韓國經營科學會誌
第34권 第3號
2009年 9月

대여산업 공급사슬의 최적 수입공유모형

박해철*† · 조재은**

Optimal Revenue Sharing in a Supply Chain of Rental Industries

Haechurl Park* · Jae Eun Cho**

■ Abstract ■

It is often to apply revenue sharing models in rental industries which consist of a retailer and a wholesaler. This research analyzed the influences to profit of the supply chain if we adopt the revenue sharing model when the demand is uncertain and price sensitive. We found the conditions of the revenue sharing model to maximize the profit of the supply chain, and identified incentive compatible conditions for revenue sharing. It is proved that vertical integration guarantees maximization of profit for the supply chain. Also we found that it is possible to derive incentive compatible schemes by controlling ranges of revenue sharing ratios.

Keyword : Rental Industry, Supply Chain, Vertical Integration, Incentive Compatibility, Revenue Sharing Model

1. 서 론

일반 산업은 고객에게 제품을 판매하여 이익을 올리는 형태가 전형적이지만, 대여산업은 일정한 조건 하에 대여료를 받고 특정기간 동안 고객에게 제품을 대여함으로써 수익을 올리는 특징을 가지고 있다. 렌터카 업체나 비디오 대여업체 등이 이 산업의 범주에 포함되는 대표적인 기업들이다. 일반적으로 이 부류에 속하는 기업들은 제조업체나 도매유통업체로부터 대여 대상이 되는 제품을 구입하여

논문접수일 : 2009년 01월 29일 논문게재확정일 : 2009년 06월 12일
논문수정일(1차 : 2009년 06월 05일, 2차 : 2009년 06월 11일)
* 중앙대학교 경영대학
** 중앙대학교 경영학과 대학원
† 교신저자

일정 기간 동안 보유하면서, 고객들의 대여수요에 대응하는 형태의 사업 모델을 가지고 있다. 따라서 많은 경우 동일한 제품을 다량 보유하고 있는 것이 보통이며, 재고관리는 이들 기업의 중요한 경영 이슈 중의 하나이다.

특히 비디오 대여업의 경우, 고객의 수요에 부응을 하지 못할 경우 심각한 수준의 재고부족 비용을 지출하여야 하는 것이 현실이다. 재고부족으로 인해 주문에 대응하지 못하게 되면 수익창출기회의 상실은 물론, 고객의 신용마저도 잃게 되어 현저한 경쟁력의 저하를 경험하는 것이 일반적이다. 미국의 일부 비디오 대여업체의 경우, 고객이 희망하는 비디오를 고객이 원하는 시점에 대여할 수 없을 때에는 일종의 쿠폰을 발행하여, 다음 기회에 고객이 해당 비디오를 무료로 보게끔 하여 주고 있다. 비디오 대여가격이 도심지역에서는 5달러 정도한다는 것을 감안하면, 이 정도의 금액이 고스란히 재고부족 비용으로 환산될 수 있다는 의미이다(Mortimer [12])

반대로 지나치게 많은 동일 종류의 비디오를 보유한다는 것은, 그 구입비용 뿐만 아니라 추가적인 재고유지의 부담을 유발하기 때문에 바람직하지 못하다. 특히 개당 60~100달러에 달하는 DVD 구입비용은 소매 대여업체들로 하여금, 부담이 큰 재고부족 비용에도 불구하고 고객들에게 일정 수준 이상의 주문 충족률을 보장하는 데 커다란 장애가 되고 있다. 이와 같은 사정은 대표적인 대여산업의 종류인 렌터카업의 경우도 마찬가지이다. 렌터카의 경우 제품의 단가가 매우 높아서 이로 인한 재고유지 관련 비용이 상당할뿐더러, 성수기에 고객의 대여 요청에 응하지 못하는 상황에서 지출하게 되는 재고부족 비용도 매우 큰 것이 일반적이기 때문에 재고관리 이슈는 경영자에게 가장 중요한 문제의 하나이다.

또한 대여산업은 수요의 변화가 가격에 민감한 것으로 알려지고 있어서, 대여 소매업체의 경우 이익창출을 극대화하기 위해서 고려하여야 할 요인 중에 대여가격 요인도 감안하여야 한다는 점이 더욱 문제를 복잡하게 만들고 있다(Bernstein et al. [2]). 즉, 수요가 가격에 민감한 경우, 대여가격을 결정할 수 있는 대여 소매업체는 자신의 이익을 극대화하기 위하여 최적의 대여가격을 책정하려고 하는 인센티브를 가지고 있을 것이다. 하지만 대여 소매업체는 일정한 구매비용을 지불하고 대여제품을 제조업체 또는 도매업체로부터 구입하여야 하는 입장이기 때문에, 이 구매 비용의 수준이 대여가격의 책정에 일종의 제약으로 작용하게 된다.

따라서 대여업을 하는 공급사슬에서 제조/도매업체와 대여 소매업체의 양자가 협력을 해서 대여업체가 대여가격 책정에 보다 풍부한 재량권을 행사할 수 있도록 하는 경우, 이를 통해 공급사슬 전체의 수익 증대를 도모할 여지가 있을 수 있다. 그리고 이러한 모형이 실질적으로 작동할 수 있기 위해서는, 제조/도매업체와 대여 소매업체의 양자에게 모두 유리한 결과를 낳을 수 있도록, 즉 유인부합성(incentive compatibility)[1)]이 존재할 수 있도록 사업 모형이 설계되어야 할 것이다.

본 연구에서는 이러한 대여업 공급사슬의 고민을 중심으로, 대여수요가 대여가격의 함수이면서 불확실성이 존재하는 상황에서, 최근 일각에서 유행하고 있는 수입공유모형(revenue sharing model)[2)]을 중심으로, 대여업 공급사슬에 참여하고 있는 기업들의 적정한 수입공유 형태를 찾고자 한다. 이를 통해서 공급사슬에 존재하는 각 기업이 수입공유를 하지 않을 때보다, 양자가 이익 극대화 측면에서 서로 유리해지는, 즉 유인부합성이 있는 수입공유모형의 존재 여부와 그 조건을 발견하고자 한다.

이를 위해서 공급사슬에는 소비자를 상대로 직접적으로 대여업을 하는 대여 소매업체와, 이 기업에 제품을 판매하는 제조/도매업체의 두 기업이 있다

1) 경제 주체가 기존의 태도를 바꾸어서 새로운 제도나 계약으로 이행할만한 가치가 있다고 판단하게끔 하는 유인을 뜻하며, 엄밀한 개념은 [정의 1]을 참조할 수 있음.

2) 공급사슬에서 도매업체는 할인된 가격으로 소매업체에게 제품을 공급하고, 소매업체는 판매수입의 일부를 도매업체에게 양도하는 형태의 사업모형.

고 가정한다. 이 두 기업이 수입공유모형을 시행한다는 전제 하에, 대여 소매업체의 입장에서 재고관련 비용들을 정의하고, 이들을 결합하여 총 재고비용함수를 설계한다. 그리고 이를 바탕으로 공급사슬 전체의 이익을 극대화하는 수입공유모형을 찾고자 한다. 그리고 두 업체에게 유인부합성을 부여하기 위해서는 위에서 찾아 낸 수입공유모형이 어떻게 바뀌어야 하는지를 추구하기로 한다.

2. 기존의 연구결과

재고관리는 오랜 기간 동안 주요한 관심을 받아온 대상의 하나로서, 주로 재고를 관리하면서 발생하게 되는 재고유지 관련 비용과 재고부족에 의한 관련 비용을 최소화하고자 하는 방향으로 이루어져 왔다(Dada et al.[6]). 그리고 수요가 불확실 할 때, 기존 연구의 많은 부분은 이에 효과적으로 대처하기 위하여 안전재고를 어느 수준으로 유지하여야 하는가 하는 문제에 관심을 기울여 왔다(Silver et al.[13]). 특히 수요가 가격의 함수로서 불확실하게 변동하는 성향을 가지고 있는 모형의 경우와 같이 현실에 대한 실질적인 설명력이 있는 재고관리의 모형은, 다양한 연구자들에 의해 광범위하게 제안이 되어 왔다(Bell et al.[1]). 이러한 이슈에 대해서 잘 알려진 대표적인 연구로서는 Carlton[4]에 의한 모형을 들 수 있다. 그는 시장에 수요 측면에서 불확실성이 존재할 때 가격의 변화에 따르는 시장의 변동에 기업이 어떻게 반응하고 재고관리 정책을 바꾸어야 하는지에 대한 영향을 분석하였다(Carlton [4]). 시장이 과점 상황에 있는 경우에 대해 가격의 변화에 의해 수요가 변하는 비슷한 이슈를 다룬 유사한 주제의 연구로는 Chen[5]의 연구를 들 수 있다.

