

일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구* -중학교 1학년과 3학년을 중심으로-

서종진¹⁾

학생들은 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식보다 우변에 있는 일차방정식 문제를 해결하는데 어려움을 겪고 있다. 이러한 어려움을 학생들이 극복할 수 있도록, 기본적인 여러 유형의 일차방정식 문제를 경험할 수 있는 기회를 제공하여야 할 것이다. 그리고 일차방정식의 교수·학습에서 여러 유형의 평가 문항을 구성하여 테스트한 후에 학생들의 풀이 과정을 면밀히 검토하거나, 개별 면담을 통하여 학생들의 학습 상황을 파악하고 이를 토대로 피드백을 통한 오류 교정이 이루어져야 할 필요성이 있다.

주요용어 : 일차방정식, 등호관계, 등식의 성질, 이항

I. 도입

예를 들어, 아동이 $4+\square=12$, $\square+8=12$ 와 같은 유형의 문제들은 잘 해결하고 $12=4+\square$, $12=\square+8$ 과 같은 유형의 문제를 해결하는데 어려움을 겪는다거나, $4\times\square=12$, $\square\times 3=12$ 와 같은 유형의 문제들은 잘 해결하고 $12=4\times\square$, $12=\square\times 3$ 과 같은 유형의 문제들을 해결하는데 어려움을 겪거나, $12\div\square=4$ 와 같은 유형의 문제를 잘 해결하고 $4=12\div\square$, $4=\square\div 3$ 과 같은 유형의 문제를 해결하는데 어려움이 있다면, 이 아동이 중학교 1학년 과정에서 일차방정식을 해결하는 과정에서 어려움을 겪게 될 것이다. Weaver(1971, 1973)는, 아동들이 산술 연산 문제에서 보이지 않는 요소(elements)가 좌변에 있는 것보다 우변에 있을 때 보이지 않는 요소(elements)를 찾는데 더 많은 어려움을 겪는다고 한다. 이것은 아동들이 자신만의 생각으로 등호(기호 '=')를 받아들이기 때문이라 할 수 있다.

어린 아동일수록 성인과는 다른 식으로 상징을 해석한다. 이를테면, $2+3=5$ 을 항등식으로 보지 못하고, '2하고 3을 더하면 5가 된다'라고 읽는 것에서 알 수 있듯이, 이식을 조작적으로 해석한다. 7학년 학생들에게 등호를 사용하는 예를 제시해 보도록 하였을 때 좌변에 있는 두 수를 계산하여 그 결과를 우변에 놓은 식으로 한정하였다는 것이다(Herscovics & Kieran, 1980). 아동들이 $2\times\square=18$ 과 같은 문제를 풀었을 때, 그들이 미지수나 방정식 개념에 대해 어떤 이해를 하고 있고, 대수를 다룰 수 있다고 보는 경향이 있다. 그런데, 아동들은 이러한 유형의 문제를 풀 때 자신들의 기억 속에 저장된 산술적 사실을 그저 회상

* 이 논문은 2009학년도 한남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었음

1) 한남대학교 수학교육과 (jjseo@hnu.ac.kr)

한다는 것이다. 따라서 답을 구하기 위한 아동들의 추측은 심리적 산술에 그친다는 것이다. 즉, 대수적 과정이 전혀 사용되지 않는다는 것이다. 이는 보다 큰 수나 유리수가 포함되어 있다는 점에서만 차이가 날 뿐, 그 동안 다루어온 것과 유사한 방정식을 풀 수 없다는 것이다(Herscovics & Kieran, 1980).

Kieran(1982, 1984)의 연구에서는, 방정식에 대한 학생들의 구조적 개념의 부족에 대하여 보여주고 있다. 그의 연구에서는, 12세의 대수 초기 학생들은 덧셈과 뺄셈 관계에 있는 동치인 식을 찾을 때 두 가지 오류를 범하였다. 학생들이 범한 두 가지 오류는 “가수 바꾸기” 오류와 “재분배” 오류로 문자를 포함하는 표상에서 덧셈과 뺄셈의 동치식을 인식하는데서 나타나는 학생들의 혼동을 나타낸다. “가수 바꾸기 오류”에서는 $x + 37 = 150$ 와 $x = 37 + 150$ 이 같은 해를 갖는다고 판단하고, “재분배 오류”에서는 $x + 37 = 150$ 와 $x + 37 - 10 = 150 + 10$ 이 같은 해를 갖는다고 판단한다. 이런 오류들은 대수 초기 학생들이 덧셈과 뺄셈 사이의 구조적 관계에 대해서 다소 불안정하고, 더구나 문자를 포함한 식에서는 이들 관계가 더욱 불안정하다는 것을 나타낸다(Kieran, 1992).

대수 초기 학생들은 등호(기호 '=')를 무엇을 하라는 신호(signal)로 생각한다. 다시 말해, 등호(기호 '=')를 동치 관계를 나타내는 기호로 이해하기 보다는 연산자 기호로서 등호(기호 '=')를 간주한다는 것이다. 방정식에서 이러한 잘못된 등호(기호 '=')의 사용은 중등학교에서 대학교 수준에까지 계속되며 잘못된 등호 사용으로 방정식을 학습을 하는데 있어서 교수학적 단절이 발생할 수 있다는 것이다((Behr, M. et al, 1976; Kieran, 1981; Herscovics & Linchevski, 1994, 1996; Bright, 1981, 재인용).

어떤 학생이 등호(기호 '=')를 동치 관계를 나타내는 기호로 이해하였다면, “등식의 좌변에 변수가 있는 일차방정식에 대한 문제를 주로 다룬 학생이 등식의 우변에 변수가 있는 일차방정식을 쉽게 해결할 수 있을까?”라는 의문은 아무런 문제 제기가 되지 않을 것이다. 하지만 일차방정식을 처음 접하게 되는 중학교 1학년 학생들이 등호(기호=)를 동치관계로 이해한다는 것은 어려운 일일 것이다.

중학교 1학년에서 학생들이 처음으로 접하게 되는 일차방정식의 유형은 등식의 좌변에 변수가 있는 문제들이다. 이러한 문제를 풀면서 어려움을 겪는 학생들이 있다. 이러한 어려움은 변수가 등식의 우변에 있는 일차방정식의 문제를 해결할 때에도 영향을 미칠 것이다. 그러므로 변수가 등식의 좌변에 있는 일차방정식의 문제를 접하면서 등호의 대칭성을 경험하고, 차후 변수가 등식의 우변에 있는 일차방정식을 접하면서 등호관계의 대칭성에 대하여 이해를 높여 갈수 있는 기회가 제공되어야 할 것이다.

학생들이 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식이나 우변에 있는 일차방정식, 변수가 등호의 좌변과 우변 모두 있는 일차방정식과 같은 여러 유형의 문제를 다룸으로써 등호의 대칭성이나 동치관계를 완전히 이해하는 것은 어렵겠지만, 방정식의 풀이 과정에서 요구되는 절차를 조금씩 이해를 하는 과정은 중요하다 할 수 있다. 일차방정식의 풀이 과정과 결과를 확인하는 이러한 행동은 가역적 사고를 기를 수 있으며, 등호의 대칭성에 대한 의미를 이해하는데 도움을 준다. 그러므로 학생들은 변수의 위치에 따른 일차방정식의 여러 유형의 문제를 해결하면서 대칭적 관계를 이해하고 나아가 동치관계를 알 수 있도록 노력해야 할 것이다. 또한, 교사는 일차방정식의 풀이 과정에서 학생들이 어떠한 어려움을 겪고 있는지 파악하여 교수·학습 진단을 하고, 이를 토대로 일차방정식의 풀이 과정에 나타난 오류를 교정할 수 있는 기회를 제공할 필요성이 있을 것이다.

II. 연구방법

중학교 1학년 학생들이 처음으로 일차방정식을 학습한 후에 그들이 해결한 문항의 풀이 과정에 나타나는 반응들이 상급학년으로 올라갈수록 어떻게 변화하는지를 조사하는 것은 의미 있는 일이다. 이러한 연구에 앞서 본 연구에서는, 중학교 1학년 학생과 3학년 학생을 대상으로 몇 가지 일차방정식의 유형의 문제를 투입하여 그들이 풀이한 내용을 기초로 풀이 과정에 나타난 반응을 알아보기 위하여 다음과 같은 연구문제를 구성하였다.

