

지속·변동성을 가진 비대칭 TGARCH 모형을 이용한 국내금융시계열 분석

홍선영^a, 최성미^a, 박진아^a, 백지선^a, 황선영^{1,a}

^a숙명여자대학교 통계학과

요약

본 논문에서는 금융시계열 자료를 분석하는데 있어서 비대칭 변동성과 지속성 효과를 가지는 시계열 자료에 적합한 모형인 I-TGARCH를 제시하였다. 국내 금융시계열 자료를 바탕으로 I-TGARCH의 적합성을 검증하기 위해 기존연구에서 많이 쓰이고 있는 TGARCH, IGARCH, EGARCH 모형과 함께 분석하여 비교하였다. 그 결과, I-TGARCH 모형이 경제 위기의 영향으로 변동성이 커진 현재의 주가 분석에 적합하다는 사실을 알 수 있었다. 특히, 비대칭적 변동성의 특징을 관찰하기 위해 News impact curve를 이용해서 호재와 악재에 다르게 반응하는 주가변동에 대해서 알아본 결과, 대부분의 주가변동이 비대칭적인 경향을 보이고 있다는 사실을 관찰했다. 또한, 실제 일별수익률 데이터를 I-TGARCH 모형에 적합시키고 모형이 얼마나 효율적인지를 검정하였다. I-TGARCH의 적합성을 검증하기 위해 VaR의 사후검정을 이용하였다. 그 결과 대부분의 금융시계열이 I-TGARCH가 다른 비교모형 보다 우수하거나 비슷한 것으로 검증되었다. 이는 변동성의 비대칭성을 고려한 TGARCH에서 지속·변동성 효과(persistent effect) 또한 존재할 수 있다는 사실을 금융시계열 자료를 통해 알 수 있었다.

주요용어: 지속·변동성, 비대칭 TGARCH, 일별수익률, 사후검증.

1. 서론 및 비대칭 GARCH 모형

금융시계열 자료는 국내외 경기 동향과 정치, 사회 등 다양한 요인에 의해 영향을 받는다. 특히 어떤 시점에서의 강한 충격은 금융시장을 요동치게 하는 큰 영향력을 가진다. 이러한 영향력은 자산의 리스크를 크게 하기 때문에 변동성에 대한 분석은 경제적인 관점에서 매우 중요하게 여겨져 왔다 (cf. Black, 1976). 이 같은 변동성의 특성을 Engle (1982)이 처음 ARCH모형으로 제시하였으며, Bollerslev (1986)가 ARCH 모형을 일반화시킨 GARCH 모형을 제시하였다. 또한 Nelson (1991)은 과거 시점 관측값 오차의 부호에 따라 현재 오차의 분산이 서로 다른 모형을 갖는다는 가정하에 EGARCH 모형을 제시하였다. 또한, 변동성에 대한 “Leverage Effect”를 강조하는 TGARCH(Threshold GARCH) 모형이 Rabemananjara와 Zakoian (1993), Glosten 등 (1993)에 의해 개발되었으며, 일반적인 GARCH(p, q) 모형에서 현재의 충격이 미래의 분산에 지속적인 영향을 주는 IGARCH(Integrated-GARCH) 모형도 널리 이용되고 있다. 본 논문에서는 국내 금융시계열 자료를 바탕으로 지속성 효과를 가지고 있는 비대칭-TGARCH 모형과 TGARCH(1, 1), EGARCH(1, 1), IGARCH(1, 1) 모형을 적합시킨 후, VaR(Value at Risk)의 사후검증방법을 통해 모형들을 비교평가해 보고자 한다.

¹교신저자: (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 교수. E-mail: shwang@sm.ac.kr

1.1. 비대칭-TGARCH

GARCH 모형은 금융 시계열의 급첨(leptokurtic; heavy-tail) 현상과 변동성 집중(volatility clustering)현상 등의 특징을 잘 포착해내는 장점을 가지고 있다. 그러나 GARCH 모형은 오차항의 평균 0을 중심으로 대칭적이어서 좋은 정보와 나쁜 정보에 대해 같은 크기의 변화만을 반영하기 때문에, 좋은 정보에 대한 가격변동은 과대 추정하고 나쁜 정보에 대한 가격변동을 과소 추정하는 경향을 갖는다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 오차항의 부호에 따른 비대칭적 효과를 GARCH 모형에 반영할 필요가 있다. 이러한 점을 고려하여 Rabemananjara와 Zakoian (1993), Glosten 등 (1993)은 조건부 분산을 다음과 같이 표현한 TGARCH(Threshold GARCH) 모형을 제시하였다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k \varepsilon_{t-k}^2 + \sum_{l=1}^q \gamma_l h_{t-l}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