이처럼 불확실한 수요가 가격의 함수로서 작동하는 경우에 대한 연구 중에서도, 특히 대여산업의 재고관리에 관한 논문은 비디오 대여산업을 구체적인 대상으로 하여 경제학자들 사이에서 광범위하게 다루어져 왔다. 경제학자들은 개별 기업의 입장에서보다는 공급사슬 전반의 일반적인 시각에서 이 문제를 탐구하였다. 이러한 연구들의 공통된 주제는 공급사슬 전체의 측면에서 경제적 효율을 높이기 위하여, 효과적인 재고관리를 포함하여 가격정책 등에 대하여 어떠한 요건들이 만족되어야 하는가 등에 대한 이슈들을 발견하는 데에 주력하였다(Dana et al.[8]). 특히 Dana et al.[8]은 이 연구에서 비디오 대여산업의 예를 통해, 공급사슬의 수직적 통합(vertical integration)이 전체 공급사슬의 이익증대를 이룰 수 있는 가능성에 대하여 언급하였다.

이들의 연구를 시작으로 하여 대여산업의 재고관리 문제에 대한 연구는, 최근에 비디오 대여산업을 중심으로 일부 도매 유통업체(distributer)와 소매 대여업체(rental retailer) 간에 수입공유 프로그램(revenue sharing program)이 시행되면서 더욱 활발하여졌다. 수입공유 프로그램이란 당사자들끼리의 사전계약에 의해, 도매 유통업체가 소매 대여업체에게 구입가격은 낮추어 주는 대신, 소매업체가 고객으로부터 받는 수입의 일부를 도매 유통업체가 공유하는 프로그램이다. 이 프로그램이 상당한 성공을 거두면서 Varian[15] 등의 연구를 비롯하여 적극적인 관심을 모으기 시작하였다(Furman[9]). 이들은 주로 수입공유 프로그램의 경제학적인 성격을 분석하면서, 이 프로그램이 대여가격과 수요에 미치는 영향에 대해서 분석하였다(Cachon et al.[3]).

Tang and Deo[14]는 역시 대여산업을 대상으로 하여 수입공유 프로그램을 실시할 경우, 소매업체의 경영에 어떤 변화가 일어나는지를 재고관리 정책 측면에서 분석하였다. 즉, 이들은 먼저 공급사슬의 각 업체가 독립적으로 영업을 하는 경우, 소매업체의 경영상황을 모형화한 후 이에 바탕을 두고 소매 대여업체의 입장에서 최적주문량과 최적대여가격을 어떻게 결정해야 하는지를 설명하였다. 그리고 수입공유를 하는 상황으로 모형을 확장하여 주어진 특정형태로 주어진 수입공유의 계약조건 하에서, 소매 대여업체가 이익을 극대화하기 위해서는 어떻게 최적주문량과 최적대여가격을 변화시켜야 하는지에 대해서도 설명하였다.

그러나 궁극적으로 수입공유 프로그램을 시행하

는 경우, 소매 대여업체의 입장뿐만 아니라 공급사슬 전체 측면에서의 이익을 극대화하기 위한 개별 기업 입장에서의 구체적인 재고정책에 대한 연구는 그리 다양하게 이루어지지 못한 것이 사실이다. 특히 수입공유를 통해 공급사슬 전체의 측면에서 이익을 극대화하면서, 동시에 공급사슬의 각 기업이 수입공유모형에 참여할 수 있도록 하는 유인의 구체적 조건에 대한 연구는 지금까지 활발하게 이루어지지 못하였다. 보다 구체적으로 Tang and Deo [14]는 수입공유를 할 경우, 소매 대여업체의 이익을 극대화하는 주문량과 가격에 대해서만 의사결정 변수로서 관심을 기울였다. 하지만 본 연구에서는 제조/도매업체의 입장도 함께 고려하여, 양자가 서로 win/win할 수 있는 구체적인 수입공유의 계약조건을 의사결정변수로서 찾고자 한다.

3. 모형의 설정

3.1 기본적인 가정

대여업의 공급사슬은 독점적이며, 제조/도매업체와 대여 소매업체의 두 단계로 이루어져 있다고 하자. 먼저 제조/도매업체는 m의 원가로 해당 제품을 생산 또는 취득하고, 단위당 c의 가격으로 대여 소매업체에게 판매를 하고 있다고 가정한다($m < c$). 소매 대여업체는 제조/도매업체로부터 일정량의 제품을 구입하여 보유하면서, 고객에게 $p(< c)$의 가격으로 대여를 해주고 있다. 이 업체가 개별 고객에게 제품을 대여하여 주는 대여기간은 최대한 τ-기간 이내이며, 이 값은 정수로 주어져 있다고 가정한다. 그리고 이 소매 대여업체는 취급하는 제품에 대하여 일정한 영업기간(T) 동안 이와 같은 대여와 회수 과정을 반복하여 수익을 얻은 후에는, 해당 제품의 대여사업을 마무리한다고 한다. 이 과정에서 해당 소매 대여업체는 구입하는 제품의 양과 대여가격 p를 자신의 이익극대화를 위해 자의적으로 결정할 수 있다고 전제한다.

또한 해당 제품에 대한 t-시점의 단위기간(하루) 당 대여수요인 D_t는 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$D_t = \mu(p) + \epsilon \tag{1}$$

여기서 ϵ은 평균이 0이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따른다. 따라서 단위기간인 하루 동안의 대여수요는 대여가격의 함수로서 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 정규분포를 따르게 된다. 이러한 수요모형은 특히 Dana[7]의 수요모형을 비롯한 여러 연구에서 수요의 불확실성을 반영하기 위하여 사용되어 왔다.

그리고 단위기간 동안의 수요의 평균인 $\mu(p)$는 대여가격에 대해 다음과 같은 선형 관계로 정의된다고 하자.

$$\mu(p) = \alpha - \beta p, \quad (\beta > 0) \tag{2}$$

여기서 α는 잠재적인 시장의 크기를 나타내는 것으로 볼 수 있으며, β는 대여수요의 가격에 대한 탄력계수로 해석할 수 있을 것이다. 이와 같은 선형관계의 수요함수는 비록 간략하기는 하지만, McCardle et al.[11]에 의해 마케팅 분야의 연구에서 자주 사용되고 있다. 또한 어느 특정일의 대여수요가 해당 시점의 실제 보유재고를 초과할 경우에는, 초과수요 단위당 s의 재고부족 비용이 발생한다. 반대로 대여수요가 해당시점의 실제 보유재고의 수준에 미치지 못하여 잉여 제품을 보관하여야 할 경우에는, 단위기간동안 제품 당 h의 재고유지 비용이 발생한다고 한다.

위와 같은 상황 속에서 소매 대여업체는 자신의 기대이익을 최대화하기 위해서 대여영업기간 동안인 T-기간 동안 대여가격 p를 어느 수준으로 결정해야 하는지, 또한 주문량 I_0는 어느 수준으로 해야 하는지를 결정하여야 한다. 본 연구에서는 이와 같은 상황에서 수입공유의 사업모형을 채용한다는 전제 하에, 소매 대여업체 뿐만 아니라 제조/도매업체의 입장까지도 함께 고려하여 공급사슬 전체의 이익을 최대화하는 수입공유모형의 조건을 찾고, 이로부터 양자에게 수입공유에 대한 유인부합성이 함께 부여되는 조건을 찾게 될 것이다.