1. 연구문제

- 1) 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식과 우변에 있는 일차 방정식에 대한 학생들의 반응은 어떠한가?
- 2) 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식을 해결할 수 있는 학생이 우변에 있는 일차 방정식을 해결할 수 있는가?
- 3) 변수가 등호의 양변(좌변과 우변)에 있는 일차방정식 문항에 대한 학생들의 반응은 어떠한가?
- 4) 일차방정식의 한 문항을 해결한 학생이 다른 유형의 일차방정식을 어느 정도 해결 할 수 있는가?
- 5) 일차 방정식의 풀이 과정에 나타난 등호 관계에 대한 반응은 어떠한가?

2. 용어의 정의

2-1) 방정식의 풀이 과정에 나타난 등호관계의 표현

학생들이 일차방정식을 해결할 때, 등호(=)를 대칭성과 관련된 의미에서 등호 표현을 올바르게 표현하였는지, 또는 올바르게 표현하지 못하였는지를 의미한다.

학생들의 방정식 풀이 결과 등호관계의 올바른 표현과 올바르지 못한 표현에 대한 예는 <표II-1>에 제시 하였다. 이외 문항에 대해서도 <표II-1>과 같은 맥락에서의 등호관계의 표현을 의미한다.

<표II-1> 등호관계의 올바른 표현과 올바르지 못한 표현에 대한 예

문제	답	반 응	
		등호관계 올바르게 표현	등호관계 올바르게 표현하지 못함
3x + 2 = 17 을 풀이라	맞은 경우	1) $3x + 2 = 17$ $3x = 17 - 2$ $3x = 15$ $x = 5$ 2) $3x + 2 - 2 = 17 - 2$ $3x = 17 - 2$ $3x = 15$ $x = 5$	1) $3x + 2 = 17 = 3x = 17 - 2$ $= 3x = 15 = x = 5$ 2) $3x = 17 - 2$ $= 3x = 15$ $= x = 5$ 3) $3x = 15 = x = 5$ 4) $3x + 2 = 17 = 17 - 2 = 15 = 3x$ $3x = 15$ $x = 5$
	틀린 경우	1) $3x + 2 = 17 - 2$ $x = 15$ 2) $3x + 2 - 2 = 17 - 2$ $x = 17 - 2$ $x = 15$	1) $3x + 2 = 17 = x = 17 - 2$ $= x = 15$ 2) $3x = 17 - 2$ $= 15$ $= x = 15$

$x+4=9$ 을 풀어라	맞은 경우	1) $x=9-4$ $x=5$ 2) $x+4-4=9-4$ $x=5$	1) $x+4=9-4=5$ 또는 2) $x+4=9-4$ $x=5$
	틀린 경우	$x=9+4, x=13$	$x=9+4=13=x=13$

3. 연구의 제한점 및 기대효과

시 단위 2개 지역의 중학생을 대상으로 하였으므로 한국의 중학교 전체 학생들의 대표성을 갖기에는 다소 어려움이 따른다고 할 수 있지만, 일차방정식의 풀이과정에서 나타나는 학생들의 반응에 대한 분석의 결과는 학생들을 지도하는데 좋은 자료가 될 것이다. 그리고 본 연구의 결과는, 중학교 1학년 학생들이 처음으로 일차방정식을 학습한 후에 그들이 해결한 문항의 풀이 과정에 나타나는 반응들이 상급학년으로 올라갈수록 어떻게 변화하는지를 연구하기 위한 토대를 마련할 것으로 기대된다.

4. 연구 대상 및 연구 도구

1) 연구대상

시 단위 두 개 지역의 중학교 1학년 107명, 3학년 112명을 대상으로 조사하였다. 연구대상 학교는 사회문화적인 배경에서 유사하다고 할 수 있다. 조사 대상 학생은 219명 이었지만 일차방정식 15문항 모두 전혀 반응이 없었던 6명의 자료는 분석에서 제외하였다.

2) 연구도구

중학교 1학년과 3학년 학생들이 일차방정식의 유형에 따라 어떠한 반응을 보이는지, 일차방정식을 어느 정도 해결하고 풀이하는 과정에서 어떠한 방법으로 해결하는지 그리고 어떠한 오류를 범하는지 알아보기 위하여 11개 문항을 구성하였다. 문항1에서 문항5까지는 일차방정식에서 변수가 등호의 좌변에 있는 문항으로, 문항6은 변수가 등호의 우변과 좌변에 모두 있는 문항으로, 문항7에서 문항11까지는 변수가 등호의 우변에 있는 문항으로 구성하였다(<표II-2>). 이러한 문항에 대하여 학생들은 30분 동안 해결하였다.

연구도구의 문항에 대한 전체 신뢰도를 구한 결과 $\alpha = .747$ 로 나타났다.

<표II-2> 일차 방정식 문항 구성

문 항		일차방정식 문제
문항1~ 문항5	변수가 좌변에 있는 일차방정식	* 다음 방정식을 풀어라 문항1) $x+4=9$, 문항2) $3x+2=17$, 문항3) $4(x+2)=20$ 문항4) $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$, 문항5) $12-5x=3$
문항6	변수가 좌·우변에 있는 일차방정식	* 다음 방정식을 풀어라. 문항6) $x+3=-2x+6$
문항7~ 문항11	변수가 우변에 있는 일차방정식	* 다음 방정식을 풀어라. 문항7) $12=3+x$, 문항8) $15=3(x+2)$, 문항9) $4=11-4x$

		문항10) $14 = 4x + 3$, 문항11) $\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$
--	--	---

5. 반응에 대한 분류 방법

일차방정식 풀이과정에 나타난 반응을 다음 <표II-2>와 같이 분류하였다. 분류에서는, 학생들이 일차방정식을 해결할 때 등호관계를 잘 모르거나 등호관계를 무시하고 해결하는 경우가 종종 발생하고 있는 상황을 고려하여 등호관계를 올바르게 표현한 경우와 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 경우에 주안점을 두었으며, 풀이 방법에서는 등식의 성질과 이항 그리고 풀이 과정에서 계산과정이 맞고 틀린 것 그리고 반응이 전혀 없는 것으로 분류하였다.

먼저, 정답과 오답의 두 범주를 대분류로 하고, 답이 맞은 경우는 C로, 틀린 경우는 E로 분류하였다. 그 다음으로 소분류에서는 등호관계의 올바른 표현과 올바르지 못한 표현으로 분류하여, 올바르게 표현한 경우는 R로, 올바르게 표현하지 못한 경우는 NR로 분류하였다. 즉, 답이 맞고 등호관계를 올바르게 표현한 경우는 CR, 답이 맞고 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 경우는 CNR, 답이 틀리고 등호관계를 올바르게 표현한 경우는 ER, 답이 틀리고 등호관계를 올바르게 표현 못하였거나 풀이 과정이 틀린 경우는 ENR로 분류하였다.

분류번호에서는 대분류와 소분류의 기호를 사용하여 학생들의 반응에 대하여 4가지 유형(CS, CNS, ES, ENS)으로 분류하고 이들은 다시 각각 5가지($CS_i, CNS_i, ES_i, ENS_i; i = 1, 2, 3, 4, 5$)로 구분하여 반응을 분류하였다(단, 분류번호 CNS에서 CSNS1은 분류상 하나를 추가함 그리고 ENS에서 ENSBP은 전혀 반응이 없는 것을 의미함). 다음 절의 분석과정에서 부터는 <표II-2>에서 분류한 방법을 사용하여 학생들의 반응을 분석하고 분석한 자료의 표에서는 분류기호를 사용할 것이다.