여기서, 모두는 $\beta_j > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_{i1} \geq 0$, $\alpha_{i2} \geq 0$ 조건을 만족하며

$$\varepsilon^+ = \max(\varepsilon, 0), \quad \varepsilon^- = \max(-\varepsilon, 0)$$

을 의미한다. TGARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (1.2)$$

국내시계열의 비대칭-TGARCH 모형분석은 박진아, 송유진 등 (2007)을 참고하기 바란다.

1.2. EGARCH

Nelson(1991)에 의해 제시된 EGARCH 모형은 GARCH 모형에서 분산을 0 보다 크게 하기 위하여 모두가 모두 양수이어야 한다는 가정을 완화시켜 확장된 모형이다. EGARCH(p, q) 모형은 다음과 같다

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t \\ \ln h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(e_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln h_{t-j}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$g(e_t) = \gamma e_t + \delta(|e_t| - E|e_t|)$$

여기서 γ 와 δ 는 실수이고 e_t 와 $|e_t| - E|e_t|$ 는 평균이 0인 i.i.d. 변수들이며, EGARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 g(e_{t-1}) + \beta_1 \ln(h_{t-1}).$$

1.3. News Impact Curve

주식시장에서의 새로운 소식은 시장을 이끄는 원동력이 된다. 통상, 좋은 뉴스는 나쁜 뉴스 만큼 시장의 변동성에 큰 영향을 미치지 못하며 이러한 변동성의 비대칭적 효과를 레버리지 효과라 한다. 이러한 비대칭적 효과를 측정하는 도구로서 Engle과 Ng (1993)가 제안한 News impact curve가 있다. News impact curve는 $t - 1$ 시점의 뉴스인 ε_{t-1} 과 그 다음 시점의 변동성인 h_t 간의 관계를 그래프로 표현

한 것으로서, $t - 2$ 시점까지의 모든 다른 변수들은 상수로 고정시키고 ε_{t-1} 를 x -좌표에, h_t 를 y -좌표에 그리게 된다. News impact curve를 통해 비대칭-TGARCH 모형들의 경우, 나쁜 뉴스인 ε_{t-1}^- 부분과 좋은 뉴스인 ε_{t-1}^+ 부분에서 변동성의 기울기가 확연하게 달라지는 것을 시각적으로 확인 할 수 있으며 레버리지 효과가 존재한다면 ε_{t-1}^- 부분에서의 h_t 의 기울기가 ε_{t-1}^+ 부분에서의 기울기보다 더 커지게 된다.

2. 비대칭-TGARCH모형에서의 지속-변동성(persistent volatility)

2.1. IGARCH(Integrated GARCH)

GARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$\varepsilon_t | F_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (2.2)$$

단, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ 이며 F_{t-1} 는 $t - 1$ 까지의 정보를 의미한다.

자산가격의 변동성은 일단 상승(저하)하게 되면, 그 후 잠시 동안 변동성이 높은(낮은) 상태를 지속하게 된다. GARCH(1, 1) 모형에서 변동성의 충격의 지속성은 $\alpha_1 + \beta_1$ 의 크기에 의존한다. 실제 데이터 분석에서 GARCH(1, 1) 모형을 적용할 때, $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$ 인 경우가 자주 나타나는데, 이러한 경우 충격의 지속성이 커지게 되고, 과거의 정보가 현재의 분산에 아주 중요한 역할을 하게 된다. $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ 인 모형을 IGARCH(1, 1) 모형이라 부르며 박진아 등 (2007)은 국내시계열의 지속-변동성을 실증분석하였다.

