

고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생¹⁾

한 세 호* · 장 경 윤**

본 연구는 CAS가 도입된 이후의 우리나라 수학교육에 대비하여 고등학교 수학 활동에서 CAS의 도구발생 과정을 통찰하고, 중등수학교육에서 도구화된 CAS의 활용 가능성을 탐색하기 위해 설계되었다. 이를 위하여 본 연구자는 CAS에 기반 한 개념중심 수학과제 학습과 문제해결을 각각 고안하였으며 고등학교 1학년생 7명을 대상으로 총 12차시의 수업을 실시하고 수업녹화자료와 면담을 통해 학생들의 활동을 분석하였다. 분석결과 학생들은 CAS를 이용하여 수준 높은 응용문제를 다룰 수 있는 것으로 나타나 CAS가 교육과정 내용수준에 영향을 줄 수 있음을 확인할 수 있었고, 또 도구화된 CAS에 기반 한 무리방정식 문제해결활동을 통해 CAS가 교육과정의 제시 순서에 영향을 줄 수 있음을 발견 하였다. 이 연구는 고등학교 수학교육에서 CAS의 도구발생을 분석하여 사례를 제공함으로써 CAS가 도입된 이후의 우리나라 수학교육에 대비한 기초연구가 될 것이다.

1. 서 론

수학교육, 특히 대수교육에서 최근 응용과 모델링을 중시하는 방향으로 강조점이 변화하고 있는데, 초기에 과학적 목적에서 컴퓨터 소프트웨어로 개발된 컴퓨터대수체계(Computer Algebra System: 이하 CAS)는 수학교육의 이러한 변화에 힘을 실어 줄 수 있는 대안으로 최근에 주목받고 있다.

CAS에 관한 국외 연구에 의하면, 외국에서는 기업체 및 산업현장에서 CAS 사용이 상당히 보편화되고 있고, 대학수준의 미적분, 대수, 확률과 통계 등 다양한 수학강좌에 CAS를 적극 사용(O'Callaghan, 1998; Mayes, 1993, 1995, 1998; Zibiek, 2003)하고 있음을 볼 수 있다. 뿐

만 아니라 최근에는 CAS의 교육적 활용에 대한 연구(Artigue, 2001; Lagrange, 2001, 2005; Trouche, 2002, 2005; Guin et al., 2004; Kieran & Drijvers, 2006)가 활발히 이루어지고 있으며, 중등 수준에서도 CAS가 널리 사용되고 있다.

우리나라에서도 기업체 및 산업현장에서는 CAS의 사용이 다른 선진국처럼 상당히 보편화 되어 있다. 그러나 사회적 요구와 달리 대학 수준 강좌에서 CAS를 적극적으로 사용하는 것은 아직 미흡(장경윤, 2007, 2008; 류희찬, 2005; 차용순, 2001; 한세호, 2001)하다. 중등 수학교육에서도 “컴퓨터나 계산기를 수학교육에 적극 활용”(교육부, 2000, p.281)”하라는 제7차 수학과 교육과정의 권고와 “공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용(교육인적자원부, 2007, p.280)”하라는 개정 교육과정의 권고에도

* 수지고등학교 교사, hanseho1@hanmail.net

** 건국대학교, kchang@konkuk.ac.kr

1) 이 논문은 2009년 한세호의 박사학위논문 일부를 요약한 것임.

불구하고 CAS의 활용은 아직 교육과정 안에서 적절한 방향을 찾지 못하고 있는 실정이다.

한편, 외국의 여러 연구(Heid & Edwards, 2001; Pierce & Stacey, 2002)는 CAS가 수학교육에 긍정적인 역할을 하는 것으로 보고하고 있는데, Edwards(2003)는 CAS가 수학 활동 횟수를 손쉽게 증가시킴으로써 패턴 발견을 용이하게 하고, 방정식의 해를 구하는 활동에서 계산기를 화이트박스(white box)로 사용함으로써 전통적인 지필방법이 제공해주지 못하는 이점을 얻을 수 있다고 하였다.