3.2 소매 대여업체와 제조/도매업체의 이익모형

Tang and Deo[14]는 소매 대여업체의 입장에서 최적의 구매량과 최적대여가격을 결정하기 위한 모형을 제시하였다. 본 연구에서는 그들의 연구결과를 공급사슬 전체에 대한 모형으로 확장하기 위해서 그들이 도출한 결과를 요약하여 보기로 하자. 먼저 소매 대여업체의 입장에서 제품을 I_0만큼 주문하고 재고유지비용 h와 재고부족 비용 s를 감안하였을 때, 제품의 단위당 구입가격 c를 포함한 제비용은 다음과 같이 표현된다.

$$TC(I_0) = c \cdot I_0 + \sum_{t=1}^{T} [(h \times E([I_t]^+) + (s \times E([I_t]^-)] \quad (3)$$

식 (3)을 이용하여 소매 대여업체의 최적주문량 I_0*는 다음과 같다(이하 식 (4)~식 (8)의 유도 과정은 <부록> 참조).

$$I_0^* = \mu n_1(\tau) + z^* \sigma n_2(\tau) \quad (4)$$

$z^* = \Phi^{-1}\left(\frac{s - \frac{c}{T}}{h+s}\right)$이고 Φ는 정규분포의 확률분포함수(probability distribution function)이다. 그리고 $n_1(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{T}(1-l_i)$이고, $n_2(\tau) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{T}(1-l_i)^2}$ 이다. 또한 l_i는 대출 시점으로부터 기산하여 이후 1, 2, ⋯, i기간에 이르는 동안에 반납된 해당 제품의 누적비율을 뜻한다. 이 주문량에 상응하는 최적의 비용함수는 다음과 같다.

$$TC(I_0^*) = c \cdot \mu(p) n_1(\tau) + T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau) \quad (5)$$

여기서 $\phi(\cdot)$은 표준화 정규분포의 확률밀도함수(probability density function)를 나타낸다. 그리고 소매 대여업체의 이익 π_R은 식 (6)과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \pi_R &= Tp\mu(p) - TC(I_o^*) \\ &= (Tp - cn_1(\tau))(\alpha - \beta p) - T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

궁극적으로 소매 대여업체의 입장에서 이익을 극대화하는 가격 p^*와 이에 상응하는 극대화된 이익 π_R^*은 각각 다음과 같다.

$$p^* = \frac{T\alpha + \beta c n_1(\tau)}{2T\beta} \quad (7)$$

$$\pi_R^* = \frac{(T\alpha - \beta c n_1(\tau))^2}{4T\beta} - T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau) \quad (8)$$

다음에는 본 연구의 목적인 공급사슬 전체의 입장에서의 이익극대화를 성취하기 위하여, 소매 대여업체 뿐만 아니라 제조/도매업체의 상황은 어떻게 정리되는지 살펴보기로 하자. 제조/도매업체의 경우는 시장가격을 스스로 결정할 수 있는 상황이 아니므로, 앞에서 가정한대로 해당 대여제품에 대해 정해진 원가 m과 소매 대여업체에의 판매가격 c에 의해 간략하게 이익함수 π_W가 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \pi_W &= (c-m) I_0^* \\ &= (c-m)[\mu(p^*)n_1(\tau) + z^* \sigma n_2(\tau)] \end{aligned} \quad (9)$$

이제까지는 두 업체가 수입공유를 하지 않고 각각 영업을 할 때의 경우이므로, 수입공유모형을 적용하는 경우에는 위의 결과들이 어떻게 달라지는지 알아보기로 하자. 우선 두 업체 간의 수입공유는 다음과 같은 형태로 이루어진다. 즉 소매 대여업체는 구입하는 제품 단위당 c의 구매가격 대신 제조/도매업체에게 $k_1 c(0 < k_1 \le 1)$의 구매가격을 지불한다. 그 대신 소매 대여업체는 자신이 대여하는 각 제품에 대하여, 자신이 결정하는 대여가격의 일정비율 만큼만 자신의 이익으로 계상하고 잔여분은 제조/도매업체에게 양도를 한다. 즉, 소매 대여업체는 대여가격 p에 대하여 $k_2 p(0 < k_2 \le 1)$ 부분은 자신의 수입으로 하지만, $(1-k_2)p$ 부분은 제조/도매업체에게 양도를 한다는 것이다.

이와 같이 수입공유모형을 적용할 경우, 앞의 식 (4)~식 (6)에서 표현된 값들은 다음과 같이 수정되어 나타나게 된다.

$$\hat{I_0}^* = \mu(p^*)n_1(\tau) + \hat{z}^*\sigma n_2(\tau),$$

$$\hat{z}^* = \Phi^{-1}\left(\frac{s - k_1 c/T}{h+s}\right) \tag{10}$$

$$TC(\hat{I_0}^*) = k_1 c \cdot \mu(\hat{p}^*)n_1(\tau) + T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau) \tag{11}$$

여기서 $\hat{I_0}^*$의 경우 $0 < k_1 \leq 1$일 때, 식 (10)의 $\hat{z}^*$는 식 (4)의 z^*와 비교하여 $\hat{z}^* > z^*$이므로 $\hat{I_0}^* > I_0^*$임을 알 수 있다. 즉 수입공유모형을 적용하게 되면 소매 대여업체의 제품구매량은 수입공유를 하지 않는 경우에 비하여 증가하게 됨을 알 수 있다. 그리고 수입을 공유하는 경우의 소매 대여업체의 이익은 다음과 같이 나타난다(식 (12)~식 (13)의 유도과정은 <부록> 참조).

$$\begin{aligned}\hat{\pi_R} &= T\,k_2\hat{p}\,\mu(\hat{p}) - TC\,(\hat{I_o}^*) \qquad (12)\\ &= (Tk_2\hat{p} - k_1 c n_1(\tau))(\alpha - \beta\hat{p}) \\ &\quad - T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)\end{aligned}$$

이를 최적화하는 최적대여가격 $\hat{p}^*$는 다음과 같다.

$$\hat{p}^* = \frac{T\alpha + \beta c\, n_1(\tau)\dfrac{k_1}{k_2}}{2T\beta} \tag{13}$$

[Proposition 1] $\hat{p}^*$는 k_1이 커짐에 따라 커지고, k_2가 커짐에 따라 작아진다.
[증명] 식 (13)에 의해 자명하다. ■

[Proposition 1]은 소매 대여업체의 입장에서 볼 때 제품의 구매원가인 k_1c가 저렴할수록, 또한 대여수입 중 자신이 점유하는 비율이 커질수록 최적대여가격을 인하하려는 유인(incentive)이 강해진다고 하는 것이다. 식 (13)에 나타난 $\hat{p}^*$를 식 (12)에 대입하여 정리하면 소매 대여업체의 극대화된 이익이 아래와 같이 수정되어 표현된다.

$$\hat{\pi_R}^* = \frac{(T\alpha k_2 - \beta c\, n_1(\tau)k_1)^2}{4T\beta k_2} - T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau) \tag{14}$$

이 때 제조/도매업체의 이익은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\hat{\pi_W} = (T(1-k_2)\hat{p}^*)(\alpha - \beta\hat{p}^*) + (k_1 c - m)((\alpha - \beta\hat{p}^*)n_1(\tau) + \hat{z}^*\sigma n_2(\tau)) \tag{15}$$

여기서 $\hat{z}^* = \Phi^{-1}\left(\dfrac{s - k_1\frac{c}{T}}{h+s}\right)$이다. 따라서 두 업체의 이익을 합한 공급사슬 전체의 이익 $\hat{\pi_T}$는 아래와 같이 나타나게 된다.

$$\begin{aligned}\hat{\pi_T} &= \hat{\pi_R}^* + \hat{\pi_W} \qquad (16)\\ &= T\hat{p}^*(\alpha - \beta\hat{p}^*) - m(\alpha - \beta\hat{p}^*)n_1(\tau) \\ &\quad + (k_1 c - m)\hat{z}^*\sigma n_2(\tau) - T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)\end{aligned}$$

이상과 같은 논의에 바탕을 두고 공급사슬 전체의 이익 $\hat{\pi_T}$를 극대화하는 수입공유의 조건은 다음의 [정리 1]에 의해서 마무리된다.

[정리 1] 제조/도매업체는 단위당 m의 원가가 발생하는 제품을 소매 대여업체에 $k_1c\ (0 < k_1 \leq 1)$의 가격으로 공급하고, 소매 대여업체는 단위당 대여가격이 p인 제품이 대여될 때마다 $(1-k_2)p\ (0 < k_2 \leq 1)$만큼의 수입을 제조/도매업체에게 양도하는 수입공유모형에서, 공급사슬 전체의 이익은 수입공유 비율의 크기가 각각 $k_1 = \dfrac{m}{c}$이고 $k_2 = 1$일 때 극대화된다(증명은 <부록> 참조).