2.2. I-TGARCH(Integrated 비대칭-TGARCH)

GARCH(1, 1) 모형이 IGARCH(1, 1) 모형으로 확장되는 것과 비슷하게 TGARCH(1, 1) 모형에서도 변동성이 오랜 시간동안 미래의 변동성에 영향을 미치는 모형을 생각할 수 있다. 식 (1.2)와 같은 TGARCH(1, 1) 모형에서 $\{e_t\}$ 가 평균 0이고 분산 1인 서로 독립이고 대칭인 같은 분포를 따르는 경우, $\{\varepsilon_t\}$ 는 $\phi = (\alpha_{11} + \alpha_{12})/2 + \beta_1 < 1$ 일 때 정상성을 만족한다. ϕ 값이 1에 가까울 때, TGARCH(1, 1) 모형은 현재의 변동성이 오랜 기간 동안 미래의 변동성에 남게되는 지속성 효과를 갖게 된다. 이러한 점을 고려하여 다음과 같은 I-TGARCH 모형을 고려해 본다. I-TGARCH(1, 1) 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t} e_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_{11}(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + \beta_1 h_{t-1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서, $\alpha_0 > 0, \alpha_{11} \geq 0, \alpha_{12} \geq 0, \beta_1 \geq 0$ 을 만족하고, $\{e_t\}$ 는 평균이 0, 분산이 1인 서로 독립이고 대칭인 같은 분포를 따를 때 다음과 같은 제약조건을 갖는다.

$$\phi = \frac{(\alpha_{11} + \alpha_{12})}{2} + \beta_1 = 1. \quad (2.4)$$

결국, I-TGARCH(1, 1) 모형은 IGARCH(1, 1) 모형에서 비대칭적 변동성에 대해 확장한 모형으로 정상성은 만족하지만 이차적률은 존재하지 않는다. I-TGARCH(1, 1) 모형은 지속-변동성을 가진 모형이며 자세한 이론적 배경은 Park 등 (2009)를 참조하기 바란다.

3. Value at Risk

VaR(Value at Risk)란 ‘정상적인 시장조건 하에서 주어진 신뢰수준에서 보유기간 동안에 발생 가능한 포트폴리오의 최대 손실액’으로 정의 된다. 포트폴리오의 변동액은 $\Delta_t V(T)$ 로 표시하고, Δ_t 는 t 일에

예상되는 가치의 변화를 표시한다. 투자자가 포트폴리오 가치의 엄청난 파괴를 두려워하지 않고 견뎌 낼 수 있는 가치 변동에 대한 확률을 일반적으로 신뢰수준(confidence level)이라고 하고 $(1 - \alpha)$ 로 표시 될 때, VaR는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pr[\Delta_t V(T) < -\text{VaR}_t(T, \alpha)] = \alpha$$

즉, $(1 - \alpha)$ 의 신뢰수준에서 T 일 동안의 VaR는 포트폴리오 가치 변동이 VaR보다 작을 확률이 α 가 되도록 하는 값이다 (cf. Jorion, 2001). VaR는 특정 신뢰수준에서 일정 기간 동안에 발생할 수 있는 최대손실금액으로 정의된다. 따라서 VaR 모형의 정확성을 검증하는 대표적인 방법은 전체 표본에 대해 VaR를 초과하는 손실이 나타나는 표본의 비율인 실패율을 계산하는 사후검증(Backtesting)이 있다. 이러한 방법을 통하여 우리는 VaR 모형이 위험을 적절히 평가하는지의 여부를 판단할 수 있을 뿐만 아니라, VaR 계산의 기초가 되는 가치평가모형의 적절성을 검증할 수 있다. 사후검증의 절차는 다음과 같다.

Step 1. VaR 모형을 이용하여 일정한 간격으로 VaR를 추정한다.

Step 2. 매일의 실제 가격을 이용하여 포트폴리오의 실제의 이익과 손실을 계산하고 이를 기록한다.

Step 3. 일정기간 동안의 VaR 추정치와 실제의 이익/손실을 정기적으로 비교한다.

Step 4. 실제의 이익/손실이 VaR 추정치를 초과하는 일수 또는 비율을 계산하여 모형의 적정성 여부를 판단한다.

