 평면 도형과 가속 현상의 동형성에 기반한 것이며, 이러한 동형성의 인식에서 순간 속도가 핵심적인 역할을 하였다(Sherry, 1982: 89-96, 136). 고대 그리스인들은 운동에 대한 다른 상식적인 관념들과 충돌하기 때문에 순간속도를 부정하였다. 그러나 등가속도 운동에 대한 직관과 시간에 따라서 속도가 증가한다는 정의에 비추어 볼 때, 등가속도 운동에서 각각의 속도가 순간적으로 존재하는 한편 속도의 변화가 연속적으로 이루어진다는 것은 분명하다. 한편, 각각의 속도가 순간적으로 존재하지만 등가속도 운동에서 거리가 증가하는 것 역시 분명하다. 이러한 역설적인 상황에서 Oresme은 삼각형에서 높이가 연속적으로 변하고 따라서 각각의 높이가 순간적으로 존재하지만 넓이가 증가하는 것에 주목하였다. 또한 속도와 거리 사이에 비례 관계가 성립하는 것처럼 도형의 높이와 넓이 사이에도 비례 관계가 성립한다. Oresme은 운동 현상과 이차원 도형 사이의 동형적 관계에 대한 관념적인 분석을 통해서 도형의 넓이를 이용하여 거리의 증가 현상을 다룰 수 있다는 것을 통찰하였다. 이러한 통찰을 통해서 Oresme은 속도 그래프 아래의 넓이를 이동 거리에 대한 모델로 사용하였다. Aristotle 물리학에서 거리는 선의 길이로 표현되는 일차원적 양이었다. Oresme에 의해서 넓이를 이용하여 거리를 계산할 수 있다는 점이 밝혀지면서 거리는 이차원적 양이 되었다.

Oresme은 순간 속도를 이용하여 넓이와 거리 증가의 동형성을 드러냈지만, 무한소를 이용하여 동형성을 분석하지는 않았다(Boyer, 1959: 84; Sherry, 1982: 108). 무한소를 이용한 넓이와 거리의 증가 현상에 대한 설명은 Galilei에게서 발견된다(Sherry, 1982: 100-10). 속도가 매끄럽게 연속적으로 변화하려면 유한한 시간 동안 무한히 많은 단계의 속도를 거쳐야 한다. 이때 속도 변화가 무한히 많은 단계를 거쳐야 한다는 점이 개념적인 문제를 일으킬 수 있다. 일정한 크기의 속도가 되기 위해서는 무한히 많은 크기의 속도를 거쳐야 하며, 따라서 각각의 속도가 아무리 작은 시간이라도 일정하게 유지된다면 속도 증가에 무한 시간이 필요하게 된다. 이에 대하여 Galilei는 무한히 많은 단계 각각에 무한히 짧은 순간이 대응하기 때문에 전체적으로 유한한 시간 안에 무한한 단계의 속도 변화가 완료될 수 있다고 보았다. 속도가 순간적으로만 지속된다면 등가속도 운동에서 거리의 증가를 설명하는 것이 문제가 된다. 각각의 속도가 지속되는 상태가 0이라면 각각의 속도로 이동한 거리 역시 0이다. 등가속도 운동에서 이동한 전체 거리는 이들의 합이므로 0이다. 여기서 Zeno의 역설이 연결된다. Galilei는 넓이가 선분 곧 불가분량으로 이루어졌다는 아이디어를 사용하

여 다음과 같이 이 문제에 대한 해답을 제시하였다. 사각형 안에 있는 평행선들을 모두 더한 것은 삼각형 안에 있는 것들을 모두 더한 것과 같으며 따라서 두 운동의 이동거리가 동일하다. 곧 전체 이동 거리는 순간적인 이동 거리의 합이며, 속도 그래프의 높이는 순간적인 이동 거리를 나타낸다. 따라서 시간—속도 그래프 아래의 넓이는 이동 거리에 해당하며, 이는 순간적인 이동 거리의 합이다. 이러한 설명은 넓이와 거리의 중요한 특성을 드러낸 것으로, 적분과 미분의 관계를 인식하는데 중요한 단서가 되었다(Medvedev, 1991: 177-8).

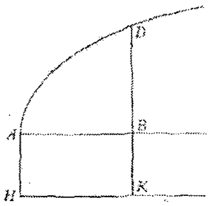
2. Newton과 Leibniz — 계산법으로서 미적분의 확립

Torricelli, Gregory, Barrow 등 여러 17세기의 수학자들은 적분 곧 넓이의 미분적 특성을 인식하였다(Medvedev, 1991: 176). 이들은 평면 도형의 넓이가 이동 거리를 나타내며 동시에 무한소로 이루어져 있다고 생각했다. 특히 Barrow는 이를 더욱 일반화하고 미적분의 제 1 기본정리를 진술하고 증명하였다. 그러나 이들은 거리를 이용하여 넓이를 다룬 것이 아니라 넓이를 이용하여 거리를 다루었다. 곧 부정적분으로 정적분을 계산하는 것이 아니라 정적분으로 부정적분을 다룬 것이다. 이에 비하여 대수를 이용하여 미분법을 고안하는데 성공한 Newton과 Leibniz는 부정적분을 이용하여 정적분을 다룰 수 있었다.