[정리 1]은 대여업 공급사슬 전체의 이익이 극대화되기 위해서는 우선 제조/도매업체는 소매 대여업체에게 제품을 제조/취득원가로 공급하여야 한다는 것을 나타내고 있다. 그리고 소매 대여업체는 이러한 상황에서 자신의 이익이 극대화되도록 대여가격을 책정하고, 이로 인해 발생하는 수입전체를 자신이 독점하도록 해야 한다는 것을 뜻한다. 이는 공급사슬이 소매 대여업체를 중심으로 일종의 수직계열화 내지는 수직적 통합화(vertical integration)되

는 것과 같은 효과를 나타내는 수입배분 구조를 가질 때, 공급사슬 전체의 이익이 최대화될 수 있음을 말해주는 것이다. 이러한 결론이 도출되는 배경은, 제조/도매 업체가 대여 소매업체에게 제품 구매비용에 대한 부담을 최대한 덜게 하고, 비교적 가장 자유로운 상태에서 대여가격을 결정하도록 하는 메커니즘에 기인하는 것이라고 해석된다. 또한 이 상황에서 소매 대여업체가 책정하는 최적가격은 수입공유를 하지 않는 경우에 소매 대여업체가 책정하는 최적가격보다 저렴하게 된다는 것도 다음에 의해 분명하다.

[따름정리 1] 수입공유를 통해 공급사슬전체의 이익을 극대화하고자 하는 경우의 대여가격 $\hat{p}^*$는, $k_2 > k_1$의 조건이 성립한다면 수입공유를 하지 않는 경우에 소매 대여업체가 책정하는 최적가격 p^*보다 낮다.
[증명] 식 (7)과 식 (13)를 비교하면 명백하다. ■

따라서 공급사슬 전체의 이익이 극대화되는 조건인 $k_1 = \frac{m}{c}$이고 $k_2 = 1$이라는 것은 $k_1 < k_2$를 만족시키므로 이때의 최적대여가격은 수입공유를 하지 않을 때의 대여가격에 비하여 낮아지게 된다.

그러나 실질적으로 수직계열화 되어 있지 않은 두 업체가 [정리 1]에서 요약한 것처럼 일방(제조/도매업체)의 손해를 강요하면서 수입공유의 사업모형을 운영하는 것은 불가능한 일이다. 수입공유의 사업모형이 의미가 있기 위해서는, 수입공유를 한 결과가 수입공유를 하지 않았을 경우보다 두 업체 모두에게 유리한 결과를 보장해 주어야 한다. 즉 [정의 1]에서 묘사하고 있는 바와 같은, 제조/도매업체와 소매 대여업체 각각에게 수입공유모형에 대한 유인부합성(incentive compatibility)이 생길 수 있도록 하여야 할 것이다. 따라서 수입을 공유하는 상황을 조정할 수 있는 두 가지 도구인 비율 k_1과 k_2를, 극단적인 수직계열화를 의미하는 [정리 1]의 조건에 의한 값으로부터 변경시켜서 유인부합성이 가능하도록 하는 새로운 영역의 값으로 찾아낼 필요가 있다.

[정의 1] 수입을 공유하는 사업모형에서 $\widehat{\pi_R}^* > \pi_R^*$이면, 공급사슬의 소매 대여업체에게 유인부합성(incentive compatibility)이 있다고 한다. 또한 $\widehat{\pi_W} > \pi_W$가 성립하면 제조/도매업체에게 유인부합성이 있다고 한다.

[정의 1]에 기초하여 이제부터의 주된 관심사는 과연 소매 대여업체와 제조/도매업체 각각에게 유인부합성이 있는 수입공유모형이 존재할 수 있는지, 또한 양자에게 유인부합성이 있는 경우의 최적대여가격이 대여소비자들에게도 득이 될 수 있는지를 분석하여 보는 것이다. 먼저 유인부합성이 있는 수입공유모형의 경우에 해당하는 최적대여가격 $\hat{p}^*$가 수입공유를 하지 않는 경우의 최적대여가격 p^*와 비교하여 낮은지 여부를 분석하기로 하자.

[Proposition 2] 단위기간동안의 대여수요를 나타내는 $\widetilde{D}_t$가 평균이 $\widetilde{\mu}_t$이고 분산이 $\widetilde{\sigma}_t^2$인 정규분포를 한다고 하자. 표준화 정규확률밀도함수를 $\phi(\cdot)$라고 한다면 다음의 관계가 성립한다(증명은 <부록> 참조).

$$T(h+s)\widetilde{\sigma}_t\phi(z^*) - cz^*\widetilde{\sigma}_t \geq 0, \tag{17}$$

유인부합성이 있는 경우의 최적대여가격의 특성에 관해서는 다음과 같은 [정리 2]로 요약할 수 있으며, 이는 [Proposition 2]를 활용하여 증명이 가능하다.

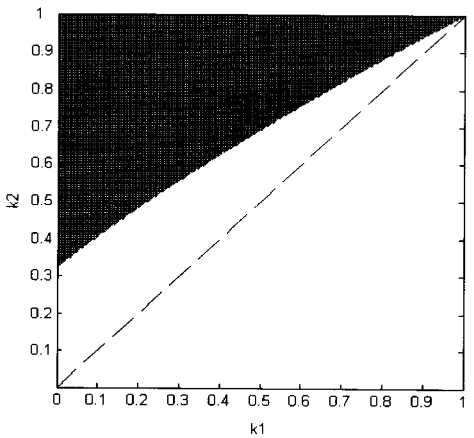
[정리 2] 수입공유를 하지 않는 상황에서 최적이익인 π_R^*가 $\pi_R^* > 0$인 소매 대여업체의 입장에서, 유인부합성이 있는 수입공유를 하는 경우의 최적대여가격 $\hat{p}^*$은, 수입공유가 이루어지지 않는 경우의 최적대여가격 p^*보다 낮다(증명은 <부록> 참조).

다음에는 소매 대여업체에게 유인부합성이 있도

록 한다는 전제하에서, 주어진 k_1 값에 대한 k_2 값의 하한(lower bound)의 특성에 대하여 탐구하여 보도록 한다.

[따름정리 2] 소매 대여업체에게 유인부합성이 있도록 한다는 전제하에서, 주어진 k_1 값에 대한 k_2 값의 하한은 k_1의 단조증가함수(monotone increasing function)이다(증명은 <부록> 참조).

이상의 논의에 기초하여 수입공유를 하는 경우에 소매 대여업체에게 유인부합성이 있는 k_1과 k_2의 존재 범위를 유추하는 것이 가능하다. [그림 1]은 $\alpha=100$, $\beta=10$이며, 제조원가인 m이 40이고 원래의 구매가격인 c가 80, 그리고 단위당 재고부족비용 s가 5, 단위기간동안의 재고유지비용 h가 0.10, 수요의 평균인 μ가 33.3, 수요변동의 표준편차인 σ가 15, 그리고 사업기간인 T가 60, 대여기간인 τ가 4인 대여산업의 경우에 소매 대여업체에게 유인부합성이 존재하는 k_1과 k_2의 영역을 나타내고 있다. 즉 해당 그림에서 음영으로 표시된 부분은 유인부합성이 존재하는 k_1과 k_2의 조합을 나타낸다. [그림 1]을 보면, 소매 대여업체에게 유인부합성을 부여하기 위해 이제까지 분석한 내용들이 그대로 반영되어 있음을 볼 수 있다.



[그림 1] 소매 대여업체에게 유인부합성이 존재하는 수입공유비율의 영역

다음에는 제조/도매업체에게 유인부합성이 있는 k_1과 k_2의 영역에 관하여 알아보기로 하자. 먼저 가장 단순한 경우라고 할 수 있는 $k_1=k_2=\frac{m}{c}$의 경우를 보면 $(\widehat{\pi_W}-\pi_W)$는 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}\widehat{\pi_W}-\pi_W &= \frac{c-m}{c}\frac{(T\alpha)^2-(\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta} \\ &\quad -(c-m)[(\frac{T\alpha-\beta cn_1(\tau)}{2T})n_1(\tau)+z^*\sigma n_2(\tau)] \\ &= \frac{c-m}{c}[\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-cz^*\sigma n_2(\tau)] \\ &\geq \frac{c-m}{c}[\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta} \\ &\quad -T(h+s)\pi(z^*)\sigma n_2(\tau)]=\frac{c-m}{c}\pi^*_R>0\end{aligned} \tag{18}$$

즉 $k_1=k_2=\frac{m}{c}$인 경우 제조/도매업체에게 수입공유는 유인부합성이 있다고 하는 것이다. 이를 바탕으로 다음의 사실이 유도된다.