<표II-2> 일차방정식 풀이과정에 나타난 반응에 대한 분류

분류 내용		분류 번호	반응 내용	
대분류	소분류			
정답 (C)	등호관계를 올바르게 표현한 경우 (S)	CS	CS1	등식의 성질 이용하여 해결하였고 등호 관계를 올바르게 표현함
			CS2	이항 이용하여 해결하였고 등호 관계를 올바르게 표현함
			CS3	이항사용 후 등식의 성질 이용하여 해결하고 등호 관계를 올바르게 표현함
			CS4	등식의 성질 사용 후 이항을 이용하여 해결하고 등호 관계를 올바르게 표현함
			CS5	이항을 사용하여 해결하고 검산을 하였으며 등호관계를 올바르게 표현함
	등호관계 올바르게 표현하지 못한 경우, (풀이과정에	CNS	CNS1	등식의 성질 이용하여 해결하고 답은 맞았지만 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함
			CNS2	이항 이용하여 해결하고 답은 맞았지만 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함
			CNS3	이항 사용 후 등식의 성질 이용하여 해결하고 답은 맞았지만 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함

서종진

	오류가 있는 경우) (NS)		CNS4	등식의 성질 사용 후 이항을 이용하여 해결하고 답은 맞았지만 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함
			CNS5	계산 과정이 틀리고 답은 맞았으나 계산과정에서 등호관계를 올바르게 표현하지 못함
				계산과정에서 부호처리가 미숙하고 답이 틀렸으며 등호관계 올바르게 표현하지 못함
				계산과정이 전혀 틀리지만 답만 맞은 경우
CSNS1	1) 계산 과정에서 오류가 있으나 답이 맞고 계산과정에서 등호관계를 올바르게 표현한 경우나 2) 대입하여 해결하였거나 답만 제시하고 답이 맞은 경우			
오답 (E)	등호관계를 올바르게 표현한 경우 (풀이과정에 오류가 있는 경우) (S)	ES	ES1	등식의 성질 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계는 올바르게 표현함
			ES2	이항 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계를 올바르게 표현함
			ES3	이항사용 후 등식의 성질 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계를 올바르게 표현함
			ES4	등식의 성질 사용 후 이항을 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계를 올바르게 표현함
			ES5	1) 계산 과정에서 오류가 있고 답이 틀렸지만 계산과정에서 등호관계를 올바르게 표현한 경우나 2) 대입하여 해결하였으나 답이 틀린 경우
				1) 계산 과정이 맞고 풀이과정의 마지막 단계에서 답을 구하지 않았으며 등호관계 올바르게 표현함 2) 계산 과정이 맞고 풀이과정 마지막 단계에서 분수계산이 틀렸지만 풀이 과정에서 등호관계를 올바르게 표현함
				1) 이항을 이용하여 해결하였으나 분배법칙을 잘못사용 하여 답이 틀렸지만 풀이과정에서 등호관계는 올바르게 표현함 2) 등식의 성질을 이용하여 해결하였으나 분배법칙을 잘못사용 하여 답이 틀렸지만 풀이과정에서 등호관계는 올바르게 표현함
등호관계를 올바르게 표현하지 못한 경우 (풀이과정에 오류가 있는 경우)	ENS	ENS1	등식의 성질 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계는 올바르게 표현하지 못함	
		ENS2	이항 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함 이항을 이용하였으나 부호처리 미숙으로 답이 틀림	
		ENS3	이항사용 후 등식의 성질 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	

(NS)	ENS4	등식의 성질 사용 후 이항을 이용하여 해결하였으나 답이 틀리고 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함
	ENS5	계산과정 틀리고 등호관계 올바르게 표현하지 못함 “변수+ 상수=변수”와 같이 계산한 경우
	ENSBP	반응이 전혀 없음(문제 풀이를 전혀 하지 않음)

III. 자료 분석 결과

자료는 중학교 1학년 107명, 3학년 112명을 대상으로 조사되었다. 이 자료에서 일차방정식 15문항 모두 반응이 없는 학생은 제외 하고 분석을 하였다.

조사된 자료는 다음과 같은 내용을 중점적으로 SPSS 14.0을 사용하여 빈도분석과 상관분석을 실시하였다.

- 1) 일차방정식에서 변수가 등호의 좌변에 있는 문항과 우변에 있는 문항에 대한 반응
- 2) 일차방정식에서 변수가 등호의 우변과 좌변 모두 있는 문항에 대한 반응
- 3) 각 문항의 풀이에 대한 상관도
- 4) 일차 방정식의 풀이 과정에 나타난 등호 관계에 대한 반응

1. 기초적인 자료 분석

조사 대상은 1학년이 107명, 3학년이 112명으로 219명을 대상으로 조사하였다. 조사 대상 중 6명이 일차 방정식의 15문항 중 전체 문항(15문항)에 대하여 반응을 전혀 보이지 않았으므로 이 학생은 분석 대상에서 제외 하였다.

<표III-1-1> 조사 대상 학생 수

학년	성별	인원수(%)	합계(인원수)	총 인원 수
1학년	남	53	107	219
	여	54		
3학년	남	62	112	
	여	50		

<표III-1-2> 자료 분석 대상 학생 수

학년	성별	인원수(%)	합계(인원수)	총 인원 수
1학년	남	52	105	213
	여	53		
3학년	남	59	108	
	여	49		

2. 일차방정식에서 변수가 등호의 좌변에 있는 문항과 우변에 있는 문항에 대한 반응

- 1) 일차방정식 $x + 4 = 9$ 와 $12 = 3 + x$ 에 대한 반응(문항1과 문항7)

서종진

변수가 등호의 좌변에 있는 문항($x + 4 = 9$)을 해결할 때 이항을 사용하여 답을 맞게 산출하고 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현(CS2)한 학생들은, 1학년이 76.2%(80명), 3학년이 60.2% (65명)로 나타났다. 그리고 변수가 등호의 좌변에 있는 문항($12 = 3 + x$)을 해결할 때, 이항을 사용하여 답을 맞게 산출하고 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현(CS2)한 학생들은(CS2), 1학년이 65.7%(69명), 3학년이 55.6% (60명)로 나타났다(<표Ⅲ-2-1-1>, <표Ⅲ-2-1-2>). 이러한 반응은, 학생들이 두 문항의 일차방정식을 해결할 때 이항을 선호함을 의미한다.

분석결과, 1학년 학생들 중, 변수가 좌변에 있는 일차방정식($x + 4 = 9$)의 해를 맞게 산출하고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 표현(CS)한 학생들은 81명으로 나타났다. 이들 중 22명이 변수가 우변에 있는 일차방정식($12 = 3 + x$)을 해결하지 못한 것으로 나타났다(<표Ⅲ-2-1-3>). 이러한 것이 나타내는 의미를 알아보기 위해 상관관계를 구한 결과, 상관계수가 $r = .371$ 로 나타나 상관이 거의 없는 것으로 나타났다(<표Ⅲ-2-1-4>). 즉, 변수가 좌변에 있는 일차방정식($x + 4 = 9$)의 해를 구할 수 있는 학생이 변수가 우변에 있는 일차방정식($12 = 3 + x$)을 해결할 수 있다고 말하기에 어렵다는 것이다.

3학년 학생들 중, 변수가 좌변에 있는 일차방정식($x + 4 = 9$)의 해를 구하고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 표현한 학생들은 67명으로 나타났다. 이들 중 15명이 변수가 우변에 있는 일차방정식($12 = 3 + x$)을 해결하지 못한 것으로 나타났다(<표Ⅲ-2-1-3>). 그리고 변수가 좌변에 있는 일차방정식($x + 4 = 9$)의 해를 구할 수 있는 학생이 변수가 우변에 있는 일차방정식($12 = 3 + x$)을 해결할 수 있다고 할 수 있는지 조사한 결과, 상관계수가 $r = .445$ 로 나타나 약한 상관을 보였다(<표Ⅲ-2-1-5>).

전체적으로 보았을 때, 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식($x + 4 = 9$)을 해결하는 것보다 변수가 등호의 우변에 있는 문항($12 = 3 + x$)을 해결하는데 어려움을 겪는 다고 볼 수 있다.