Leibniz 미적분의 핵심 아이디어는 곡선을 변이 무한히 많은 무한 다각형으로 간주하는 것이다(Bos, 1993: 84). 곡선은 무한소 선분들의 합으로 이루어져 있고 곡선 영역 아래의 넓이는 무한히 많은 무한소 직사각형들로 이루어져 있는 한편, 곡선을 이루는 무한소 선분의 x의 무한히 작은 증분과 y의 무한히 작은 증분의 비는 접선의 기울기를 이룬다. Leibniz는 이러한 무한소 변수들을 구적법과 접선 작도법에 이용하는데 관심을 가졌다. 구적법은 무한소 변량들의 무한합에 관련되며 접선은 변량의 무한소 차이에 관련된다. 이러한 점을 파악한 Leibniz는 무한소 변량을 다룰 수 있는 대수적 계산법을 창안하였다. 이 계산법은 구적법, 접선과 곡선에 관련된 문제들을 규칙과 공식에 의하여 다룰 수 있도록 되어 있다(Bos, 1993). 주어진 변량의 무한소 증가량을 생성하는 연산이 d, 변량의 무한소 증분들의 합을 생성하는 연산이 $\int$이다. dx, dy는 각각 변량 x와 y의 무한소 증분을 나타낸다. 두 연산 d와 $\int$은 상보적인 관계에 있으며, $\int dx = x$이다. 따라서 $dz = ydx$를 만족하는 z의 적분은 $\int ydx = \int dz = d\int z = z$이다. 이러한 결과는 구적법 문제가 역 접선 문제로 전환된다는 것을 함축한다(Edwards, 1982: 244). 그러나 Leibniz는 미분 연산 d의 규칙을 제시하면서 d와 dx의 의미가 무엇인지 명확하게 설명하지 않았다. Leibniz는 무한소에 대해서 모호한 입장을 가지고 있었으며, L'Hopital의 무한소를 이용한 설명을 비판하기도 하였다(Jesseph, 1998). Leibniz는 명확한 근거를 제시하지 못하였지만 함수식이 주어질 경우 dy와 dx의 관계식을 유도하는 과정을 고안하였고, 이 결과를 거꾸로 이용하여 적분 계산을 하였다.

Newton은 1665년 무한소를 이용하여 부정적분을 이용한 정적분 계산법을 설명한 바 있다(Guicciardini, 2003: 76-7). 그러나 Newton은 1669년 무한소의 합 아이디어를 변화율 아이디어로 바꾼다. 이 과정에서 Newton은 곡선 영역이 길

이가 축의 위치에 따라서 변하는 선분이 움직이면서 생성된다고 설명하였다.

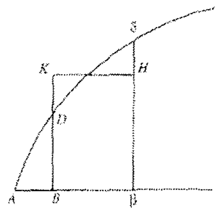


[그림 III-1] Newton의 유율법 아이디어

예를 들어 [그림 III-1]의 선분 BD와 BK는 이동하면서 ABD와 $AHKB$를 생성한다. 넓이를 이루는 무한소는 모멘트, 곧 "무한히 작은 시간 간격 동안 추가된 무한히 작은 부분(Newton, 1971: 81)"이다. 모멘트는 무한소에 해당하지만, Newton은 이들을 더하는 방법 대신 운동에 의하여 생성되는 양인 유량, 곧 부정적분 개념을 도입하였다. "나는 양들을, 움직이는 물체가 경로를 따라 지나가는 공간처럼 연속적으로 증가하여 생성되는 것으로 간주하겠다(Newton, 1971: 81)." 이 양들이 생성되는 속도가 유율이며, 모멘트는 유율에 의해서 순간적으로 증가하는 양인 것이다. 중요한 것은 유율과 유량의 관계가 미분과 미분의 과정에 의해서 결정된다는 점이다. 그렇기 때문에 무한소가 언급되지만 미분 과정이 합 과정을 대체할 수 있다. Newton(1971: 70-1)은 이러한 유량과 유율의 관계를 운동의 속도와 거리 관계를 통해서 도식화하였다.

1. 공간의 길이가 연속적으로 (즉, 각각의 순간에 대하여) 주어졌을 때, 제시된 임의의 시간에서의 운동의 속도 구하기.
2. 운동의 속도가 연속적으로 주어졌을 때, 제시된 임의의 시간에 지나간 공간의 길이 구하기.

Newton은 넓이를 이용하는 직관적인 형태의 미적분의 기본정리를 이용하여 넓이 계산이 속도가 연속적으로 주어졌을 때 이동한 거리를 계산하는 문제에 해당한다는 것을 보였다 (Guicciardini, 2003: 73). 무한소적인 모멘트에 대한 언급을 제외하면 Newton의 증명은 극한을 이용하는 현재의 방식과 동일하다. Newton은 넓이의 증분 $B\beta\delta D$와 변량 x의 증분 $B\beta$의 극한이 곡선의 세로좌표, 곧 y이 된다는 것을 보였다. 높이가 넓이의 변화율이며, 넓이가 높이의 부정적분 혹은 적분이라는 것을 보인 것이다.