[Proposition 3] $k_1=k_2\geq\frac{m}{c}$인 경우에 수입공유모형은 제조/도매업체에게 유인부합성이 있다.

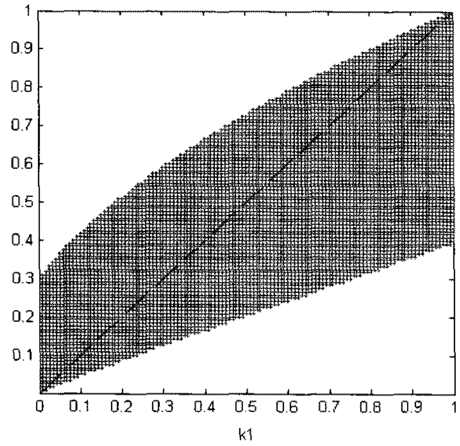
[증명] $k_1=k_2=\frac{m}{c}$인 경우는 앞부분의 논의에 의해 자명하다. $k_1=k_2>\frac{m}{c}$의 경우를 위한 증명은 부록을 참조하기로 한다. ■

앞에서 제시한 [Proposition 2]와 [Proposition 3]에 바탕을 두고 궁극적으로 다음의 사실이 증명된다.

[Proposition 4] $z^*\geq\frac{4T\beta c\sigma n_2(\tau)}{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}$의 조건이 성립한다면 $0<k_1=k_2<1$인 모든 경우에 수입공유모형은 제조/도매업체에게 유인부합성이 있다(증명은 <부록> 참조).

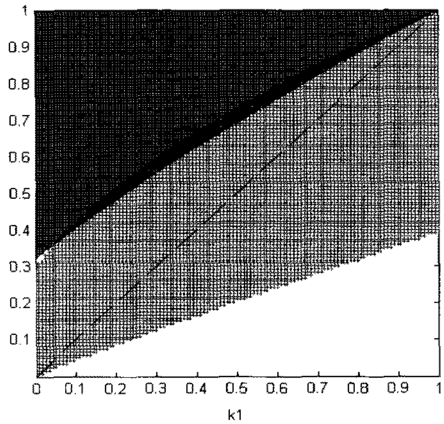
[Proposition 2]~[Proposition 4]의 논의로부터 제조/도매업체에게 수입공유에의 유인부합성이 있도록

하는 k_1과 k_2의 존재 범위를 유추하는 것이 가능하다. 즉 $k_1 = k_2 = \frac{m}{c}$인 경우에 $(\widehat{\pi_W} - \pi_W) \geq \frac{c-m}{c}\pi_R^*$ >0이므로, $k_1 = \frac{m}{c}$인 상황에서 충분히 작은 $\delta(\delta>0)$에 대하여 $k_2 = \frac{m}{c} \pm \delta$의 경우도 유인부합성이 존재할 것이다. 이와 유사한 논리로 $0<k_1<1$인 어떠한 k_1에 대해서도 $(\widehat{\pi_W} - \pi_W) >0$가 성립하는 것을 알고 있으므로, 충분히 작은 $\delta'(\delta'>0)$에 대하여 $k_2 = k_1 \pm \delta'$의 값들은 유인부합성이 있다고 보아야 한다. 결론적으로 제조/도매업체에게 유인부합성이 있는 (k_1, k_2)의 영역은 [그림 2]와 같은 형태로 나타나게 된다.



[그림 2] 제조/도매업체에게 유인부합성이 존재하는 수입공유비율의 영역

소매 대여업체와 제조/도매업체 양자에게 동시에 수입공유에의 유인이 존재하는, 즉 [그림 1]과 [그림 2]의 영역이 겹치는 (k_1, k_2)의 영역은 [그림 3]에 표시되어 있다. 여기서 [그림 3]에 나타난 k_1과 k_2의 전 영역이 $k_2 > k_1$의 조건을 만족함으로써, $\widehat{p^*} < p^*$의 조건을 아울러 충족시키고 있음을 볼 수 있다. 이는 [정리 2]에서 증명한 것처럼, 양자에게 동시에 유인부합성이 존재하는 k_1과 k_2의 모든 조합에 대하여, 소비자 역시 수입공유가 없는 경우에 비해 보다 싼 가격으로 해당 제품을 대여 받을 수 있게 되어서 이득을 보게 됨을 의미한다. 즉 시장에 참가하는 모든 당사자가 수입공유에 의해 수혜를 볼 수 있음을 나타낸다.



[그림 3] 양 자에게 유인부합성이 존재하는 수입공유비율의 영역

보다 정확하게 상황을 이해하기 위하여 주어진 사례의 구체적인 예를 보기로 하자. 먼저 주어진 자료를 근거로 제조/도매업체와 대여 소매업체가 각각 독립적인 영업을 할 경우에 일어나는 상황을 보면, 대여 소매업체의 최적주문량은 95단위가 되고, 최적 대여가격은 단위당 6.67이 된다. 그리고 이 때 공급사슬 전체가 성취하게 되는 상응하는 이익은 8,357이 되며, 대여 소매업체와 제조/도매업체의 이익은 각각 4,547과 3,810정도가 된다. 하지만 두 업체가 수입공유를 하게 되면 상황은 매우 달라진다. 우선 $k_1 = \frac{m}{c} = 0.5$와 $k_2 = 1$로 계약을 하게 되면 [정리 1]에서 규명한 바와 같이, 공급사슬 전체의 이익은 8,949가 되어 어떠한 (k_1, k_2)의 조합보다 커지게 된다. 하지만 제조/도매업체의 이익은 0이 되면서, 모든 이익을 대여 소매업체가 독차지하게 되어 유인부합성이 사라지게 된다. 만약 두 업체 모두에게 유인부합성이 생기는 (k_1, k_2)의 조합 중 하나인 $k_1 = 0.5$와 $k_2 = 0.7$로 계약을 설정하게 되면, 소매 대여업체는 대여수입의 30%를 제조/도매업체에게 양도하는 조건으로 단위당 제품의 구입가격을 50% 할인된 40으

로 공급받게 된다. 그 결과로 소매 대여업체는 116 단위로 최적주문량이 증가하게 되고, 최적대여가격도 단위당 6.19로 하락하게 된다. 이로 인해 공급사슬 전체가 성취하게 되는 이익은 8,873으로 늘어나며, 대여 소매업체와 제조/도매업체의 이익은 각각 4,628과 4,245 수준으로 증가하게 되어서, 독립적으로 영업을 하는 경우보다 수입공유를 하는 경우에 두 업체 모두 추가된 이익을 획득할 수 있음을 알 수 있다.

3.3 수입공유모형의 사례

서론 부분에서 지적한 바와 같이, 수입공유모형이 커다란 반향을 일으킨 대여산업의 대표적인 예는 비디오 대여산업이다. 비디오 대여산업은 2000년대의 초반부터 본격화되기 시작한 VOD(Video On Demand) 서비스의 영향으로 시장이 점차 축소되고 있었다. 이러한 상황이 야기된 배경에는 물론 다양한 원인이 있겠으나, 가장 주된 요인으로 지적된 것은 VOD 서비스의 기술적인 편리함 보다는 기존의 비디오 대여업체가 충분한 재고를 보유하지 못함으로써, 고객 서비스에 심각한 차질을 초래하였다고 하는 것이다. 또한 상대적으로 높은 대여가격으로 인해 가격 경쟁력 측면에서도 불리한 입장이었다. 이에 대해 Kadlec et al.[10]은 대표적인 대여업체인 블록버스터가 약 20% 정도의 이익 감소를 겪고 있었으며, 이로 인해 Viacom같은 제조/도매업체들도 덩달아 커다란 어려움에 봉착하였음을 보도하였다.