최근 프랑스 수학자들을 중심으로 수행되는 여러 연구(Artigue, 2001, 2005; Lagrange, 2001, 2005; Trouche, 2000, 2002, 2005)는 단순한 인공물이 유용한 도구(instrument)가 되는 것은 자연스러운 일이 아님을 언급하면서, 인공물이 도구로 변화해야 한다는 점에 주목하고 그 변화 과정을 도구발생(instrumental genesis)이라 칭하였다. 또한 Artigue(2001)는 CAS가 수학적 힘을 신장시킬 수 있기 위해서는 유용한 도구로 발생되어야 한다고 주장하였다.

Artigue(2001)는 미래지향적인 수학교육에 CAS가 유용한 도구로 발생되어야만 중등 수학교육에서 CAS 활용의 장점을 극대화시킬 수 있다고 하였다. 급변하는 정보화 시대의 흐름과 함께 우리나라 수학교육학계도 수학적 힘을 증진시킬 수 있는 CAS의 역할과 활용에 주목하기 시작하였으나, 학교현장에서 CAS에 기반한 수업은 아직 논의되지 않고 있는 실정이다. 따라서 우리나라에서도 CAS 도입에 대비한 연구가 필요하다.

본 연구는 우리나라 수학교육에서 CAS의 도구발생 과정을 통찰하고, 중등 수학교육에서 도구화된 CAS의 활용 가능성을 탐색해 보고자

설계되었다. 이를 위하여 선행 연구(Drijvers, 2003)를 기초로 CAS에 기반 한 개념중심 수학 과제 학습과 도구화된 CAS를 활용한 문제해결 활동을 고안하였다. 이 연구의 결과는 우리나라 수학교육에의 CAS 도입에 대비한 기초연구로서 유용한 정보를 제공할 것이다.

II. 이론적 배경

1. 컴퓨터대수체계(CAS)

최근 매우 강력한 수학활동 지원체제로 주목받고 있는 CAS는 초기에는 과학적 목적의 컴퓨터 소프트웨어로 개발되었다. CAS는 다양한 표상을 제공하고, 수치 계산 뿐 아니라 식의 계산, 통계처리와 분석, 그 결과의 시각적 표현, 표와 리스트 작업, 벡터나 행렬의 연산, 프로그래밍 등을 수행한다. CAS의 중요한 특징은 '식을 간단히 하기', '인수분해 및 전개', '방정식의 대수적 풀이' 등 대수식의 조작을 지원한다는 점이며, 컴퓨터 소프트웨어 Derive, Maple, Mathematica 등과 같은 종류가 있다. 본 연구에서 사용된 CAS는 Classspad300 카시오 계산기이다.

가. CAS의 종류 및 역사

CAS의 종류와 역사를 수학교육 컴퓨터 대수(CAME) 심포지엄의 홈페이지(<http://www.lkl.ac.uk>)와 T³(Teachers Teaching with Technology)의 홈페이지(<http://www.t3ww.org>)를 토대로 정리하면 다음과 같다.

CAS는 *Mathematica*, *Maple*, *Axiom*, *Macsyma*,

2) CAS가 지필기법을 '키 누르기'로 대체하여 일련의 연산 절차를 드러내지 않고 결과를 출력한다면 이 때 CAS는 블랙박스가 된다. 반면 일련의 연산 절차를 단계적으로 드러내고, 출력된 결과에 대해 사용하는 주체가 완전히 이해하고 있다면 이 때 CAS는 화이트박스가 된다.