어떤 곡선 AD의 밑변에 대하여 세로좌표 BD가 수직이 되도록 하고, AB를 x, BD를 y라고 하자. 그리고 $a, b, c, \cdots$를 주어진 양, m, n을 정수라고 하자. [⋯] $y = ax^{m/n}$이면, $[na/(m+n)]x^{(m+n)/n}$이 ABD의 넓이이다 (Newton, 1969: 207).

Newton과 Leibniz에 의해서 미적분이 확립된 과정은 미분을 이용하여 넓이와 거리를 연결시키는 과정이었다. 무한소 아이디어를 이용하여 넓이와 거리 관계를 설명하던 것이 미분에 의한 설명으로 대체되었고, 기하학적인 비례 관계 대신 함수에 대한 조작이 넓이와 거리 관계를 설명하는 수단으로 등장하였다.

3. 18세기 – 부정적분으로서 적분의 확립

Newton과 Leibniz는 적분이 미분의 역 과정으

로 계산될 수 있다는 것을 발견하고 이것을 이용하여 미분을 기본 연산으로 하는 통합된 계산법으로서 미적분을 확립하였다. 그런데 적분의 계산이 아니라 적분의 정의와 관련하여 Newton과 Leibniz의 태도에 차이가 있었고 그 결과 두 개의 적분이 초급 미적분에 존재하게 된다(Boyer, 1959: 205-6). Newton은 유량을 주어진 유율에 의해 생성된 양, 즉 주어진 크기를 그것의 유율로 가지는 양 또는 유율의 역으로 정의하였다. 곧 Newton은 부정적분을 적분으로 간주하였다. Leibniz는 미분을 우선적인 연산으로 간주하였지만 무한소를 지속시켜 적분을 무한히 작은 직사각형들의 무한 합으로 정의하였다. 18세기 수학자들은 Newton과 Leibniz의 아이디어를 하나로 통합하였다(Bos, 2000: 73; Kline, 1990: 406). Leibniz에 의하면 $\int ydx$는 각각의 넓이가 ydx인 무한소 직사각형들의 합이다. 18세기 수학자들은 적분에 새로운 의미를 부여하여 $\int ydx = \pounds$은 $d\pounds = ydx$인 함수 혹은 양을 의미하도록 하였다. Newton과 Leibniz의 아이디어를 혼합하여, Newton의 유량, 곧 부정적분이 적분으로 선택되고 Newton의 도함수 대신에 미분(differential)이 사용된 것이다. 이로 인해 적분 기호에 이중적인 의미가 부여되었다. 곧 미적분이 확립되고 폭발적인 발달을 거두는 시기에 정적분과 부정적분은 명확하게 구분되지 않고 하나로 융합된 형태로 존재하였다고 할 수 있다.

정적분과 부정적분의 통합은, 최초의 미적분 교재의 저자인, Johann Bernoulli에게서 시작된다. Johann Bernoulli는 Newton의 아이디어를 형식화하여 변량들이 연속적으로 증가하거나 감소하는 양이며, 변량의 미분은 변량이 연속적으로 증가하거나 감소하는 무한히 작은 부분으로 보았다(Ferzola, 1986: 69). 이를 통해 Johann Bernoulli는 적분을, 무한소의 합이 아니라, 미분이 비롯된 원래의 양으로 정의하였다. 또한 Johann Bernoulli는 미분 결과를 역으로 이용하여 적분을 찾는 방법을 제시하였다. $z^n dz$ 형태로 변환하여 다항함수의 미분 결과를 역으로 이용하는 것이 Johann Bernoulli가 제시한 적분을 찾는 기본 방법이었다. Euler는 Johann Bernoulli의 적분법 아이디어를 더욱 발전시켰다. Euler도 부정적분을 구하는 것을 적분으로 정의하였다."적분법은 주어진 미분으로부터, 양 그 자체를 찾는 방법이며, 이것을 가능하게 하는 계산법을 일반적으로 적분이라고 부른다(Dunham, 2005: 86에서 재인용)." 정적분과 부정적분에 대한 최초의 구분은 Lacroix가 1797년 집필한 미적분 교재에서 발견된다(Cajori, 1919: 272). Lacroix 역시 적분을 미분의 역으로 정의하였다. "적분법은 미분법의 역이다. 적분법의 목적은 도함수들을 그들이 유도된 함수로 되돌리는 것이다."(Lacroix, 1797: 1) Lacroix는 $dy = Xdx$의 일반적인 해 $\int Xdx$를 부정적분(intégrale indéfinie)으로 정의하는 한편, 이들은 원시함수에 임의의 상수가 더해져야 한다는 것을 지적하였다. 그리고 그는 하나의 값에서 적분이 주어져 상수가 결정되고, 다른 값까지 증가한 적분의 값을 다룰 때 나타나는 적분을 정적분이라고 정의하였다. 곧 현재의 미적분의 제 2 기본정리를 정적분의 정의로 간주한 것이다. 한편, Lacroix(1797: 1-2)는 적분에 합의 의미가 포함되어 있다는 점을 지적하였다. $y = \int Xdx$는 $\frac{dy}{dx} = X$, 곧 $dy = Xdx$를 만족하는 함수인데, 확정되지 않은 변량은 시작부터 고려하는 순간까지 발생한 무한히 많은 증분의 합이며 이 미분들의 합이 적분을 제공한다고 언급하였다. 적분 정의에 의하면 $\int$이 d의 역을 의미하