<표Ⅲ-2-1-1> 일차방정식 $x + 4 = 9$ 에 대한 반응

반응 내용			학 년		전체
			1학년	3학년	
			반응 수(%)	반응 수(%)	반응 수(%)
C	CS	CS1	1(1)	1(0.9)	2(0.9)
		CS2	80(76.2)	65(60.2)	145(67.4)
		CS3	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
NS	CNS2	11(10.5)	7(6.5)	18(8.5)	
	CSNS1	8(7.6)	27(25)	35(16.4)	
E	S	ES2	1(1)	3(2.8)	4(1.9)
		ES5	1(1)	1(0.9)	2(1)
	NS	ENSS1	3(2.9)	3(2.8)	6(2.8)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-1-2> 일차 방정식 $12 = 3 + x$ 에 대한 반응

반응 내용			학 년		전체
			1학년	3학년	
			반응 수(%)	반응 수(%)	반응 수(%)
C	S	CS1	0(0)	2(1.9)	2(0.9)
		CS2	69(65.7)	60(55.6)	129(60.6)
	NS	CNS1	1(1)	0(0)	1(0.5)

일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구

E	S	CNS2	4(3.8)	6(5.6)	10(4.7)
		CNS5	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		CSNS1	2(1.9)	20(18.5)	22(10.4)
	NS	ES1	1(1)	0(0)	1(0.5)
		ES5	3(2.9)	3(2.8)	6(2.8)
		ENS2	9(8.6)	3(2.8)	12(5.6)
		ENS5	2(2)	0(0)	2(1)
	ENSBP		12(11.4)	14(13)	26(12.2)
전체		105(100)	108(100)	213(100)	

<표Ⅲ-2-1-3> 답이 맞고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 해결(CS)한 학생들의 두 문항에 대한 반응

학년 \ 내용	$x + 4 = 9$ 을 해결한 학생 수	$12 = 3 + x$ 을 해결한 학생 수	$x + 4 = 9$ 을 해결한 학생 중에서 $12 = 3 + x$ 을 해결하지 못한 학생 수
1학년	81	69	22
3학년	67	62	15
합계	148	131	37

<표Ⅲ-2-1-4> 1학년 학생들의 문항1($x + 4 = 9$)과 문항7($12 = 3 + x$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$x + 4 = 9$	$12 = 3 + x$
$x + 4 = 9$	1	.371**
$12 = 3 + x$.371**	1
인원수	105	105

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

<표Ⅲ-2-1-5> 3학년 학생들의 문항1($x + 4 = 9$)과 문항7($12 = 3 + x$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$x + 4 = 9$	$12 = 3 + x$
$x + 4 = 9$	1	.445**
$12 = 3 + x$.445**	1
인원수	108	108

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

2) 일차방정식 $3x + 2 = 17$ 와 $14 = 4x + 3$ 에 대한 반응(문항2와 문항10)

일차방정식의 풀이에서 이항을 사용하는 과정에서 등호를 올바르게 표현하고 답을 맞게 산출(CS2)한 1학년 학생들은, 변수가 등호의 좌변에 있는 문항($3x + 2 = 17$)에서 68.6%(72명), 변수가 등호의 좌변에 있는 문항($14 = 4x + 3$)에서 51.4%(54명)로 나타났다(<표Ⅲ-2-2-1>, <표Ⅲ-2-2-2>). 그리고 일차방정식을 풀이에서 이항을 사용하는 과정에서 등호를 올바르게 표현하고 답을 맞게 산출한(CS2) 3학년 학생들은, 변수가 등호의 좌변에 있는 문항($3x + 2 = 17$)에서 63%(68명), 변수가 등호의 좌변에 있는 문항($14 = 4x + 3$)에서 61.1%(66명)로 나타났다(<표Ⅲ-2-2-1>, <표Ⅲ-2-2-2>). 그리고 1학년과 3학년 학생들 중 등식의 성질을 사용한(CS1, CNS1, ES1, ENS1)한 학생들은 거의 나타나지 않고 있다. 이러한 반응은 학생들이 주어진 두 문항을 해결할 때, 등식의 성질 보다는 이항을 선호함을 알 수 있다.

일차방정식($3x + 2 = 17$)의 풀이과정에서 이항을 사용하여 답을 맞게 구하고 등호 관계를 올바르게 표

서종진

현한 1학년 학생 79명 중에서 30명이 일차방정식($14 = 4x + 3$)을 해결하지 못한 것으로 나타났다. 그리고 3학년 학생 73명중에서 12명이 일차방정식($14 = 4x + 3$)을 해결하지 못한 것으로 나타났다(<표Ⅲ-2-2-3>). 이러한 결과는 학생들이 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식을 해결할 수 있다고 해서 변수가 등호의 우변의 일차방정식을 해결할 수 있다고 보기에는 어려움이 따른다고 할 수 있다. 실제로 이러한 의미가 있는 것인지 조사한 결과, 1학년 학생들에게서는 상관계수가 .370으로 상관이 거의 없는 것으로 나타났으며, 3학년 학생들에게서는 상관계수가 .641로 나타나 상관이 있는 것으로 나타났다. 즉, 1학년 학생들은, 변수가 좌변에 있는 일차방정식($3x + 2 = 17$)의 해결하는 것보다 변수가 우변에 있는 일차방정식($14 = 4x + 3$)의 해를 구할 때 더 많은 어려움을 겪는다고 할 수 있다. 그러나 3학년 학생들은 1학년 학생들에 비하여 어려움을 덜 겪는다고 할 수 있다.

<표Ⅲ-2-2-1> 일차 방정식 $3x + 2 = 17$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체 반응 수(%)
			1학년 반응 수(%)	3학년 반응 수(%)	
C	S	CS1	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
		CS2	72(68.6)	68(63)	140(65.7)
		CS3	4(3.8)	4(3.7)	8(3.8)
		CS4	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		CS5	1(1)	0(0)	1(0.5)
	NS	CNS2	8(7.6)	10(9.3)	18(8.5)
		CNS5	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		CSNS1	1(1)	7(6.5)	8(3.8)
E	ES	ES2	3(2.9)	1(0.9)	4(1.9)
		ES5	2(1.9)	3(2.8)	5(2.4)
	ENS	ENS2	0(0)	2(1.9)	2(0.9)
		ENS5	4(3.91)	1(0.9)	5(2.4)
		ENSBP	6(5.7)	11(10.2)	17(8)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-2-2> 일차 방정식 $14 = 4x + 3$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체 반응 수(%)
			1학년 반응 수(%)	3학년 반응 수(%)	
C	S	CS2	54(51.4)	66(61.1)	120(56.3)
		CS3	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
	NS	CNS2	5(4.8)	4(3.7)	9(4.2)
		CNS5	1(1)	0(0)	1(0.5)
		CSNS1	2(1.9)	1(0.9)	3(1.4)
E	ES	ES2	1(1)	3(2.8)	4(1.9)
		ES5	16(15.3)	4(3.7)	20(9.3)
	ENS	ENS2	7(6.7)	3(1.9)	10(4.7)
		ENS5	3(2.9)	0(0)	3(1.4)

일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구

	ENSBP	16(15.2)	26(24.1)	42(19.7)
전체		105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-2-3> 답이 맞고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 해결(CS)한 학생들의 두 문항에 대한 반응

학년 \ 내용	$3x + 2 = 17$ 을 해결한 학생 수	$14 = 4x + 3$ 을 해결한 학생 수	$3x + 2 = 17$ 을 해결한 학생 중에서 $14 = 4x + 3$ 을 해결하지 못한 학생 수
1학년	79	54	30
3학년	73	67	12
합계	152	121	42

<표Ⅲ-2-2-4> 1학년 학생들의 문항2($3x + 2 = 17$)과 문항10($14 = 4x + 3$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$3x + 2 = 17$	$14 = 4x + 3$
$3x + 2 = 17$	1	.370**
$14 = 4x + 3$.370**	1
인원수	105	105

** : 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

<표Ⅲ-2-2-5> 3학년 학생들의 문항2($3x + 2 = 17$)과 문항10($14 = 4x + 3$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$3x + 2 = 17$	$14 = 4x + 3$
$3x + 2 = 17$	1	.641**
$14 = 4x + 3$.641**	1
인원수	108	108

** : 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

3) 일차방정식 $4(x + 2) = 20$ 와 $15 = 3(x + 2)$ 에 대한 반응(문항3과 문항8)

일차방정식 $4(x + 2) = 20$ 와 $15 = 3(x + 2)$ 을 해결할 때, 대부분의 학생들은 양변을 4로 나눗셈을 하거나, 3으로 나눗셈을 하는 방법보다는 분배법칙을 적용한 후 이항을 주로 사용하여 해결한 것으로 나타났다. 그리고 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식($4(x + 2) = 20$)의 풀이하는 과정에서 이항을 사용하고 등호를 올바르게 표현(CS2)한 1학년 학생들은 70(66.7%)명, 3학년 학생들은 66명(61.1%)이었다. 앞의 결과(<표Ⅲ-2-1-1>, <표Ⅲ-2-1-2>, <표Ⅲ-2-2-1>, <표Ⅲ-2-2-2>)와 유사하게 이항을 선호하는 것으로 볼 수 있다.