그러나 이들 업체들이 수입공유모형을 도입하기 시작한 이 후에는 다음과 같은 주요한 변화들이 일어나면서 상황은 역전되기 시작하였다. 블록버스터의 예를 보면, 대여수입의 40%를 제조/도매업체에게 양도하는 조건으로 단위당 제품의 구매 가격을 65달러에서 6달러 수준으로 할인받게 되었다. 그 결과로 소매 대여업체인 블록버스터는 이전의 세 배에 해당하는 재고를 보유하는 것이 가능하게 되었고, 이는 고객들이 주말의 성수기간에도 원하는 비디오를 거의 틀림없이 확보할 수 있도록 하는 고객 서비스의 극적인 향상으로 이어졌다. 또한 대여가격도 기타 경쟁업체에 비하여 평균 1달러 정도 저렴하게 책정을 할 수 있게 되어, 이로 인해 시장점유율이 25%에서 40%를 상회하는 수준으로 증가하였고, 아울러 대여수입은 75% 정도 신장되어 현금흐름이 61% 가량 개선되는 경험을 하게 되었다. 결과적으로 제조/도매업체와 블록버스터의 주가는 과거에 비해 큰 폭으로 상승하여, 수입공유모형의 적용이 해당 공급사슬 전체에 걸쳐서 긍정적인 영향을 미쳤음을 증명하였다. 또한 고객들 역시 하락한 대여가격과 고객 서비스의 향상으로 인해 직접적으로 그 덕을 보았음이 분명해졌다.

5. 결 론

본 연구에서는, 제조/도매업체와 소매 대여업체의 두 단계로 이루어져 있으며 시장을 독점하고 있고 수입공유모형을 적용하는 대여산업의 경우에, 대여산업 공급사슬 전체의 이익을 극대화하는 수입공유의 조건을 찾아보았다. 즉 소매 대여업체는 제품 단위당 c의 구매가격 대신 제조/도매업체에게 $k_1 c(0 < k_1 \le 1)$의 구매가격을 지불하고, 대신 소매 대여업체는 자신이 대여하는 각 제품에 대하여, 대여가격이 p일 때 $(1-k_2)p(0<k_2 \le 1)$ 부분은 제조/도매업체에게 양도를 하여 수입을 공유하는 경우를 살펴보았다.

그 결과 제조/도매업체는 제품을 생산원가로 소매대여업체에게 공급함으로써, 소매 대여업체로 하여금 대여가격을 결정할 때의 자유도를 최대한 높이도록 하고, 발생하는 모든 대여수입은 소매 대여업체가 점유하도록 하는 수직통합형태의 수입공유가 공급사슬 전체 측면에서의 이익을 극대화할 수 있음을 밝혀냈다. 그러나 이러한 경우는 제조/도매업체의 입장에서 볼 때 받아들일 수가 없는 조건이므로, 공급사슬에 참가하는 양자가 모두 이익의 증대를 이루어낼 수 있는, 유인부합성이 있는 수입공유의 조건이 존재할 수 있는지를 조사하여 보았다.

결론적으로 양자에게 유인부합성이 동시에 존재

하는 수입공유의 조건이, 수입공유 비율인 k_1과 k_2의 조합으로 시장 상황에 따라 존재할 수 있음을 살펴보았다. 더군다나 이처럼 유인부합성이 존재하는 k_1과 k_2의 조합은 예외 없이 대여가격의 인하를 초래하게 되어 대여소비자에게도 득이 됨으로서, 시장에 참가하는 모든 구성원들의 효용을 증가시키게 됨을 볼 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Bell, D., T. Ho, and C. Tang, "Determining Where to Shop : Fixed and Variable Costs of Shopping," *Journal of Marketing Research*, Vol.35(1998), pp.352-369.

[2] Bernstein, F. and A. Federgruen, "Pricing and Replenishment Strategies in a Distribution System with Competing Retailers," working paper, Department of Economics, Columbia University, 1999.

[3] Cachon, G. and M. Lariviere, "Supply Chain Coordination with Revenue Sharing Contracts : Strengths and Limitations," *Management Science*, Vol.51(2004), pp.30-44.

[4] Carlton, D.W., "Market Behavior with Demand Uncertainty and Price Inflexibility," *American Economic Review*, Vol.68(1978), pp.571-587.

[5] Chen, Y., "Oligopoly Price Determination and Resale Price Maintenance," *RAND Journal of Economics*, Vol.30(1999). pp.441-455.

[6] Dada, M. and N. Petruzzi, "Pricing and the Newsvendor Problem," *Operations Research*, Vol.47(1999), pp.183-194.

[7] Dana, J., "Competition in Price and Availability when Availability is Unobservable," *RAND Journal of Economics*, Vol.32(2001), pp.497-513.

[8] Dana, J. and K. Spier, "Revenue Sharing and Vertical Control in the Video Rental Industry," *Journal of Industrial Economics*, Vol. 59(2001), pp.223-245.

[9] Furman, P., "At Blockbuster Video, A Fast Fix Moves Flicks," *Daily News*, July 27, 1998.

[10] Kadlec, D. and A. Keith, "How Blockbuster Changed the Rules," *TIME*, August 3, 2003.

[11] McCardle, K., K. Rajaram, and C. Tang, "Advance Booking Discount Programs under Retail Competition," *Management Science*, Vol. 50(2004), pp.701-708.

[12] Mortimer, J., "Vertical Contracts in the Video Rental Industry," working paper, Department of Economics, Harvard University, 2004.

[13] Silver, E.A., D.F. Pyke, and R. Peterson, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3rd. ed., John Wiley, 1998.

[14] Tang, C.S. and S. Deo, "Rental Duration and Rental Price under Retail Competition," *European Journal of Operational Research*, Vol. 187(2008), pp.806-828.

[15] Varian, H., "Buying, Sharing, and Renting Information Goods," *Journal of Industrial Economics*, Vol.48(2000), pp.473-488.

〈부 록〉

1. 식 (4)~(8)의 유도 과정

t-시점에 대여되어 나가는 제품의 수인 D_t는 평균이 $\mu(p)$인 정규분포를 따른다. 그리고 t-시점에 제품을 대여한 각 고객은 이후 $(t+1)$시점부터 시작하여 $(t+\tau)$시점까지의 기간에 해당 제품을 반납하여야 한다. 이 때 D_t중에서 $(t+1)$시점부터 $(t+i)$시점까지 반납된 제품의 수를 $l_i D_t$로 표기하기로 하자. 즉 l_i는 대출 시점으로부터 기산하여 이후 1, 2, ⋯, i기간에 이르는 동안에 반납된 해당 제품의 누적비율을 뜻한다. 그리고 이 비율은 해당 제품의 대여 시점에 관계없이, 대여일로부터의 경과기간인 i에 의해서만 영향을 받고 $0 \le l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_\tau$의 관계를 가정하기로 한다. 따라서 $(t-i)$시점에 대여되었으나, t-시점까지 아직 반납되지 않은 제품의 수는 다음과 같이 표현될 수 있을 것이다.

$$(1-l_i)D_{t-i} \quad (i<\tau)$$

요약하면 t-시점의 재고수준 I_t는 반납 마감기한인 τ-시점 이전까지는 다음과 같이 나타나게 된다. 여기서 I_0는 해당 제품의 구매량을 나타낸다.

$$I_t = I_0 - (D_t + \sum_{i=1}^{t-1}(1-l_i)D_{t-i}), \quad t=1,\ 2, \cdots,\ \tau.$$

마찬가지로 반납 마감기한인 τ 이후의 시점에 대해서는 I_t는 다음과 같이 나타나게 된다.

$$I_t = I_0 - (D_t + \sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)D_{t-i}),$$
$$t = \tau+1,\ \tau+2,\ \cdots,\ T.$$

이 때 표현의 간략화를 위하여 t-시점에 업체 외부로 대여의 형태로 빠져나가 있는 대여 제품의 총괄 숫자인 $D_t + \sum_{i=1}^{t-1}(1-l_i)D_{t-i}$와 $D_t + \sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)D_{t-i}$를 각각

$$\widehat{D}_t = D_t + \sum_{i=1}^{t-1}(1-l_i)D_{t-i}, \quad t=1, 2, \cdots, \tau.$$

$$\widehat{D}_\tau = D_t + \sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)D_{t-i}, \quad t = \tau+1, \tau+2, \cdots, T.$$

로 나타내기로 하자. 그리하면 t-시점의 재고수준 I_t는 각각 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$I_t = \begin{cases} I_0 - \widehat{D}_t, & t=1, 2, \cdots, \tau. \\ I_0 - \widehat{D}_\tau, & t=\tau+1, \tau+2, \cdots, T. \end{cases}$$