지만, 무한소와 연결되면서 한편으로 합을 의미하는 것으로 간주된 것이다.

4. 19세기 이후 — 정적분과 미적분의 기본정리 확립

미적분의 확립과 발달은 부정적분을 정적분보다 우선시함으로써 가능하였다. 그 결과 순방향의 그리고 역방향의 미분은 수학의 새롭고 강력한 분야에서 기본적인 알고리즘이 되었다. 18세기에 적분은 "미분의 기억(Boyer, 1946: 159)"에 지나지 않았다. 정적분과 부정적분은 미분화된 상태로 존재하였다. 그런데 미분의 역을 적분으로 간주하는 18세기의 관점은 모든 함수의 부정적분을 구할 수 있다는 것을 암묵적으로 전제하였다(Smithies, 1982: 43). 여기에는 함수에 대한 특정한 전제, 모든 함수가 멱급수로 전개될 수 있다는 것이 함께 전제되어 있었다. 함수가 항상 멱급수 전개가능하기 때문에 항별로 적분하여 부정적분을 구할 수 있다는 것이다. 그러나 18세기 중반 이후 편미분방정식을 다루게 되면서 점차 원시함수를 구하기 힘든 함수가 등장하고 그 결과 적분을 미분의 역으로 간주하는 관점의 한계가 드러나기 시작하였다(Medvedev, 1991). 이에 따라 수학자들은 점차 넓이에 주목하였다.

Fourier는 불연속 함수의 정적분을 고려하면서 18세기식 적분 개념을 폐기하게 되는 중대한 단초를 마련하였다(Grattan-Guinness, 1970: 44; Hawkins 2000: 153). 적분 가능한 불연속 함수들의 그래프와 x 축 사이의 넓이를 부정적분으로 계산하는 것은 불가능하다. 이러한 결과는 부정적분을 모든 함수에 대한 적분의 정의로 간주하는 것이 불가능하다는 점을 강력하게 암시한다. 이에 Fourier는 넓이를 이용하여 적분을 설명하였다. Fourier는 각각의 x에 대하여 세로좌표 $f(x)$가 존재하기 때문에 이들 세로좌표는 평면의 영역을 결정하며 이들 영역이 확정된 넓이를 지닌다는 점을 의심하지 않았다. Cauchy는 연속함수를 이용하여 Fourier가 제기한 관점에 부합하는 정적분을 확립하였다(Hawkins, 2000: 154-5). Cauchy는 '임의의' 함수가 연속이라면 $\int_a^b f(x)\,dx$가 확정된 값을 가진다는 것을 보여줌으로써 적분의 존재가 함수식에 의존하지 않는다는 것을 보여주었다. 그런데 이러한 정적분의 정의는 단지 넓이를 수학적으로 엄밀하게 정의하기 위한 것이 아니라, 부정적분을 염두에 둔 것이기도 하였다(Grabiner, 2005: 142). Cauchy는 최초로 정적분을 엄밀하게 정의하면서 적분 곧 원시함수의 존재성을 보장할 필요성에 대하여 다음과 같이 지적하였다.

> 원시함수의 다양한 성질을 다루기 전에 원시함수 혹은 적분의 존재성을 완전히 일반적으로 증명하는 것이 적분법에서 필요한 것처럼 보인다. 이를 위해서 제일 먼저 두 경계 사이에서 취한 적분 혹은 정적분 개념을 확립하는 것이 필요하다(Cauchy, 1899: ii).

정적분을 정립함으로써 현대적 형태의 미적분의 기본정리를 형성할 수 있게 되었고, 이에 따라서 정적분을 통해서 부정적분을 엄밀하게 다룰 수 있게 된 것이다. 이로써 합 개념이 적분에서 우선적인 관념이 되고 정적분이 다시 미적분에서 우선적인 연산의 자리를 차지하게 된다(Jourdain, 1913: 664; Medvedev, 1991: 186-7).