변수가 등호의 좌변에 있는 문항($15 = 3(x + 2)$)을 해결한 학생이 변수가 등호의 우변에 있는 일차방정식($4(x + 2) = 20$)을 어느 정도 해결하였는지 조사한 결과, 변수가 등호의 좌변에 있는 문항($15 = 3(x + 2)$)을 해결한 학생들 중 1학년은 25명, 3학년은 8명이 변수가 등호의 우변에 있는 문항($15 = 3(x + 2)$)을 해결하지 못한 것으로 나타났다. 그리고 상관계수가 1학년은 .423, 3학년은 .667로 나타났다(<표Ⅲ-2-3-3>, <표Ⅲ-2-3-4>, <표Ⅲ-2-3-5>). 즉, 등호의 좌변에 변수가 있는 문항보다 우변에 있는 문항을 해결하는데 있어서, 3학년 보다 1학년이 더 어려움을 알 수 있다.

3학년에서, 2번 문항과 3번 문항의 상관계수는 .769, 문항 8번 문항과 10번 문항간의 상관계수는 .782로 나타나 각 문항간의 상관성이 있는 것으로 보인다(<표Ⅲ-2-3-6>). 이는 2번 문항을 해결하고 3번 문항을 해결한 학생, 8번 문항을 해결하고 10번 문항을 해결한 학생이 많이 있음을 나타낸다. 이러한 결과로 우리는 분배법칙을 적용하지 못하여 해결하지 못한 예가 적다고 추정할 수 있다. 실제로, 풀이과정에서 분배법칙을 적용하는데 미숙한 학생들이 나타났지만, 문제를 해결한 학생들은 분배법칙을 적용하는 일차 방정식에서

서종진

별 어려움 없이 해결하였다.

<표Ⅲ-2-3-1> 일차 방정식 $4(x+2) = 20$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체
			1학년	3학년	반응 수(%)
			반응 수(%)	반응 수(%)	
C	CS	CS2	70(66.7)	66(61.1)	136(63.9)
		CS3	4(3.8)	4(3.7)	8(3.8)
		CS4	1(1)	2(1.9)	3(1.4)
	CNS	CNS2	7(6.7)	9(8.3)	16(7.5)
		CNS3	1(1)	0(0)	1(0.5)
		CNS5	1(1)	0(0)	1(0.5)
		CSNS1	3(2.9)	9(8.3)	12(5.6)
E	S	ES2	2(1.9)	1(0.9)	3(1.4)
		ES5	6(5.7)	4(3.8)	10(4.7)
	NS	ENS2	0(0)	2(1.9)	2(0.9)
		ENS5	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		ENSBP	8(7.6)	11(10.2)	19(8.9)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-3-2> 일차방정식 $15 = 3(x+2)$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체
			1학년	3학년	반응 수(%)
			반응 수(%)	반응 수(%)	
C	CS	CS2	56(53.3)	70(64.8)	126(59.2)
		CS3	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
		CS4	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
	CNS	CNS2	4(3.8)	5(4.6)	9(4.2)
		CNS5	3(2.9)	4(3.7)	7(3.3)
E	ES	ES2	3(2.9)	1(0.9)	4(1.9)
		ES5	7(6.4)	2(2.8)	10(4.6)
	ENS	ENS2	0(0)	4(3.7)	4(1.9)
		ENS5	14(13.4)	3(2.8)	17(8.1)
		ENSBP	18(17.1)	16(14.8)	34(16)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-3-3> 답이 맞고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 해결(CS)한 학생들의 두 문항에 대한 반응

내용 \ 학년	$4(x+2) = 20$ 을 해결한 학생 수	$15 = 3(x+2)$ 을 해결한 학생 수	$4(x+2) = 20$ 을 해결한 학생 중에서 $15 = 3(x+2)$ 을 해결하지 못한 학생 수
1학년	75	56	25
3학년	72	72	8
합계	147	128	33

일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구

<표Ⅲ-2-3-4> 1학년 학생들의 문항3($4(x+2)=20$)과 문항8($15=3(x+2)$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$4(x+2)=20$	$15=3(x+2)$
$4(x+2)=20$	1	.423**
$15=3(x+2)$.423**	1
인원수	105	105

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의

<표Ⅲ-2-3-5> 3학년 학생들의 문항3($4(x+2)=20$)과 문항8($15=3(x+2)$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$4(x+2)=20$	$15=3(x+2)$
$4(x+2)=20$	1	.667**
$15=3(x+2)$.667**	1
인원수	108	108

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의

<표Ⅲ-2-3-6> 3학년 학생들의 문항(2번, 3번, 8번, 10번)간 상관

문항	2번	3번	8번	10번
2번	1	.769**	.560**	.641**
3번	.769**	1	.667**	.580**
8번	.560**	.667**	1	.782**
10번	.641**	.580**	.782**	1

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의

4) 일차방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 와 $\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$ 에 대한 반응(문항4와 문항11)

일차방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 의 풀이 과정에 나타난 결과를 보면, 이항이나 등식의 성질을 이용하여 답을 맞게 산출하고 풀이과정에서 등호 관계를 올바르게 사용(CS: CS1, CS2, CS3)한 1학년 학생은 48.6%(51명), 3학년이 58.3%(63명)로 나타났다. 그리고 전혀 반응이 없었던(ENSBP) 학생은, 1학년이 16.2%(17명), 3학년이 25%(27명)로 나타났다.

또한, 일차방정식 $\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$ 의 풀이 과정에 나타난 결과에서는, 이항이나 등식의 성질을 이용하여 답을 맞게 산출하고 풀이과정에서 등호 관계를 올바르게 사용(CS: CS1, CS2, CS3, CS4)한 1학년 학생은 37.2%(39명), 3학년이 46.2%(50명)로 나타났다. 그리고 전혀 반응이 없었던(ENSBP) 학생은, 1학년이 21.9%(23명), 3학년이 32.4%(35명)로 나타났다(<표Ⅲ-2-4-1>, <표Ⅲ-2-4-2>).

즉, 분수 계산이 필요한 두 문항에 대한 학생들의 반응에서는, 앞의 문항(문항1과 문항7, 문항2와 문항10, 문항3과 문항8)에 비해 일차방정식의 해결과정에서 등호관계를 올바르게 사용하고 맞는 답을 산출한 학생 수가 적게 나타났으며, 반응이 전혀 없는 학생 수가 많이 나타났다(<표Ⅲ-2-1-3>, <표Ⅲ-2-2-3>, <표Ⅲ-2-3-3>, <표Ⅲ-2-4-3>). 이러한 반응은 학생들이 분수계산이 필요한 일차방정식을 다소 어려워함을 보이고 있는 것이다. 또한, 문제를 해결한 학생들 중 이항을 사용하여 해결한 학생들이 대부분으로 나타나 일차방정식의 해를 구할 때 이항을 선호하는 것으로 보인다(<표Ⅲ-2-4-1>, <표Ⅲ-2-4-2>).

등호의 좌변에 있는 일차방정식($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)을 해결한 1학년 학생이 51명, 3학년 학생이 63명 이었으나, 이 학생들 중 변수가 등호의 우변에 있는 문항($\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$)을 해결하지 못한 학생은 1학년이 18명, 3학년이 17명 이었다. 그리고 두 문항간의 상관계수가 1학년은 .515, 3학년은 .634로 나타나(<표Ⅲ-2-4-3>),

서종진

<표Ⅲ-2-4-4>.<표Ⅲ-2-4-5>, 변수가 우변에 있는 일차방정식($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)을 구한 학생들 중 절반 이상이 변수가 좌변에 있는 일차방정식($\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$)의 해를 구할 수 있음을 의미한다.