Reduce 및 *Magma* 등과 같은 소프트웨어로 구성되어 있다. 그것들은 종종 폭넓은 범위의 문제를 풀어내며, 그래프를 구상해 내고, 데이터를 조작하며, 삼각법(trigonometry), 제곱근 등과 같은 몇몇 과제를 풀기 위한 함수가 내재되어 있다. 그것들은 과학자와 엔지니어들에 의해 널리 사용되며 멋진 사용자 환경을 제공한다. CAS의 종류, 회사 및 발표년도는 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> CAS의 종류 및 발표년도

| 종류 | 만든 사람 및 회사 | 발표년도 |
|--------------------|------------------------------------------|------|
| <i>Reduce</i> | Anthony C. Hearn | 1968 |
| <i>Macysma</i> | MIT Project MAC and Symbolics | 1978 |
| <i>MuMATH</i> | Soft Warehouse | 1980 |
| <i>Maple</i> | Maplesoft | 1984 |
| <i>Derive</i> | Soft Warehouse | 1988 |
| <i>Mathematica</i> | Wolfram Research | 1988 |
| <i>LiveMath</i> | Math Monkeys | 1991 |
| <i>Magma</i> | University of Sydney | 1993 |
| <i>Maxima</i> | MIT Project MAC and Bill Schelter et al. | 1998 |
| <i>classpad300</i> | CASIO | 2001 |
| <i>CASSIOPEIA</i> | CASIO-MAPLE | 2001 |
| <i>Sage</i> | William A. Stein | 2005 |
| <i>TI</i> | Texas Instruments | 2008 |
| <i>Xcas</i> | Bernard Parisse | 2008 |

최초의 대중적인 CAS는 *muMATH*와 *Reduce*, *muMATH*에 기반한 *Derive*, 그리고 *Macysma*였는데, *Maxima*라 불리는 *Macysma*의 보급판이 활발하게 사용되고 있다. 오늘날, 가장 인기 있는 시판용 시스템은 *Mathematica*와 *Maple*인데, 수학 연구자와 과학자, 그리고 공학도들이 일반적으로 사용하고 있다. 무료로 사용 가능한

*Sage*와 *Xcas* 등도 대중적으로 사용된다.

Texas Instruments(TI)에서는 1995년에 *Derive* 소프트웨어에 기초한 TI-92 계산기를 출시했고, 2007년에 최신의 *TI-Nspire CAS*가 출시되었다. 카시오 회사는 FX-9750G PLUS 계산기를 시작으로 2001년에 최신의 *ClassPad300* 계산기를 출시하였다. 최근 계산기들은 기능이 풍부하고 상대적으로 비싸지 않은 핸디형 CAS라는 장점을 지니고 있다.

CAS가 다룰 수 있는 수식에는 일반적으로 기본적인 함수식(sine함수, 지수함수, 등), 다양한 특수 함수식(Γ , ζ , 베셀 함수, 등), 최적화, 미분, 적분, 단순화, 합계 및 식의 결과, 급수, 행렬식 등과 같은 많은 변수를 지닌 다항식이 포함된다.

CAS에 대한 정의를 국내 연구자들(류희찬, 2005, 장경윤, 2005)의 문헌을 토대로 정리하면 다음과 같다.

- 컴퓨터대수체계(CAS)는 매우 강력한 수학 활동 지원체제로 최근 주목받고 있으며, 초기에 과학적 목적에서 컴퓨터 소프트웨어로 개발되었다. CAS는 다양한 표상을 제공하고, 수량 계산 뿐 아니라 식의 계산, 통계처리와 분석, 그 결과의 시각적 표현, 표와 리스트 작업, 벡터나 행렬의 연산, 프로그래밍 등을 수행한다. CAS의 중요한 특징은 식을 간단히 하기, 인수분해 및 전개, 방정식의 대수적 풀이 등 대수식의 조작을 지원한다는 점이며 컴퓨터 소프트웨어 *Derive*, *Maple*, *Mathematica* 등과 같은 종류가 있다.
- CAS란 지필로 하기에는 인지적으로 부담이 되는 계산이나 그래프 그리기를 빠르게 실행시켜주는 컴퓨터 소프트웨어로

정의한다. 여기서 계산은 수 계산과 문자의 변환과정을 모두 포괄하며, 그래프를 단순히 빠르게 그릴 수 있을 뿐 아니라 다양한 측면에서 조작할 수 있게 해주는 환경이다. CAS는 초기에 컴퓨터 소프트웨어로 개발되었으며 1980년대 이후 지금까지 발전을 거듭하여 최근에는 휴대용기에 내장되어 출시되고 있다.