Cauchy는 극한을 이용하여 끝점이 x_0, X인 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$를 정의하였다(Cauchy, 1899: Grabiner, 2005). 여기에서 Cauchy는 전통적인 표기를 다

시 도입하여 정적분을 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$로 표기하고, 독자들에게 기호 $\int$ 와 $\int f(x)dx$가 곱의 합이 아니라 그러한 종류의 합의 극한을 나타낸다는 점을 경고하였다. 그 다음 Cauchy는 현대적인 형태의 미적분의 기본정리를 제시하고 이를 통해서 이전의 적분 곧 부정적분과, 새로 정의된, 정적분과의 관계를 제시하였다. Cauchy는 구간 $[x_0, X]$에서 함수 $f(x)$가 연속일 때, $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$가 $F'(x) = f(x)$의 성질을 지닌다는 것을 증명하였다. 미적분의 제 1 기본정리를 증명하고 Cauchy는 $dy = f(x)$를 만족하는 y의 일반적인 값을 찾는 문제를 제기하였다: $dF(x) = f(x)dx$를 만족하는 $y = F(x)$를 구하라. 그는 $y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$가 해의 하나이고 일반해가 $y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C$ 라는 것을 지적하였다. x_0의 값이 변해도 y의 일반적인 값은 동일한 형식을 유지하므로 Cauchy는 y의 일반적인 값이 $\int f(x)dx$ 표기에 표현되어 있다고 언급하였다. 곧 $\int f(x)dx$는 $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$에 의해 주어진 $dy = f(x)$의 해의 집합을 나타낸다. 이렇게 미적분의 기본정리를 통해서 Cauchy는 정적분 개념과, 18세기의 미분 역 과정으로서의 적분을 연결하였다(Ferzola, 1986: 104).

이상의 역사적 분석에 의하면 정적분과 부정적분은 상당 기간 융합된 형태로 존재하였다가 형식화되면서 분화되었고, 이러한 과정으로 인해서 부정적분이 적분 기호를 지니게 되었다. 이러한 발달 과정의 핵심 단계를 다음과 같이 정리할 수 있다. 첫째, 평면도형의 넓이와 운동의 이동 거리의 이중적인 관계가 정적분과 부정적분 사이의 관계에 대한 이해, 적분의 이중성의 원천이었다. 속도 그래프 아래의 넓이가 거리가 된다는 점에 대한 이해는 넓이를 계산하여 거리를 계산할 수 있게 하였고, 이를 통해서 정적분과 부정적분의 관계가 직관적인 형태로 인식되었다. Newton과 Leibniz에 의해 미적분이 확립되던 시기에는 반대로, 미분의 역과정을 통해, 거리를 계산하여 넓이를 계산할 수 있다는 것이 적극적으로 이용되었다. 둘째, 미분과 변화율에 대한 이해가 형식화되자 변화율로부터 양을 계산할 수 있다는 점이 함께 확립되었다. 셋째, 정적분과 부정적분은 융합된 상태로 존재하면서 적분의 정의에 활용되었고, 부정적분을 적분으로 정의한 경우도 있었다. 이것은 정적분의 정의가 확립되지 못한 것도 원인이 되었지만, 평면 도형의 넓이가 변화율—변화량 관계에 대한 모델로 간주되었다는 점도 중요한 원인이었다. 형식화된 상황에서 넓이 계산과 거리 계산은 정적분과 부정적분으로 귀결되면서 그 수학적 차이가 확립되었다. 넷째, 정적분의 정의가 확립되고, 부정적분의 한계가 인식되면서 정적분과 부정적분의 분화가 완성되었다. 다섯째, 넓이와 거리의 관계에 대한 현대적인 관점이 확립되어, 정적분은 속도 그래프 아래의 넓이와 거리를 연결하는 수학적 도구로, 미분 혹은 부정적분은 정적분 계산법으로 정돈되었다.

Ⅳ. 논의 및 결론

2절에서 논의한 바와 같이, Courant은 원시함수만으로 수학적 논의를 완성할 수 없으며 정적분 혹은 (Courant식) 부정적분에 의한 보완이 필수적이라고 보았다. 이러한 측면을 다루지

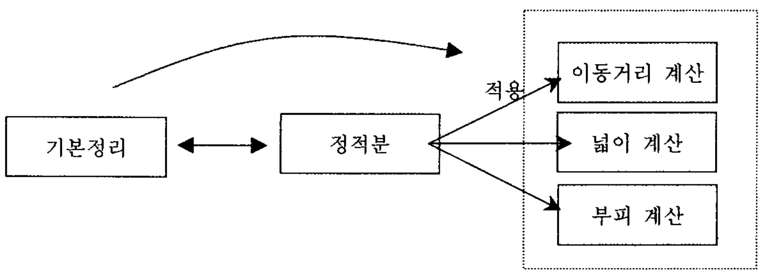
않고 미분의 역을 직접적으로 적분과 연결시키는 일반적인 적분법 전개 방식은 적분의 본질에 대한 이해를 가로막는 것으로 보았다. 그러나 Courant은 중요한 차이에도 불구하고 원시함수를 적분 기호로 나타내고 그것을 구하는 과정을 적분이라고 하는 이유를 설명하지 않았다. 3절에서 이에 대해 살펴본 바, 부정적분과 정적분이 분화되지 않은 채로 다루어지다가 형식화되면서 분화된 것을 확인하였다. 부정적분을 적분 기호를 이용하여 나타내고 부정적분을 구하는 것을 적분이라 하는 것은 미분화된 시기의 관행이 현재까지 살아남아 있는 것이다. 그러나 이것은 단순히 무지에서 비롯된 과거의 관례가 제거되지 않고 현재까지 살아남은 것은 아니다. 역사적 분석 결과에 의하면, 넓이 계산과 거리 계산의 이중적인 관계가 적분의 이중성에 깊게 관여하였다.