<표Ⅲ-2-4-1> 일차방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체 반응 수(%)
			1학년 반응 수(%)	3학년 반응 수(%)	
C	CS	CS1	0(0)	9(8.3)	9(4.2)
		CS2	29(27.6)	53(49.1)	82(38.5)
		CS4	22(21)	1(0.9)	23(10.8)
	CNS	CNS2	2(1.9)	5(4.6)	7(3.3)
		CNS4	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		CSNS1	4(3.8)	4(3.7)	8(3.8)
E	ES	ES1	1(1)	0(0)	1(0.5)
		ES2	5(4.8)	1(0.9)	6(2.8)
		ES3	1(1)	0(0)	1(0.5)
		ES4	8(7.6)	0(0)	8(3.8)
		ES5	2(1.9)	1(0.9)	3(1.4)
	ENS	ENS1	1(1)	0(0)	1(0.5)
		ENS3	1(1)	0(0)	1(0.5)
		ENS4	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		ENS5	8(7.7)	7(6.5)	15(7.1)
		ENSBP	17(16.2)	27(25)	44(20.7)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-4-2> 일차방정식 $\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체 반응 수(%)
			1학년 반응 수(%)	3학년 반응 수(%)	
C	CS	CS1	9(8.6)	8(7.4)	17(8)
		CS2	30(28.6)	39(36.1)	69(32.4)
	CNS	CS3	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
		CS4	0(0)	2(1.8)	2(0.9)
		CNS2	4(3.8)	6(5.6)	10(4.7)
		CSNS1	2(1.9)	2(1.8)	4(1.9)
E	ES	ES1	11(10.5)	2(1.9)	13(6.1)
		ES2	6(5.7)	4(3.7)	10(4.7)
		ES3	1(1)	0(0)	1(0.5)
		ES4	2(1.9)	0(0)	2(0.9)
		ES5	7(6.7)	2(1.8)	9(4.2)

일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구

ENS	ENS1	1(1)	0(0)	1(0.5)
	ENS2	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
	ENS5	9(8.7)	6(5.6)	15(7)
	ENSBP	23(21.9)	35(32.4)	58(27.2)
전체		105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-4-3> 답이 맞고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 해결(CS)한 학생들의 두 문항에 대한 반응

학년	내용	$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 을 해결한 학생 수	$\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$ 을 해결한 학생 수	$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 을 해결한 학생 중에서 $\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$ 을 해결하지 못한 학생 수
1학년		51	39	18
3학년		63	50	17
합계		114	89	35

<표Ⅲ-2-4-4> 1학년 학생들의 문항4($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)과 문항11($\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$
$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$	1	.515**
$\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$.515**	1
인원수	105	105

** : 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

<표Ⅲ-2-4-5> 3학년 학생들의 문항4($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)과 문항11($\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$)의 풀이에 대한 검증

상관관계	$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$
$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$	1	.634**
$\frac{1}{3} = x + \frac{1}{4}$.634**	1
인원수	108	108

** : 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

5) 일차방정식 $12 - 5x = 3$ 와 $4 = 11 - 4x$ 에 대한 반응(문항5와 문항9)

이 두 문항에 대한 학생들의 반응은, 1학년과 3학년 모두 약 56%에서 62%의 학생들이 일차방정식의 풀이 과정에서 이항을 사용하여 답을 맞게 산출하고 등호를 올바르게 사용한 것으로 나타나 학생들이 이 두 방정식을 해결 할 때 이항을 선호함을 보이고 있다.

이들 문항의 풀이과정에서 이항을 사용하고 등호 관계를 올바르게 표현한 학생들은 <표Ⅲ-2-5-3>에 제시되어 있다. 이 표를 보면, 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식($12 - 5x = 3$)을 해결한 1학년 학생이 59명, 3학년 학생이 68명으로 나타났으며, 변수가 등호의 우변에 있는 문항($4 = 11 - 4x$)을 해결한 1학년

서종진

학생은 60명, 3학년은 63명으로 나타났다. 그리고 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식($12 - 5x = 3$)을 해결하고 변수가 등호의 우변에 있는 일차방정식($12 - 5x = 3$)을 해결한 하지 못한 학생 수는 1학년이 6명, 3학년이 8명으로 나타났으며, 문항간의 상관계수는 1학년이 .748, 3학년이 .791로 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식($12 - 5x = 3$)을 해결한 학생들이 변수가 등호의 우변에 있는 문항($4 = 11 - 4x$)을 많이 해결하였음을 나타낸다.

<표Ⅲ-2-5-1> 일차방정식 $12 - 5x = 3$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체 반응 수(%)
			1학년	3학년	
			반응 수(%)	반응 수(%)	
C	CS	CS2	59(56.2)	66(61.1)	125(58.7)
		CS3	0(0)	2(1.9)	2(0.9)
	CNS	CNS2	5(4.8)	5(4.6)	10(4.7)
		CNS5	1(1)	1(0.9)	2(0.9)
		CSNS1	0(0)	3(2.8)	3(1.4)
E	ES	ES2	5(4.8)	4(3.7)	9(4.3)
		ES5	6(5.7)	9(8.4)	15(6.8)
	ENS	ENS2	0(0)	2(1.9)	2(0.9)
		ENS5	13(12.4)	1(0.9)	14(6.6)
		ENSBP	16(15.2)	15(13.9)	31(14.6)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-5-2> 일차방정식 $4 = 11 - 4x$ 에 대한 반응

반응 내용			학년		전체 반응 수(%)
			1학년	3학년	
			반응 수(%)	반응 수(%)	
C	CS	CS2	60(57.1)	62(57.4)	122(57.3)
		CS3	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
	CNS	CNS2	3(2.9)	5(4.6)	8(3.8)
		CNS5	1(1)	0(0)	1(0.5)
		CSNS1	1(1)	1(1)	2(0.9)
E	ES	ES2	3(2.9)	5(4.6)	8(3.8)
		ES5	9(8.5)	6(5.7)	13(6.1)
	ENS	ENS2	0(0)	4(3.7)	4(1.9)
		ENS5	10(9.7)	2(1.9)	12(5.7)
		ENSBP	18(17.1)	22(20.4)	40(18.8)
전체			105(100)	108(100)	213(100)

<표Ⅲ-2-5-3> 답이 맞고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 해결(CS)한 학생들의 두 문항에 대한 반응

학년 \ 내용	12 - 5x = 3을 해결한 학생 수	4 = 11 - 4x을 해결한 학생 수	12 - 5x = 3을 해결한 학생 중에서 4 = 11 - 4x을 해결하지 못한 학생 수
1학년	59	60	6
3학년	68	63	8
합계	127	123	14

<표Ⅲ-2-4-4> 1학년 학생들의 문항5(12 - 5x = 3)과 문항9(4 = 11 - 4x)의 풀이에 대한 검증

상관관계	12 - 5x = 3	4 = 11 - 4x
12 - 5x = 3	1	.748**
4 = 11 - 4x	.748**	1
인원수	105	105

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

<표Ⅲ-2-4-4> 3학년 학생들의 문항5(12 - 5x = 3)과 문항9(4 = 11 - 4x)의 풀이에 대한 검증

상관관계	12 - 5x = 3	4 = 11 - 4x
12 - 5x = 3	1	.791**
4 = 11 - 4x	.791**	1
인원수	108	108

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의,

3. 일차방정식에서 변수가 등호의 우변과 좌변 모두 있는 문항에 대한 반응(문항6)

등호의 양변에 변수가 있는 일차방정식의 풀이 과정에서 학생들은 주로 이항을 이용하여 해결(CS2)한 것으로 나타나, 학생들이 일차방정식($x + 3 = -2x + 6$)의 문제해결 과정에서 이항을 선호함을 알 수 있다.

학생들의 문제해결 결과, 이항이나 등식의 성질을 사용하여 답을 맞게 산출하고 풀이과정에서 등호관계를 올바르게 표현한 학생들은 1학년이 70.6%, 3학년이 56.5%로 3학년이 1학년 보다 다소 낮게 나타났으며, 반응을 전혀 하지 않은 학생은 1학년이 12.4%(11명), 3학년이 20.4%(22명)로 나타났다(<표Ⅲ-3-1-1>).