4. 국내금융시계열에의 응용

본 절에서는 지속-변동성을 가진 비대칭 TGARCH 모형인 I-TGARCH(1, 1) 모형을 다양한 국내 시계열에 적용시키고 평가하고자 한다. 이용된 자료는 2005년 1월 3일부터 2009년 2월 27일까지 금융 시계열 자료(두산중공업, 금호타이어, 삼성전자, LG전자, 현대차, SK 텔레콤, KOSPI, 원/엔 환율)이다. News impact curve를 통해 자료의 비대칭성을 확인하고 TGARCH 모형에 적합하여 지속-변동성 효과를 알 수 있는 식 (2.4)의 ϕ 값을 계산하였다. 모든 자료에 대해 TGARCH(1, 1) 모형을 적합한 결과, ϕ 값이 1에 가깝게 나타나고 있어 I-TGARCH(1, 1) 모형 적합 후 포트맨토 검정을 통해 모형의 적절성을 확인하였다. 또한, 비교모형으로 IGARCH(1, 1), EGARCH(1, 1) 모형을 적합시킨 후 적합정도를 판단하기 위해 VaR(Value at Risk)를 이용하여 비교했다. 비교 기간은 금융시계열 데이터가 매우 불안정했던 2008년 9월부터 2009년 2월까지의 데이터를 바탕으로 하였다.

비교 방법은 2003년 1월 3일에서부터 2008년 8월 29일 까지 데이터를 바탕으로 1-시차후 VaR의 95% 신뢰구간을 구한 후, 실제 값이 신뢰구간에 포함되는지의 여부로 모형의 적합 정도를 판단한다. 예를 들어 2003년 1월 3일부터 2008년 8월 29일까지의 데이터를 바탕으로 1일 시차후의 VaR의 95% 신뢰구간을 구한 후, 사전에 알고 있는 실 데이터와 비교해서 신뢰구간에 포함여부를 알아본다. 그 다음에 다시 2003년 1월 4일부터 2008년 9월 1일까지의 데이터를 바탕으로 9월 2일의 VaR의 95% 신뢰구간을 구한 후, 실제 9월 2일의 값과 비교한다. 계속해서 마지막 날인 2009년 2월 27일까지 같은 방법으로 구한다. 95%신뢰구간에 포함되지 않는 비율인 오분류율은 아래의 표 3에 정리하였다. 각 자료의 수익률은 모형에 적합시키기 위하여 로그 차분한 후 분석에 이용하였다. 분석과정은 모든 자료에 대하여 동일하므로 금호타이어와 삼성전자에 대해서만 기술하고 나머지 자료에 대한 추정결과와 포트맨토 검정결과는 요약하여 표 1과 표 2에 수록하였다.