미적분의 제 1 기본정리에 의해 설명되는 바와 같이, 평면 도형의 넓이는 변화율과 변화량 관계에 대한 운동 현상에 대한 모델이다. 따라서 넓이를 계산하는 것은 결과적으로 변화율이 주어진 상황에서 변화량을 계산하는 것이며, 곧 변화량에서 변화율을 이끌어내는 미분의 역에 해당한다. 넓이 계산은 미분의 역 과정에 의할 수도 있지만, 정적분에 의하여 계산될 수도 있다. 정적분과 부정적분의 관계는 이러한 넓이 계산과 거리 계산의 관계를 통해서 발달하였다. 미적분의 발달에 따라 엄밀한 형식화가 진행된 후에 넓이 계산은 정적분으로, 거리 계산은 부정적분으로 정돈되었다. 결국 넓이 계산은 수학적인 대상으로서의 정적분 개념으로 확립되었지만, 거리 계산은 미분의 역 과정을 이용한 변화량 계산 체계로 이론화되지 못하고 정적분에 대한 보조적 계산법으로 자리매김하게 되었다. 19세기 초 정적분이 확립되고 부정적분을 언제나 찾을 수 있는 것은 아니라는 것을 인식하게 된 이후, 부정적분과 정적분에 대한 분화가 명확해지고, 적분은 넓이 계산, 곧 정적분에 기초하여 전개되었으며, 부정적분은 정적분에 의한 적분 이론 전개의 보조도구가 되었다. 곧 정적분과 부정적분의 구분은 넓이 등에 대한 양의 정의와 계산법의 구분을 뜻하며, 동시에 정적분에 의한 넓이 계산과 미분의 역에 의한 거리 계산의 구분을 뜻한다. 그러나 정적분에 의한 넓이 계산은 여전히 미분의 역에 해당한다. 결국 정적분과 부정적분의 차이가 인식되고 확립되었음에도 불구하고 미분의 역을 여전히 적분으로 간주하는 것은 넓이 계산과, 미분의 역에 의한, 변화량 계산의 관계를 드러내기 위함이라고 할 수 있다. 두 과정은 경로가 다르지만 목적지가 동일하다. 따라서 정적분 계산법의 역할을 하는 부정적분을 적분으로 간주함으로써 초래된 적분법의 이중성은 넓이 계산이 동시에 변화량 계산이 된다는 점과, 정적분과 미분의 역, 두 과정의 차이를 동시에 드러내기 위함이라고 결론을 내릴 수 있다. 이는 정적분과 부정적분 관계 인식의 출발점이 된 넓이 계산과 거리 계산의 관계가 형식화된 양식으로 표현된 것이라 할 수 있다.

Courant은 정적분과 부정적분의 차이를 앎으로써 적분의 이중성을 명확하게 파악하는 것이 중요하다고 보았다. 그러나 그는 적분의 이중성을 그 자체로 깊이 있게 논의하지 않았으며, 형식적인 수준에서 적분법의 구조와, 정적분과 부정적분의 관계를 설명하였다. 그 자체로 매우 의미 있는 논의이지만, 학교 수학의 범위에서 이러한 논의를 어떻게 적용해야 하는지가 불명확하다. 부정적분의 한계를 아는 것 혹은 정적분과 부정적분의 수학적 정당성의 차이를 아는 것은 미적분을 처음 배우는 학생들에게 적절하지 않은 주제이다. 넓이 계산과 거리 계산의 이중적인 관계는 Courant이 지적한 바를

학교수학의 수준에 의미 있게 도입할 수 있는 방안을 제공할 수 있을 것이다.