<표Ⅲ-3-1-1> 일차방정식 $x + 3 = -2x + 6$ 에 대한 반응

반응 내용		학년		전체 반응 수(%)	
		1학년 반응 수(%)	3학년 반응 수(%)		
C	CS	CS1	1(1)	0(0)	1(0.5)
		CS2	70(66.7)	59(54.6)	129(60.6)
		CS3	3(2.9)	2(1.9)	5(2.3)
	CNS	CNS2	3(2.9)	8(7.4)	11(5.2)
		CNS3	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
		CSNS1	0(0)	1(0.9)	1(0.5)
E	ES	ES2	5(4.8)	3(2.8)	8(3.8)
		ES5	6(5.7)	5(4.7)	11(5.2)
	ENS	ENS2	2(1.9)	5(4.6)	7(3.3)

서종진

	ENS5	2(1.9)	2(1.8)	4(1.9)
	ENSBP	11(12.4)	22(20.4)	35(16.5)
전체		105(100)	108(100)	213(100)

4. 일차방정식 문항에 대한 상관

4-1) 1학년 학생들의 각 문항(문항1에서 문항11까지)의 풀이에 대한 문항간의 상관

문항2와 문항3은 상관계수가 .663, 문항5과 문항9는 상관계수가 .748, 문항5와 문항10은 상관계수가 .640, 문항8과 문항10은 상관계수가 .695, 문항9와 문항10은 상관계수가 .737로 나타났다. 그 외 문항간의 상관은 약한 상관이거나 상관이 없는 것으로 나타났다. 이러한 반응의 결과는, 몇 개의 문항을 제외하고는 대부분의 문항의 일차방정식을 해결한 학생이 다른 문항을 해결하였다고 하기에는 어렵다고 할 수 있다.

<표Ⅲ-4-1-1> 1학년 학생들의 각 문항(문항1에서 문항11까지)의 풀이에 대한 문항간의 상관

문항	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번	11번
1번	1	-0.102	-.244*	-.197*	-.206*	.443**	.371**	-0.191	-.242*	-.211*	-0.192
2번	-0.102	1	.663**	.425**	.427**	-0.033	-0.089	.348**	.395**	.370**	.304**
3번	-.244*	.663**	1	.404**	.461**	-0.086	-0.19	.423**	.432**	.398**	.312**
4번	-.197*	.425**	.404**	1	.359**	-0.039	-0.061	.374**	.457**	.373**	.515**
5번	-.206*	.427**	.461**	.359**	1	-0.067	-0.153	.598**	.748**	.640**	.281**
6번	.443**	-0.033	-0.086	-0.039	-0.067	1	.368**	-0.02	-0.096	0.039	-0.107
7번	.371**	-0.089	-0.19	-0.061	-0.153	.368**	1	-0.113	-0.139	-0.1	-.234*
8번	-0.191	.348**	.423**	.374**	.598**	-0.02	-0.113	1	.579**	.695**	.403**
9번	-.242*	.395**	.432**	.457**	.748**	-0.096	-0.139	.579**	1	.737**	.387**
10번	-.211*	.370**	.398**	.373**	.640**	0.039	-0.1	.695**	.737**	1	.432**
11번	-0.192	.304**	.312**	.515**	.281**	-0.107	-.234*	.403**	.387**	.432**	1

** : 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의, * : 상관계수는 0.05 수준(양쪽)에서 유의

4-2) 3학년 학생들의 각 문항(문항1에서 문항11까지)의 풀이에 대한 문항간의 상관

문항2와 문항3의 상관계수는 .769, 2번 문항과 4번 문항은 상관계수는 .739, 2번 문항과 10번 문항은 상관계수는 .641, 3번 문항과 4번 문항은 상관계수는 .637, 3번 문항과 8번 문항의 상관계수는 .667, 4번 문항과 10번 문항의 상관계수는 .693, 4번 문항과 11번 문항의 상관계수는 .634, 5번과 6번의 상관계수는 .642, 8번 문항과 10번 문항의 상관계수는 .782, 10번 문항과 11번 문항의 상관계수는 .612로 나타났다. 이러한 반응의 결과는, 앞의 1학년 학생들의 결과(<표Ⅲ-4-1-1>)와 약간의 차이를 보이고 있다.

전체적으로 볼 때, 같은 유형의 일차방정식에서 변수가 등호의 좌변에 있는 일차방정식과 변수가 등호의 우변에 있는 일차방정식을 모두를 해결한 학생 수는 1학년보다 3학년이 많이 나타났다는 것이다.

일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구

<표Ⅲ-4-1-2> 3학년 학생들의 각 문항(문항1에서 문항11까지)의 풀이에 대한 문항간의 상관

	1번	2번	번	4번	5번	6번	7번	8번	9번	10번	11번
1번	1	0.111	0.094	0.113	.427**	.314**	.445**	0.054	0.06	0.174	0.038
2번	0.111	1	.769**	.739**	0.002	0.031	-0.076	.560**	-0.082	.641**	.484**
3번	0.094	.769**	1	.637**	0.027	0.053	-0.093	.667**	-0.086	.580**	.420**
4번	0.113	.739**	.637**	1	0.013	0.016	-0.158	.558**	-0.041	.693**	.634**
5번	.427**	0.002	0.027	0.013	1	.642**	.503**	-0.095	0.149	-0.007	-0.172
6번	.314**	0.031	0.053	0.016	.642**	1	.453**	-0.066	.195*	-0.032	-0.121
7번	.445**	-0.076	-0.093	-0.158	.503**	.453**	1	-0.172	.200*	-0.134	-0.177
8번	0.054	.560**	.667**	.558**	-0.095	-0.066	-0.172	1	0	.782**	.538**
9번	0.06	-0.082	-0.086	-0.041	0.149	.195*	.200*	0	1	0.06	0.063
10번	0.174	.641**	.580**	.693**	-0.007	-0.032	-0.134	.782**	0.06	1	.612**
11번	0.038	.484**	.420**	.634**	-0.172	-0.121	-0.177	.538**	0.063	.612**	1

**: 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의, *: 상관계수는 0.05 수준(양쪽)에서 유의

5. 일차 방정식의 풀이 과정에 나타난 등호 관계에 대한 반응

일차방정식을 풀이하는 과정에서 등호 관계를 어느 정도 올바르게 표현하였는지 알아보았다. 모든 문항에서 등호 관계를 올바르게 표현하는 학생이 있는 반면, 그렇지 못한 학생들이 있었다(예: <표Ⅲ-5-1>, <표Ⅲ-5-2>). 그리고 문항1에서 문항15까지 조사한 결과, 문항1에서 문항15번까지의 풀이 과정에서 한 문항이라도 등호 관계를 잘못 표현한 반응의 수는, 1학년이 31.4%(33명), 3학년이 28.7%(31명)로 나타났다(<표Ⅲ-5-3>).

반응의 결과는, 한 문항에 대하여 등호관계를 올바르게 표현하여 해결하였다고 해서 다른 문항도 등호관계를 올바르게 표현하여 해결할 수 있다고 보기에는 어렵다. 즉, 한 학생이 해결한 여러 문항의 풀이과정을 비교하여 등호관계를 올바르게 사용할 수 있는지의 여부를 판단하고 그러한 평가를 통하여 일차방정식의 풀이과정을 지도하여야 할 것으로 보인다.

<표Ⅲ-5-1> 문항1에서 문항4 까지 한 학생의 풀이 과정의 예

1번문항의 반응	2번 문항의 반응
방정식 $x+4=9$ 을 풀어라. 풀이과정) $x=9-4$ $x=5$	방정식 $3x+2=17$ 을 풀어라. 풀이과정) $3x=17-2$ $=3x=15$ $=x=5$

서종진

3번 문항의 반응	4번 문항의 반응
방정식 $4(x+2)=20$ 을 풀어라. 풀이과정) $4x+8=20$ $4x=20-8$ $4x=12$ $x=3$	방정식 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ 을 풀어라. 풀이과정) $x=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ $x=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}$ $x=\frac{5}{12}$

<표Ⅲ-5-2> 문항1에서 문항4 까지 한 학생의 풀이 과정의 예

1번문항의 반응	2번 문항의 반응
방정식 $x+4=9$ 을 풀어라. 풀이과정) $x+4=9 \Rightarrow x+9-4=x+5 \quad x=5$	방정식 $3x+2=17$ 을 풀어라. $\frac{17}{13}$ 풀이과정) $3x+2=17 \Rightarrow 3x+17-2=3x+15 \quad 3x+13$ $x=\frac{13}{3}$
3번 문항의 반응	4번 문항의 반응
방정식 $4(x+2)=20$ 을 풀어라. $\frac{20}{4}$ 풀이과정) $4x+8=20 \Rightarrow 4x+20-8=4x+12$ $x=3$	방정식 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ 을 풀어라. 풀이과정) $2x+2+\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \times 2 \Rightarrow 2x+\frac{5}{2}=\frac{4}{3} \Rightarrow 2x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=\frac{4}{3}-\frac{5}{2}$ $x=\frac{4}{3}-\frac{5}{2}$

<표Ⅲ-5-3> 문항1 에서 문항15번까지에 대한 반응

반응	학년		전체 반응 수(%)
	1학년 반응 수(%)	3학년 반응 수(%)	
등호 관계를 한 문항이라도 올바르지 못하게 표현한 학생 수	33(31.4)	31(28.7)	64(30)

IV. 결론

방정식에서 잘못된 등호(기호 '=')의 사용은 중등학교에서 대학교 수준에까지 계속되며 잘못된 등호 사용으로 방정식을 학습을 하는데 있어서 교수학적 단절이 발생할 수 있으므로((Behr, M. et al, 1976; Kieran, 1981; Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996; Bright, 1981, 재인용), 중학교 1학년에서 처음으로 일차방정식을 접할 때 등호관계에 대한 학습은 매우 중요하다 할 수 있다.