따라서 소매 대여업체의 입장에서 제품을 I_0만큼 주문하고 재고유지비용 h와 재고부족 비용 s를 감안하였을 때, 제품의 단위당 구매가격 c를 포함한 제비용은 다음과 같이 표현될 수 있을 것이다.

$$TC(I_0) = c \cdot I_0 + \sum_{t=1}^{T}[(h \times E([I_t]^+) + (s \times E([I_t]^-)]$$

여기서 $\widehat{D}_t$는 평균이 $\widehat{\mu}_t = E(\widehat{D}_t) = \mu n_1(t)$이고 표준편차가 $\widehat{\sigma}_t = \sqrt{Var(\widehat{D}_t)} = \sigma n_2(t)$인 정규분포를 한다. 이 때 $n_1(t) = 1 + \sum_{i=1}^{t-1}(1-l_i)$이고, $n_2(t) = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{t-1}(1-l_i)^2}$이다. 마찬가지로 $\widehat{D}_\tau$는 평균이 $\widehat{\mu}_\tau = E(\widehat{D}_\tau) = \mu n_1(\tau)$이고 표준편차가 $\widehat{\sigma}_\tau = \sqrt{Var(\widehat{D}_\tau)} = \sigma n_2(\tau)$인 정규분포를 한다. 이 때 $n_1(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)$이고, $n_2(\tau) = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{\tau}(1-l_i)^2}$이다. 이를 이용하여 Tang and Deo[14]는 소매 대여업체의 최적주문량 I_0^*가 다음과 같음을 증명하였다.

$$I_0^* = \mu n_1(\tau) + z^* \sigma n_2(\tau)$$

여기서 $z^* = \Phi^{-1}\left(\frac{s-\frac{c}{T}}{h+s}\right)$이고 Φ는 정규분포의 확률분포함수이다. 또한 이 주문량에 상응하는 최적의 비용함수를 다음과 같이 유도해내었다.

$$TC(I_0^*) = c \cdot \mu(p)n_1(\tau) + T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)$$

여기서 $\phi(\cdot)$은 표준화 정규분포의 확률밀도함수를 나타낸다. 이를 바탕으로 소매 대여업체의 이익 π_R은 식 (6)과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned}\pi_R &= Tp\mu(p) - TC(I_o^*)\\ &= (Tp - cn_1(\tau))(\alpha - \beta p) - T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)\end{aligned}$$

이 식에 대하여 1차 조건을 적용함으로써 소매 대여업체의 입장에서 이익을 극대화하는 가격 p^*를 구할 수 있으며, 상응하는 극대화된 이익 $\pi_R{}^*$은 다음과 같이 나타나게 된다.

$$p^* = \frac{T\alpha + \beta c n_1(\tau)}{2T\beta}$$

$$\pi_R{}^* = \frac{(T\alpha - \beta c n_1(\tau))^2}{4T\beta} - T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)$$

2. 식 (12)~식 (13)의 유도 과정

제조/도매업체와 수입을 공유하는 경우의 소매 대여업체의 이익은 다음과 같이 나타난다. 먼저 대여가격이 $\hat{p}$인 경우 단위기간 당 대여수입은 $\hat{p}\cdot\mu(\hat{p})$으로 표현된다. 이 중에서 소매 대여업체가 차지하는 부분은 수입공유계약에 의해 $k_2\cdot\hat{p}\cdot\mu(\hat{p})$가 된다. 그리고 이러한 상태로 대여영업이 T-기간 동안 지속되므로 소매 대여업체의 총 대여수입은 $T\cdot k_2\cdot\hat{p}\cdot\mu(\hat{p})$이 된다. 따라서 주문량이 $\hat{I}_0{}^*$일 때의 소매 대여업체의 이익 $\hat{\pi}_R$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_R &= Tk_2\hat{p}\mu(\hat{p}) - TC(\hat{I}_o{}^*)\\ &= (Tk_2\hat{p} - k_1cn_1(\tau))(\alpha - \beta\hat{p})\\ &\quad - T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)\end{aligned}$$

그리고 이를 최적화하는 최적대여가격 $\hat{p}^*$는 식 (12)를 $\hat{p}$로 미분하여 1차 조건을 적용함으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{p}^* = \frac{T\alpha + \beta c n_1(\tau)\dfrac{k_1}{k_2}}{2T\beta}$$

3. [정리 1]의 증명

식 (16)에 대해 먼저 k_2로 편미분하여 1차 조건을 구하면 $k_1c\cdot\frac{1}{k_2} - m = 0$의 조건을 구하게 된다. 이는 $k_2 = k_1\cdot\frac{c}{m}$로 정리가 되며, 이 값을 식 (16)에 대입한 후 다시 k_1으로 미분하여 다음의 식을 구하여 정리한다.

$$\frac{\partial\hat{\pi}_T}{\partial k_1} = (k_1c - m)\left(\frac{1}{\phi(\hat{z}^*)}\cdot\frac{c}{T(h+s)}\sigma n_2(\tau)\right) = 0$$

이는 $k_1c = m$ 또는 $k_1 = \frac{m}{c}$로 요약되며, 결국 $k_2 = k_1\frac{c}{m} = \frac{m}{c}\cdot\frac{c}{m} = 1$로 나타난다. ■

4. [Proposition 2]의 증명

해당 사업모형에서 소매 대여업체가 보유하고 있는 대여제품의 재고수준이 $I_0{}^*$인 경우에 발생하는 단위기간동안의 재고유지비용과 재고부족 비용의 합계인 $H_t(\cdot)$를 구해보자.

$$\begin{aligned}H_t(I_0^*) &= h\int_{-\infty}^{I_0^*}(I_0^* - \widetilde{D}_t)f(\widetilde{D}_t)d\widetilde{D}_t\\ &\quad + s\int_{I_0^*}^{\infty}(\widetilde{D}_t - I_0^*)f(\widetilde{D}_t)d\widetilde{D}_t\\ &= (h+s)\int_{I_0^*}^{\infty}(\widetilde{D}_t - I_0^*)f(\widetilde{D}_t)d\widetilde{D}_t + h(I_0^* - \widetilde{\mu}_t)\\ &= (h+s)\ \widetilde{\sigma}_t\int_{z^*}^{\infty}(z - z^*)\phi(z)dz + h(z^*\widetilde{\sigma}_t)\\ &= (h+s)\ \widetilde{\sigma}_t\left[\int_{z^*}^{\infty}z\phi(z)dz - \int_{z^*}^{\infty}z^*\phi(z)dz\right] + h(z^*\widetilde{\sigma}_t)\\ &= (h+s)\ \widetilde{\sigma}_t[\phi(z^*) - z^*(1 - \Phi(z^*))] + hz^*\widetilde{\sigma}_t\\ &= (h+s)\ \widetilde{\sigma}_t\left[\phi(z^*) - z^*\left(1 - \left(\frac{s - \frac{c}{T}}{h+s}\right)\right)\right] + hz^*\widetilde{\sigma}_t\\ &= (h+s)\ \widetilde{\sigma}_t\left[\phi(z^*) - z^*\left(\frac{h + \frac{c}{T}}{h+s}\right)\right] + hz^*\widetilde{\sigma}_t\\ &= (h+s)\ \widetilde{\sigma}_t\phi(z^*) - \left(h + \frac{c}{T}\right)z^*\widetilde{\sigma}_t) + hz^*\widetilde{\sigma}_t\end{aligned}$$

$$=(h+s)\tilde{\sigma}_t\phi(z^*)-\frac{c}{T}z^*\tilde{\sigma}_t$$

따라서 T-기간 동안의 관련 총 비용의 합계는 $T(h+s)\ \tilde{\sigma}_t\phi(z^*)-\ cz^*\tilde{\sigma}_t$로 나타나고, 해당 비용의 정의상 $T(h+s)\ \tilde{\sigma}_t\phi(z^*)-cz^*\tilde{\sigma}_t\geq 0$가 성립한다. ■