표 1: 국내 금융시계열에 대한 사례분석 결과

DATA	Model	Log likelihood	ϕ
KOSPI	ITGARCH : $v_t = 0.0356 + 0.0687v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0556 + 0.0217\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.2833\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.8475h_{t-1}$	-1760	
	TGARCH : $v_t = 0.0632 + 0.0605v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0778 + 0.0051\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.2161\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.853h_{t-1}$	-1753	0.95850
	IGARCH : $v_t = 0.1162 + 0.02593v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0225 + 0.1078\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.8922h_{t-1}$	-1773	
	EGARCH : $v_t = 0.0735 + 0.0318v_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ln(h_t) = 0.0284 + 0.205g(e_t) + 0.9587 \ln h_{t-1}$ $g(e_t) = -0.6583e_t + e_t - (2/\pi)^{1/2}$	-1757	
엔화율	ITGARCH : $v_t = -0.00057 + 0.173v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.00005 + 0.06945\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.2479\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.8413h_{t-1}$	3545	
	TGARCH : $v_t = -0.000017 + 0.1692v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0001 + 0.0344\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.2017\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.80814h_{t-1}$	3536	0.93750
	IGARCH : $v_t = 0.00071 + 0.1461v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.000017 + 0.0837\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.9162h_{t-1}$	3550	
	EGARCH : $v_t = -0.0002 + 0.1595v_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ln(h_t) = -0.3973 + 0.2092g(e_t) + 0.938 \ln h_{t-1}$ $g(e_t) = -0.4981e_t + e_t - (2/\pi)^{1/2}$	3549	
두산중공업	ITGARCH : $v_t = 0.001 + 0.10833v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0000214 + 0.05376\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.1498\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.89821h_{t-1}$	1975	
	TGARCH : $v_t = 0.00136 + 0.1045v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.00005 + 0.04368\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.15195\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.864h_{t-1}$	1979	0.98618
	IGARCH : $v_t = 0.0021 + 0.10355v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.000012 + 0.08105\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.918945h_{t-1}$	1970	
	EGARCH : $v_t = 0.001 + 0.0942v_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ln(h_t) = -0.2237 + 0.1721g(e_t) + 0.9655 \ln h_{t-1}$ $g(e_t) = -0.4418e_t + e_t - (2/\pi)^{1/2}$	1978	
LG전자	ITGARCH : $v_t = 0.0163 + 0.1162v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.033 + 0.056\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.0933\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.9254h_{t-1}$	-2281	
	TGARCH : $v_t = 0.0208 + 0.1166v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0404 + 0.0529\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.0878\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.9252h_{t-1}$	-2280	0.99550
	IGARCH : $v_t = 0.0425 + 0.1145v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.03 + 0.0726\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.9274h_{t-1}$	-2282	
	EGARCH : $v_t = 0.0267 + 0.1178v_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ln(h_t) = 0.0234 + 0.1633g(e_t) + 0.9877 \ln h_{t-1}$ $g(e_t) = -0.1541e_t + e_t - (2/\pi)^{1/2}$	-2284	
SK텔레콤	ITGARCH : $v_t = 0.0744 + 0.0578v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0151 + 0.0809\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.0067\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.9562h_{t-1}$	-1999	
	TGARCH : $v_t = 0.0414 + 0.0584v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0498 + 0.0693\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.0167\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.9413h_{t-1}$	-1996	0.98420
	IGARCH : $v_t = 0.0245 + 0.0693v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0312 + 0.0762\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.9238h_{t-1}$	-2002	
	EGARCH : $v_t = 0.042 + 0.0612v_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ln(h_t) = 0.0293 + 0.1117g(e_t) + 0.9781 \ln h_{t-1}$ $g(e_t) = 0.3802e_t + e_t - (2/\pi)^{1/2}$	-1997	
현대차	ITGARCH : $v_t = -0.0361 + 0.0904v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0445 + 0.0362\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.1228\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.9205h_{t-1}$	-2183	
	TGARCH : $v_t = -0.0275 + 0.087v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0647 + 0.031\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.1177\varepsilon_{t-1}^{-2} + 0.9172h_{t-1}$	-2183	0.99150
	IGARCH : $v_t = 0.0125 + 0.0867v_{t-1} + \varepsilon_t$ $h_t = 0.0318 + 0.0745\varepsilon_{t-1}^{+2} + 0.9255h_{t-1}$	-2189	
	EGARCH : $v_t = -0.0583 + 0.0835v_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ln(h_t) = 0.0271 + 0.1727g(e_t) + 0.9875 \ln h_{t-1}$ $g(e_t) = -0.3501e_t + e_t - (2/\pi)^{1/2}$	-2187	

표 2: 지속-변동성 I-TGARCH 모형의 포트맨토 적합도 검정 결과

DATA		Chi-square	P-value
KOSPI	$Q(12)$	9.54	0.6559
	$Q^2(12)$	12.09	0.4389
엔화율	$Q(12)$	18.16	0.1110
	$Q^2(12)$	11.34	0.5001
두산중공업	$Q(12)$	9.79	0.6340
	$Q^2(12)$	5.36	0.9447
LG전자	$Q(12)$	7.13	0.8486
	$Q^2(12)$	8.96	0.7065
SK텔레콤	$Q(12)$	12.15	0.4336
	$Q^2(12)$	13.21	0.3543
현대차	$Q(12)$	15.69	0.2058
	$Q^2(12)$	3.74	0.9877

표 3: VaR 사후검증을 이용한 오분류율

DATA	I-TGARCH	TGARCH	IGARCH	EGARCH
금호타이어	5.69	8.94	8.13	8.94
삼성전자	5.69	5.69	4.88	5.69
KOSPI	8.13	11.38	8.94	11.38
엔화율	4.06	4.87	3.25	5.69
두산중공업	6.50	8.13	8.13	8.94
LG전자	6.50	6.50	5.69	6.50
SK텔레콤	7.32	8.94	6.50	8.13
현대차	7.32	7.32	8.13	9.76

4.1. 금호타이어

2005년 1월 3일부터 2009년 2월 27일까지 금호타이어 데이터를 이용하여 TGARCH(1,1) 모형을 적합 시켜 보았다. 추정식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{TGARCH: } v_t &= -0.000017 + 0.1692v_{t-1} + \varepsilon_t \\ h_t &= 0.0001 + 0.0344(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + 0.2017(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + 0.8081h_{t-1}. \end{aligned}$$