- 방정식 풀이
- 식 간단히 하기
- 문자식의 인수분해와 전개
- 방정식의 대수적인 풀이
- 함수 그래프 그리기
- 정확한 값과 근사치를 표현하는 기능
- 함수의 최댓값과 최솟값 구하기
- 함수 값을 표로 표현하기

CAS란 정교한 계산을 신속하게 수행할 뿐 아니라 대수적인 기호 조작 역시 정확하게 수행해내도록 고안된 체계이다. CAS는 다양한 표상을 많이 제공함으로써 수학의 개념적 대상에 대한 연구를 강조하는 수학 교육과정의 실행을 가능하게 할 수 있다.

2. 도구 발생

Trouche(2003)는 연장(tool)과 도구(Instrument)를 구별하고, 기술공학과 같은 인공물이 수학 학습 과정에 기여하려면 도구로 발생되어야 한다고 주장하였다. 도구발생은 단순한 연장이나 인공물에 지나지 않던 CAS 등의 IT가 점차 유용한 도구로 발전되어 가는 학습 과정을 의미한다(Kieran & Drijvers, 2006).

나. CAS의 기능

CAS는 수량적 계산과 통계처리 함수의 시각적 표현과 분석, 표와 리스트 작업, 프로그래밍 기능 등 그래픽계산기가 가지고 있는 일반적인 기능 외에 식 간단히 하기, 문자식의 인수분해와 전개, 방정식의 대수적인 풀이, 벡터나 행렬의 연산, 함수의 합성과 역함수 구하기, 미적분을 포함한 함수식의 조작 등 표와 대수식의 조작이 가능하다는 점이 가장 두드러진 특징이며, 함수의 2D, 3D 그래프 표현을 제공하는 등 수학활동을 위한 매우 강력한 지원체계이다.

최근 프랑스 수학교육 연구자들은 도구발생에 주목하면서, 그 발생과정을 이해하는 틀로 도구적 접근(Instrumental Approach)을 수용하여, CAS 활용이라는 맥락에서 학생과 CAS간의 상호작용과 교수·학습에 미치는 영향을 이해하는데 적용하고 있다.

그러므로 CAS에서 제공되는 명령어나 함수는 종류와 수량 면에서 계산기보다 매우 많으며, 이 명령들은 기기에 따라 다소 차이가 있으나 보조 메뉴 형태로 간편하게 제시되기도 한다.

도구적 접근 또는 도구장착 이론은 인지공학(Rabardel, 1995)에서 발생한 것으로 연장의 활용을 다룬다. 도구적 접근의 핵심은 연장이나 인공물 '그 자체'가 자동적으로 매개적인 도구(instrument)가 되는 것은 아니라는 것이다. Verillon과 Rabardel(1995)은 도구를 심리적인 구성물로 보고 물질적인 연장과 구별하였는데, 도구는 그 자체로 존재하지 않으며, 행위 주체가 그것을 자신을 위해 사용하고, 자신의 활동 안에 통합시킬 때, 비로소 도구가 된다고 하였다.

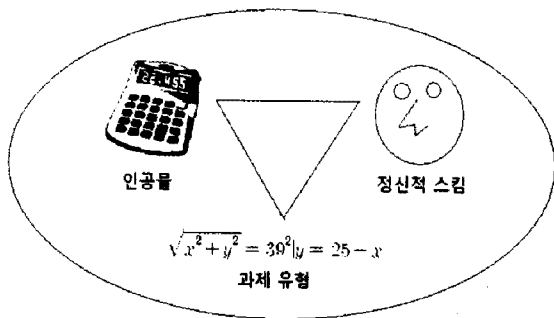
본 연구에서 사용한 CAS는 Casio에서 개발한 *classpad300*(2001년판)이다. 본 연구에서 *classpad300*의 기능 및 사용법은 다음과 같다.