넓이 계산과 거리 계산의 구조를 다루기보다는 정적분 계산 절차의 정당화를 위한 수단으로 부정적분과 정적분 사이의 관계를 다루는 현행 학교수학의 맥락은 초기 역사와 이후 역사적 발달 과정에서 나타난 두 개념 사이의 관계를 드러내지 않고 있다. 이는 정적분과 부정적분의 관계에 함축되어 있는 평면도형의 넓이와 변화율—변화량 관계, 넓이 계산과 변화량 계산의 관계를 드러내지 못함으로써, Courant이 지적한 바와 같이 적분의 본질을 다루지 못하는 것이 된다. 물론 현재 미적분에서는 넓이 계산과 거리 계산 맥락을 정적분의 활용 단원에서 제시하고 있다. 이를 [그림 Ⅳ-1]과 같이 나타낼 수 있다. 이러한 구조 속에서 미적분의 기본정리는 간접적으로 넓이와 거리와 연결된다. 미적분의 제 1 기본정리에 의해 부정적분과 정적분이 연결될 수 있지만, 이는 정적분 계산법을 유도하는 과정에 속한다. 이동 거리 계산이 정적분의 활용으로서 다루어진다는 것은 넓이와 거리의 관계를 연결하는 수학적 과정은 정적분이라는 것을 뜻한다. 부정적분은 정적분에 대한 계산법으로서 넓이와 거리에 연결된다. 곧 넓이와 거리의 관계가 역사적인 국면에서 나타난 바와 같이 이중적인 것으로 다루어지지 않으며, 정적분과 정적분 계산법으로서의 부정적법에 의해서 넓이와 거리의 관계와 거리에 대한 계산이 다루어지는 것이다. 물론 이러한 구조 안에서 미적분의 제 1 기본정리를, '넓이 함수의 변화율', '넓이가 증가하는 순간속도' 등과 같은, 변화율 관념과 관련지어 설명함으로써 넓이 계산과 변화 현상과의 관계를 강조할 수도 있다. 그렇지만 이렇게 도입된 변화율 관념이 실질적인 역할을 하기 어려울 것으로 보인다. 적분법의 형식화된 구조 안에서 변화율에서 변화량을 결정하는 과정은 부정적분이 아니라 정적분이다. 이것은 변화율을 계산하는데 사용되는 과정과 변화량을 계산하는데 사용하는 과정이 전혀 다르다는 것을 뜻한다. 변화율과 변화율을 이끌어내는 과정에 대한 이해가 변화량을 결정하는 과정과 분리되어 있는 것이다. 역사적으로 미분에 의하여 변화율을 구하는 과정이 확립되었을 때, 수학자들은 미분의 역 과정을 통하여 변화율에서 변화량을 계산하는 과정 역시 동시에 확립하였다. 변화량에서 변화율이 결정될 뿐 아니라 변화율에서 변화량이 결정되며, 그래서 변화율 결정 과정을 역으로 이용하여 변화량을 계산한 것이다. 곧 변화율 관념은 미분 과정 혹은 부정적분을 통해서 바로 변화량에 연결되면서 큰 의미를 지니게 된 것이다. 이러한 점을 감안할 때, 미적분의 제 1 기본정리에 부여된 변화율 관념은 실제로 작용하지 못하고 형식적인 결과에 대한 장식적인 의미 부여에 머무르는 것으로 생각된다.



[그림 Ⅳ-1] 학교수학에서의 넓이 계산과 거리 계산 맥락 도입 방식

이상과 같은 논의에서 제기된 문제는 기본적으로 적분법의 형식적 구조를 주어진 것으로 간주한 것에서 비롯된다. 그러므로 부정적분과 정적분의 개념 발생 맥락을 각각 충실하게 이해하고, 그 둘 사이의 관계를 파악하는 발생적인 학습을 따르도록 하는 것이 더 적절하다. 특히, 넓이 계산과 거리 계산 맥락에서 변화량과 변화율 사이의 관계를 의식하고, 이를 수학화하도록 이끄는 것이 적분에 대한 개념적 이해를 위해 매우 중요하다. 이 과정에서 부정적분을 단지 정적분 계산법의 도입을 위한 형식적인 개념적 도구가 아니라, 초기 역사에서 거리 계산을 위해 논의한 수학적인 개념으로 다룰 필요가 있다. 이때 '넓이 함수'가 '높이 함수'의 부정적분 중 하나임을 확인하는 과정, 곧 미적분의 제 1 기본정리는, 형식적으로 진행되는 것이 아니라 넓이와 거리의 관계 맥락과 연결되도록 한다. 이러한 방식은 Newton의 방식과 유사한 것으로, 이와 같은 맥락에서 미적분의 제 1 기본정리를 '넓이 함수의 변화율', '넓이가 증가하는 순간속도' 등과 같은, 변화율 개념과 관련지어 다룬다면 부정적분을 단지 정적분의 계산법을 보조하는 개념만이 아니라, 역사발생 과정에서처럼 적분과 미분 개념의 관계를 통찰하고 이론적인 체계로 나아가게 하는 과정적 개념으로 볼 수 있게 될 것이다. 이를 통해서 부정적분과 정적분의 관계를 풍부하게 이해할 수 있는 맥락이 제공될 수 있다.

이상과 같은 발생적 접근을 통해서 적분법의 형식적 구조는 그 구조가 발생되는 계기와 함께 다루어질 수 있으며, 그러한 과정을 통해서 구조와 직관이 연결될 수 있을 것이다. 적분법의 구조에 대한 충분한 직관이 형성되고, 부정적분과 정적분의 관계에 대한 적절한 인식이 이루어진다면 적분을 학습한 대다수 학생들이 부정적분과 정적분을 구분하지 못하는 사태는 어느 정도 극복될 것이다. 특히 부정적분을 구간이 결정되지 않은 정적분으로 간주하는 반응을 교정할 수 있을 것이다. 후속 연구에서는 적분법의 형식적인 구조와 직관의 연결을 가능하게 하는 구체적인 교수-학습 과정과 전략에 대한 논의가 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

박재범(2003). **고등학교 미적분 지도방법에 관한 연구**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

정연준 · 이경화(2009). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 — 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로. **수학교육학연구, 19**(1), 123-42.