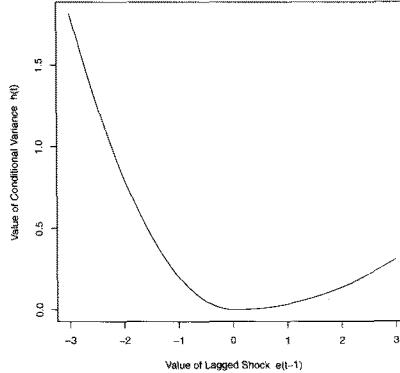
추정식에서 ε_{t-1}^- 에 의한 변동성이 ε_{t-1}^+ 에 의한 변동성보다 약 6배 정도 더 큰 레버리지 효과가 존재함을 알 수 있다. 이는 아래의 News impact curve에서도 ε_{t-1}^- 부분의 기울기가 ε_{t-1}^+ 의 기울기보다 확연하게 큰 기울기를 가지고 있다는 사실을 확인할 수 있다. 추정된 TGARCH(1,1) 모형에서 ϕ 값이 0.92619로 1에 가까우므로 I-TGARCH(1,1) 모형에 적합하여 다음의 결과를 얻었다.

$$\begin{aligned} \text{I-TGARCH: } v_t &= -0.00057 + 0.173v_{t-1} + \varepsilon_t \\ h_t &= 0.00005 + 0.06945(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + 0.2479(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + 0.8413h_{t-1}. \end{aligned}$$

I-TGARCH 모형이 적절한지 확인하기 위하여 위의 추정식으로부터

$$\text{표준화된 잔차}(e_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}) \text{와 제곱잔차}(e_t^2)$$

를 얻어 포트맨토 검정을 하여 시차 12에서 잔차의 포트맨토 검정 통계량과 제곱잔차의 검정통계량 $Q(12) = 9.5(0.6599)$, $Q^2(12) = 10.12(0.6057)$ 를 계산하였다. 괄호안의 수치는 유의확률로 포트맨토 검

그림 1: 금호타이어의 *News impact curve*

정결과 I-TGARCH 모형이 적절함을 알 수 있다. 비교모형인 IGARCH(1, 1) 모형과 EGARCH(1, 1) 모형의 적합결과는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{IGARCH: } v_t &= 0.00071 + 0.1461v_{t-1} + \varepsilon_t \\ h_t &= 0.000017 + 0.0837\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9162h_{t-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EGARCH: } v_t &= -0.0002 + 0.1595v_{t-1} + \varepsilon_t \\ \ln(h_t) &= -0.3973 + 0.2092g(e_{t-1}) + 0.938\ln(h_{t-1}), \\ g(e_t) &= -0.4981e_t + |e_t| - (2/\pi)^{1/2}. \end{aligned}$$

모형의 적합정도를 비교하기 위해 계산한 VaR의 오분류율(표 3)을 보면, 금호타이어 데이터의 경우, I-TGARCH 모형이 다른 비교모형(TGARCH, IGARCH, EGARCH)에 비해 같거나 작은 오분류율을 가지고 있다. 따라서 최근 변동이 심한 시장 상황에 I-TGARCH 모형이 적합하다는 사실을 알 수 있다. 즉, 비대칭적 변동과 지속적 효과를 동시에 고려한 I-TGARCH 모형이 다른 비교모형보다 이 같은 현상을 효과적으로 적합하고 예측함을 알 수 있다.

4.2. 삼성전자

2005년 1월 3일부터 2009년 2월 27일까지 삼성전자 데이터의 TGARCH(1, 1)모형 적합 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{TGARCH: } v_t &= 0.0339 + 0.123v_{t-1} + \varepsilon_t \\ h_t &= 0.0169 + 0.0457(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + 0.0455(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9522h_{t-1}. \end{aligned}$$

삼성전자의 경우, α_{11} 와 α_{12} 의 값이 크게 차이나지 않기 때문에, News impact curve에서 ε_{t-1}^+ 부분과 ε_{t-1}^- 부분의 기울기 차이가 거의 보이지 않는 것을 확인할 수 있다. 추정된 TGARCH(1, 1) 모형에서 ϕ 값이 0.9977로 1에 가까우므로 I-TGARCH(1, 1) 모형에 적합하여 다음의 결과를 얻었다.