학생들은 중학교 1학년 과정에서 일차방정식을 접하게 된다. 이 시기에 일차방정식을 풀 때, 처음에는 등식의 성질을 이용하여 해결하고 차츰 이항을 도입하고 이항을 사용하여 일차방정식을 해결하는 연습을

하게 된다. 이러한 과정을 거친 후나 상급 학년으로 진급하였을 때, 주로 학생들은 일차방정식의 풀이 과정에서 등식의 성질보다는 이항을 이용하여 해결하는 것으로 연구 결과 나타났다. 그리고 학생들은 일차방정식을 풀 때 등식의 성질을 이해하고 이항을 사용하는 학생이 있는 반면 그렇지 않은 학생들이 있다는 것이다. 학생들이 풀이한 답안을 고찰해보면 단지 이항을 등호의 왼쪽이나 오른쪽으로 옮긴다는 의미로 해석하여 사용하는 학생들이 종종 있다는 것이다. 중학교 학생들이 등호의 의미를 진정으로 이해한다는 것은 어려운 일이지만 일차방정식의 풀이과정에서 등식의 성질과 이항을 사용하여 해결할 수 있는 문제를 충분히 경험한다면 등호의 대칭성은 이해할 수 있을 것이다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 중학교 1학년 과정에서, 학생들은 주로 등호의 우변에 변수가 있는 일차방정식보다 등호의 좌변에 변수가 있는 문항을 주로 접하게 된다. 이러한 경험은 변수가 우변에 있는 일차방정식을 해결할 때 오류를 범할 가능성이 제기될 수 있다. 실제로, 연구결과 등호의 좌변에 변수가 있는 문항을 해결하였을지라도 등호의 우변에 변수가 있는 문항을 해결하지 못한 경우가 많이 나타나 좌변보다는 우변에 변수가 있는 일차방정식의 해를 구하는데 어려움을 겪고 있다고 할 수 있다. 같은 학년 학생들 간의 비교에서, 각 문항간의 상관관계를 조사한 결과, 3학년 보다 1학년이 더 어려움을 겪고 있는 것으로 나타났다. 그리고 일차방정식의 풀이 과정에서 등호 관계를 올바르게 표현하는 학생이 상당히 있는 반면, 그렇지 못한 학생이 있는 것으로 나타났다. 또한, 등호의 좌변에 변수가 있는 일차방정식이나 등호의 우변에 변수가 있는 일차방정식의 문제를 해결할 때, 학생들은 주로 등식의 성질을 이용하여 해결하기 보다는 이항을 사용하여 해결한 것으로 나타났다.

그러므로 우변에 변수가 있는 문항을 자주 접할 수 있는 기회를 제공하여 문제해결에 도움을 줄 수 있도록 하여야 할 것이고, 이항과 더불어 등식의 성질을 사용하여 해결할 수 있는 훈련이 필요한 것으로 보인다. 또한, 장기간의 시간을 두고 조사할 필요성이 있으며, 이러한 조사를 통하여 오류를 교정하기 위한 노력이 필요할 것으로 보인다.

둘째, 일차방정식의 여러 유형의 문항(등호의 좌변에 변수가 있는 문항과 등호의 우변에 변수가 있는 문항, 그리고 등호의 좌·우변에 변수가 있는 문항)를 구성하여 학생들의 반응을 조사한 결과, 약 30% 이상의 학생들이 등호 관계를 이해하지 못하고 있는 것으로 고려된다. 그리고 어떤 문항은 등호 관계를 올바르게 표현하였지만 다른 문항은 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 것으로 나타났다. 일차방정식의 풀이 과정에 나타난 이러한 반응은, 한 문항이나 몇 개의 문항의 풀이 과정을 보고 그 학생이 등호 관계를 올바르게 표현할 수 있다고 판단하기에는 어려움이 따른다는 것이다. 그러므로 방정식의 교수·학습에서 여러 유형으로 구성된 평가 문항을 구성하여 테스트 한 후에 학생들의 풀이 과정을 면밀히 검토하거나, 개별 면담을 통하여 학생들의 학습 상황을 파악해야 할 것이다. 또한 이를 토대로 피드백을 통한 오류 교정이 이루어져야 할 필요성이 있다.

셋째, 조사결과 일차방정식 문제에서, 등호의 좌변에 변수가 있는 일차방정식 보다 등호의 우변에 변수가 있는 일차방정식을 해결하는데 어려움을 겪고 있으며, 일차방정식의 풀이 과정에서 등호 관계를 올바르게 표현하지 못하는 학생이 다소 있는 것으로 나타났다. 이러한 것은 등호의 좌변에 변수가 있는 경우와 우변에 있는 경우 그리고 등호의 양변에 변수가 있는 경우 등등의 일차방정식 문제를 해결하고 난후 해결한 일차방정식의 풀이 과정과 결과를 확인하는 반성과정에서의 가역적 사고와 밀접한 관련이 있다. 그러므로 초등학교에서 예측, 확인과 관련된 문제를 해결할 때 연산의 순서를 바꾸어 추론하는 능력을 충분히 기를 수 있도록 하고, 차후 일차방정식의 풀이에서 반성 과정을 통하여 등식의 참과 거짓을 판단할 수 있고, 문제 상황의 전

체를 스스로 조정할 수 있는 능력을 기를 수 있도록 교수·학습이 이루어져야 할 것으로 보인다.

참고문헌

- Behr, M. et. al (1976). "How Children View Equality Sentences." PMDC Technical Report No.3. Tallahassee: Florida State University(ERIC Document Reproduction Service No. ED 144802).
- Bright, G. W. (1981). Student Procedure in Solving Equations. National Council of Teachers of Mathematics 59th, St. Louis, Mo, April 22-25.
- Byers, V. & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, pp.24-27
- Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing Meaning for the Concept of Equation, *Mathematics Teacher*: In B. Moses(ed), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications* (Paperback), National Council of Teachers of Mathematics(1999), pp.181-188
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), pp.59-78
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations, *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), pp.39-65.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol, *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), pp.317-26.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school Algebra(*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*): In B. Moses(ed), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications* (Paperback), National Council of Teachers of Mathematics(1999), 341-361.
- Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J.M. Moser(Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA(83-91)*. Madison: University of Wisconsin.
- Weaver, Fred. (1971) "Some Factors Associated with Pupils' Performance Levels on Simple Open Addition and Subtraction Sentences." *The Arithmetic Teacher*, pp.513-519.
- Weaver, Fred. (1973) "The Symmetric Property of the Equality relation and Young Children's Ability to Solve Open Addition and Subtraction Sentences." *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, pp.45-46

The Study of Response' Type according to a Position of Variable on Linear Equation* - Centering around the First and Third Grade of Middle School -

Seo, Jong Jin²⁾

Abstract

Students have difficulties in solving linear equation problems with a variable on the right side rather than linear equation problems a variable on the left side of the sign of equality. In order for students to overcome such difficulties, opportunities to experience many types of basic linear equation problems would have to be provided. Also, it is necessary to examine the process of students' problem solving process by constructing various types of evaluation item and test them in instruction and learning of linear equations, or grasp students' studying statues through individual interview and based on theses, error correction through feedbacks have to be achieved.

Key Words : Linear equation, Equal relation, Characteristics of equality, Transposition

* This paper has been supported by the 2009 Hannam University Research Fund.

2) Hannam University (jjseo@hnu.ac.kr)