Bos, H.(1993). *Lectures in the History of Mathematics.* American Mathematical Society.

_______(2000). Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition, In I. Grattan-Guinness(Ed.). *From the calculus to the set theory*(pp.49-93). New Jersey: Princeton University Press.

Boyer, C. B.(1946). The First Calculus Textbooks, *Mathematics Teacher*, 39, 159-167.

__________(1959). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publication Inc.

Cajori, F.(1919). *A History of Mathematics.* Mac Millian.

Cauchy, A.(1899). *Resume des Logons donne"es 1'Ecolo royale Polyteehniquo sur le Galcul infinitesimal,* publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'Instruction publique, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy.

Courant, R.(1970). *Differential and Integral Calculus.* E. J. Mcshane(Tras.). New York: John Wiley & Sons.

Courant, R., Robbins, H.(1996). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* Oxford University Press.

Dunham, W.(2005). *The Calculus Gallery.* New Jersey: Princeton University Press.

Edwards, C.(1982). *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag.

Ferrini-Mundy, J., Graham, K.(1994). Research in Calculus Learning : Understanding of Limits, Derivatives and Integrals. In Kaput, J. & Dubinsky, E.(Eds). *Research issues in undergraduate mathematics learning : Primary analyses and results*(MAA Notes Vol. 33), 31-45. American Mathematical Society.

Ferzola, A. P.(1986). *Evolution of the Mathematical Concept of a Differential and an Outline of How a Modern Definition of this Concept Can Be Used in the Formulation of Elementary Calculus Course.* Unpublished doctoral dissertation, New York University.

Grattan-Guinness, I.(1970). *The development of the foundation of mathematical analysis form Euler to Riemann.* M.I.T. Press.

Grabiner, J.(2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* Dover Publications.

Guicciardini, N.(2003). Newton's Method and Leibniz's Calculus. In H. N. Jahnke(Ed). A *History of Analysis*(pp.73-103). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Hawkins, T.(2000). The Origins of Modern Theory of Integration. In Grattan-Guinness, I.,(Ed). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910 An Introductory History,* 149-180. Princeton University Press. 2000.

Jesseph, D.(1998). Leibniz on the Foundations of the Calculus : The Questions of the Reality of Infinitesimal Magnitudes. *Perspectives on Science,* vol. 6(1 &2), 6-40.

Jourdain, P.(1913). The Origin of Cauchy's Conceptions of a definite integral and of the continuity of a function, Isis 1, 661-703.

Kline, M.(1990). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Krejca, S. A.(1992). *The origins of calculus in the medieval period.* Unpublished doctoral dissertations, University of Illinois, Chicago.

Lacroix, S.-F.(1797). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* J.-B.-M. Duprat.

Medvedev, F. A.(1991). *Scenes from the History of Real Functions.* Basel: Birkhäuser Verlag

Newton, I.(1969). *Mathematical Papers of Isaac Newton Vol. II.* D. T. Whiteside(Ed) London: Cambridge University Press.

________(1971). *Mathematical Papers of*

Isaac Newton Vol. III. D. T. Whiteside (Ed) London: Cambridge University Press.

Sherry D. M.(1982). *A Philosophical history of the calculus.* Unpublished doctoral dissertations, Claremont University.

Smithies, F.(1982). The Background to Cauchy's Definition of the Integral. In Uuijsmans, C. B., *From A to Z : proceedings of a symposium in honour of A. C. Zaanen*, 93-100.

Thomas, K.(1995). *Fundamental Theorem of Calculus : An Investigation into Students' Constructions.* Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Thomas, G.(1969). *Calculus.* Boston: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Toeplitz, O.(1963). The Calculus - a Genetic Approach. Chicago: The Press of Chicago University.

Zandieh, M. J.(1998). The Evolution of Students Understanding of the Concept of Derivative. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University.

A study on the Relationship between Indefinite Integral and Definite Integral

Joung, Youn Joon (Graduate School of Seoul National University)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National Unviersity)

There are two distinct processes, definite integral and indefinite integral, in the integral calculus. And the term 'integral' has two meanings. Most students regard indefinite integrals as definite integrals with indefinite interval. One possible reason is that calculus textbooks do not concern the meaning in the relationship between definite integral and indefinite integral. In this paper we investigated the historical development of concepts of definite integral and indefinite integral, and the relationship between the two. We have drawn pedagogical implication from the result of analysis.

* key words : Definite Integral(정적분), Indefinite Integral(부정적분), Fundamental Theorem of Calculus(미적분의 기본정리), Distance(이동 거리), Area(넓이)

논문접수 : 2009. 4. 30
논문수정 : 2009. 6. 4
심사완료 : 2009. 6. 12