$$\begin{aligned} \text{I-TGARCH: } v_t &= 0.0345 + 0.123v_{t-1} + \varepsilon_t \\ h_t &= 0.0114 + 0.0462(\varepsilon_{t-1}^+)^2 + 0.0446(\varepsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9546h_{t-1}. \end{aligned}$$

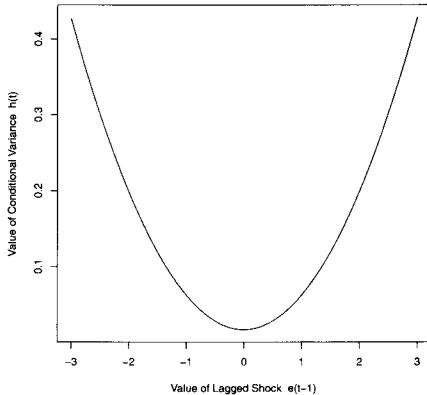


그림 2: 삼성전자의 *News impact curve*

I-TGARCH 모형의 포트맨토 검정 결과 $Q(12) = 13.30(0.3477)$, $Q^2(12) = 11.24(0.5082)$ 로 I-TGARCH 모형이 적절함을 알 수 있다.

또한, 비교모형으로 IGARCH(1, 1)과 EGARCH(1, 1)을 적합 시켜 보았다.

$$\begin{aligned} \text{IGARCH: } v_t &= 0.0332 + 0.1229v_{t-1} + \varepsilon_t, \\ h_t &= 0.0113 + 0.0452\varepsilon_{t-1}^2 + 0.9548h_{t-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EGARCH: } v_t &= 0.0432 + 0.1292v_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ln(h_t) &= 0.0102 + 0.1164g(e_{t-1}) + 0.9951 \ln(h_{t-1}), \\ g(e_t) &= -0.4981e_t + |e_t| - (2/\pi)^{1/2}. \end{aligned}$$

삼성전자 데이터의 경우 IGARCH 모형의 오분류율이 5%에 가장 가깝기 때문에 변동성이 비대칭인 모형을 고려하는 것이 유의하지 않다는 사실을 알 수 있다. 이러한 관계는 News Impact Curve에서도 알 수 있듯이 변동성이 0을 중심으로 큰 변화가 없기 때문에 IGARCH 모형과 I-TGARCH 모형은 차별성을 보이지 않는다.

참고 문헌

- 박진아, 송유진, 백지선, 황선영, 최문선 (2007). 제곱수익을 그래프와 TGARCH 모형을 이용한 비대칭 변동성 분석, <응용통계연구>, 20, 487–497.
- 박진아, 백지선, 황선영 (2007). 국내 금융시계열의 누적 이분산성에 대한 사례분석, <응용통계연구>, 20, 53–60.
- Black, F. (1976). Studies in stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 177–181.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, 50, 987–1007.

- Engle, R. F. and Ng, V.K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1749–1778.
- Jorion, P. (2001). *Value at Risk*, McGraw Hill.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.
- Park, J. A., Baek, J. S. and Hwang, S. Y., (2009). Persistent threshold-GARCH processes: Model and application, *Statistics & Probability Letters*, **79**, 907–914.
- Rabemananjara, R. and Zakoian, J. M., (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 31–49.

2009년 6월 접수; 2009년 6월 채택

I-TGARCH Models and Persistent Volatilities with Applications to Time Series in Korea

S. Y. Hong^a, S. M. Choi^a, J. A. Park^a, J. S. Baek^a, S. Y. Hwang^{1,a}

^aDepartment of Statistics, Sookmyung Women's University

Abstract

TGARCH models characterized by asymmetric volatilities have been useful for analyzing various time series in financial econometrics. We are concerned with persistent volatility in the TGARCH context. Park et al. (2009) introduced I-TGARCH process exhibiting a certain persistency in volatility. This article applies I-TGARCH model to various financial time series in Korea and it is obtained that I-TGARCH provides a better fit than competing models.

Keywords: Persistent volatility, asymmetric TGARCH, log-return, back-testing.

¹ Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, 52 Hyochangwon-gil, Yongsan-gu, Seoul, 140-742, Korea. E-mail: shwang@sm.ac.kr