5. [정리 2]의 증명

식 (7)과 식 (13)에 의하여 $\hat{p}^*<p^*\Leftrightarrow k_2>k_1$이다. 따라서 수입공유의 비율들인 $0<k_1,\ k_2\leq 1$에 대하여 $k_1>k_2$인 경우 $\hat{\pi_R}^*\geq\pi_R^*$이 성립하지 않음을, 즉 $\hat{\pi_R}^*<\pi_R^*$이 됨을 증명하면 충분하다. 먼저 수입공유모형을 적용할 때 $0<k_1=k_2\leq 1$인 경우를 고려하여 보자. 이때의 소매 대여업체의 최적이익을 $\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}$라고 하고 표준화정규분포함수를 $\Phi(\cdot)$라고 하면,

$$\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}=k_1\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau),$$

$$\hat{z}^*=\Phi^{-1}\left(\frac{s-k_1\frac{c}{T}}{h+s}\right)\tag{A-1}$$

여기서 식 (A-1)이 k_1의 증가함수임을 보이면 $\hat{\pi}^*_{R(k_1=k_2)}<\pi_R^*$이 성립한다. 따라서 $\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}$를 k_1으로 미분하면,

$$\frac{d\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}}{dk_1}=\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}$$
$$-T(h+s)[(-\hat{z}^*)\phi(\hat{z}^*)\frac{1}{\phi(\hat{z}^*)}[\frac{-c}{T(h+s)}]\sigma n_2(\tau)$$
$$=\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-c\hat{z}^*\sigma n_2(\tau)$$

이때 [Proposition 2]에 의해,

$$\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-c\hat{z}^*\sigma n_2(\tau)\geq\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)$$

그리고 $z^*,\ \hat{z}^*\geq 0$이면서 $z^*\leq\hat{z}^*$일 때 $\phi(z^*)\geq\phi(\hat{z}^*)$이므로

$$\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)$$
$$\geq\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}-T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)=\pi_R^*$$

가정에 의해 $\pi_R^*>0$이므로 $\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}$는 k_1의 증가함수임이 분명하다.

다음에는 $k_1>k_2$일 때의 소매 대여업체의 최적이익이 $k_1=k_2$인 경우의 최적이익보다 작다는 것을 증명하여야 한다. 즉 $\hat{\pi}^*_{R,(k_1>k_2)}<\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}$임을 증명하고자 하며, 이를 위해 $\hat{\pi_R}^*$가 k_2의 증가함수임을 보이고자 한다.

$$\frac{d\hat{\pi}^*_R}{dk_2}=\frac{1}{4T\beta}[(T\alpha+\beta cn_1(\tau)(\frac{k_1}{k_2}))(T\alpha-\beta cn_1(\tau)(\frac{k_1}{k_2}))]$$

그런데 여기서 수입공유모형을 적용할 때의 대여수요의 평균 $\mu=\dfrac{T\alpha-\beta cn_1(\tau)(\frac{k_1}{k_2})}{2T}\geq 0$이기 때문에 $\dfrac{d\hat{\pi}^*_R}{dk_2}\geq 0$이 된다. 따라서 $\hat{\pi}^*_{R,(k_1>k_2)}<\hat{\pi}^*_{R,(k_1=k_2)}$가 성립한다. ■

6. [따름정리 2]의 증명

소매 대여업체에게 유인부합성을 보장하는 k_1과 k_2 값은 $\hat{\pi_R}^*(k_1,\ k_2)>\pi_R^*$을 만족하여야 한다. 이 관계를 수식으로 나타내면,

$$\frac{(T\alpha k_2-\beta cn_1(\tau)k_1)^2}{4T\beta k_2}-T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)$$
$$-\frac{(T\alpha-\beta cn_1(\tau))^2}{4T\beta}+T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau)>0$$

이 식을 k_2를 중심으로 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{T^2\alpha^2}{4T\beta}k_2^2-[\frac{2T\alpha\beta cn_1(\tau)k_1}{4T\beta}+\pi_R^*+T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)]k_2+\frac{(\beta cn_1(\tau)k_1)^2}{4T\beta}>0\tag{A-2}$$

식 (A-2)를 만족하는 k_2의 범위를 구하면

$$k_2 > \frac{\Omega + \sqrt{[\pi_R^* + T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)][\alpha c n_1(\tau)k_1 + \pi_R^* + T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)]}}{2T^2\alpha^2/4T\beta} \quad \text{(A-3)}$$

또는

$$k_2 < \frac{\Omega - \sqrt{[\pi_R^* + T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)][\alpha c n_1(\tau)k_1 + \pi_R^* + T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)]}}{2T^2\alpha^2/4T\beta} \quad \text{(A-4)}$$

여기서 $\Omega = \frac{2T\alpha\beta c n_1(\tau)k_1}{4T\beta} + \pi_R^* + T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)$ 이다.

이 때 식 (A-4)에 의한 k_2의 값의 상한을 $k_2(\Omega^-)$ 라고 한다면 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} k_2(\Omega^-) &< \frac{1}{2T^2\alpha^2/4T\beta}(\Omega - \pi_R^* - T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau)) \\ &= \frac{\beta c n_1(\tau)}{T\alpha}k_1 \end{aligned}$$

그런데 수입공유를 하는 경우의 소비자들의 대여수요의 평균이 0보다 커야한다는 $\mu > 0$의 조건으로부터 $k_2 > \frac{\beta c n_1(\tau)}{T\alpha}k_1$이므로 식 (A-4)의 결과는 배제되어야 한다. 따라서 식 (A-3)만이 의미 있는 k_2의 범위를 나타내며, 이 때 식 (A-3)을 만족하는 k_2의 하한은 명백하게 k_1의 단조증가함수이다. ■

7. [Proposition 3]의 증명

먼저 $k_1 = k_2 > \frac{m}{c}$인 경우에 $\widehat{\pi_W}$ 를 k_1에 의해 미분하여 정리한 결과를 $\Gamma(k_1)$이라 하면,

$$\Gamma(k_1) = \frac{d(\widehat{\pi_W})}{dk_1} = -\frac{(T\alpha - \beta c n_1(\tau))^2}{4T\beta} - (k_1 c - m)\left[\frac{c\sigma n_2(\tau)}{T(h+s)\phi(\hat{z}^*)}\right] \quad \text{(A-5)}$$

식 (A-5)는 $k_1 > \frac{m}{c}$이면 명백하게 음의 값을 가지고, 이것은 $\widehat{\pi_W}$가 $k_1 = k_2 > \frac{m}{c}$일 때 k_1의 단조감소함수임을 의미한다. 그리고 k_1의 최대치인 $k_1 = 1$에서 $\widehat{\pi_W} = \pi_W$가 되므로 $\frac{m}{c} < k_1 = k_2 < 1$인 경우 $\widehat{\pi_W} > \pi_W$ 가 항상 성립한다. ■

8. [Proposition 4]의 증명

[Proposition 2]와 [Proposition 3]에서 증명된 사항에 더하여 $0 < k_1 = k_2 < \frac{m}{c}$인 경우만 증명하면 충분하다.

$0 < k_1 = k_2 < \frac{m}{c}$를 만족하는 모든 k_1에 대하여 식 (A-5)는 $\Gamma(k_1 = 0)$인 경우의 값보다 작음이 분명하다. 따라서 $\Gamma(k_1 = 0)$이 0보다 작게 되는 조건을 구한다면, 동일 조건 하에서 식 (A-5)는 항상 음의 값을 가지게 된다. 그 결과로 $0 < k_1 = k_2 < \frac{m}{c}$의 범위에서 $\widehat{\pi_W} > \pi_W$가 성립하게 되며, k_1이나 k_2의 값이 작아질수록 $(\widehat{\pi_W} - \pi_W)$의 값, 즉 $\widehat{\pi_W}$와 π_W의 격차는 커지게 될 것이다. 그런데 이미 $T(h+s)\phi(z^*)\sigma n_2(\tau) \geq T(h+s)\phi(\hat{z}^*)\sigma n_2(\tau) \geq c\hat{z}^*\sigma n_2(\tau) \geq cz^*\sigma n_2(\tau) \geq mz^*\sigma n_2(\tau)$의 관계가 있으므로

$$\begin{aligned} \Gamma(k_1 = 0) &= -\frac{(T\alpha - \beta c n_1(\tau))^2}{4T\beta} + m\left[\frac{c\sigma n_2(\tau)}{T(h+s)\phi(\hat{z}^*)}\right] \\ &\leq -\frac{(T\alpha - \beta c n_1(\tau))^2}{4T\beta} + m\sigma n_2(\tau)\frac{1}{z^*} \end{aligned}$$

따라서 $\Gamma(k_1 = 0) \leq 0 \Leftrightarrow z^* \geq \frac{4T\beta c\sigma n_2(\tau)}{(T\alpha - \beta c n_1(\tau))^2}$임을 알 수 있다. ■