Drijvers(2003)는 도구발생 과정의 한 예로 망

치의 도구발생에 대해 다음과 같이 언급하고 있다.

간단한 예로, 망치를 들어보자. 망치는 전에 그것을 사용해 본 적이 없거나 다른 사람이 사용하는 것을 본 적이 없다면, 사용자가 될 사람에게 처음에는 무의미할 것이다. 망치와 같은 어떤 것에 대한 필요성을 느낀 후나 새로운 사용자가 그것을 사용하는 경험을 한 후에야, 망치는 점차 활동을 매개하는 가치 있고 유용한 도구(instrument)로 발전되어 간다. 숙달된 사용자는 그것을 간편한 방식으로 사용하는 기능을 발달시키며, 어떤 환경에서 망치가 유용한지를 알고 있다(Drijvers, 2003, P244).

이와 유사한 연장과 도구의 차이는 계산기와 CAS 같은 다른 인공물에서도 나타날 수 있다. Rabardel(1995)은 인공물(또는 인공물의 일부)과 사용자, 그리고 과제의 유형(수학 과제) 사이에 유의미한 연관성이 있을 때를 도구라고 했다. 인공물, 스킴, 수학과제에 대한 연관성을 도식화 하면 [그림 II-1]와 같다.



[그림 II-1] 도구: 인공물 - 정신적 스킴 - 과제의 3자 관계(출처: Drijvers, 2003, p.96)

도구는, 이러한 관점에 따르면, 다루어지는 연장의 일부(기호 계산기나 CAS의 모듈), 특정 유형의 과제를 달성하기 위해 연장을 효과적으로 사용하는 법을 알고 있는 사용자(학생), 그

에 수반되는 정신적 스킴으로 구성된다.

스킴(scheme)은 여러 학자에 따라 다양한 의미로 사용될 수 있으나 본 연구에서는 Vergnaud (1996)의 스킴에 대한 정의, 즉 역동적인 기능 통합체(Dynamic Functional Entity)로 정의한다. 스킴은 주어진 상황에 대한 불변성을 지닌 행동 구성물이고, 그것은 의도와 목표를 지니고 있다. 스킴 안에 내재되어 있는 지식을 조작적 불변성(operational invariant)이라 하며, 이 조작적 불변성은 스킴 안에서 핵심적인 위치를 차지한다. 따라서 두 스킴은 서로 다른 조작적 불변성을 지니는 순간 서로 다른 것이 될 수 있다.

Trouche(2005)는 도구발생의 결과물이 활용 스킴(utilization scheme)의 형태로 압축된다고 하였다. 달리 표현하면, 도구발생은 형성된 활용 스킴들로 구성된다.

활용 스킴은 사용스킴(Utility Scheme, UsageScheme)³⁾과 활동 그 자체를 다루는 도구화된 행동스킴(Instrumented Action Scheme: 이하 IAS)이라는 두 가지 차원으로 구분될 수 있다(Guin & Trouche, 2002; Rabardel, 1995; Trouche, 2000).

첫 번째 범주에는 인공물을 특정 목적에 맞게 조절함으로써 그것의 기능을 변화시키거나 확장시키는 사용스킴이 포함된다. 예를 들어, PC는 새로운 워드 프로세스 패키지 버전으로 업그레이드 될 수 있고, 계산기 메뉴도 개인의 취향에 맞게 설정될 수 있으며, 부가적인 프로그램과 적용이 그래픽계산기에 다운로드 될 수도 있다. Drijvers(2003)은 이러한 스킴들이 인공물의 도구활용(instrumentalization)과 연관된다고 보았으며 도구활용이란 사용자가 연장을 조정하는 것으로 보았다.

두 번째 범주는 IAS로 구성되는데, Drijvers

3) 2005년에는 이를 usage scheme으로 칭하였다.

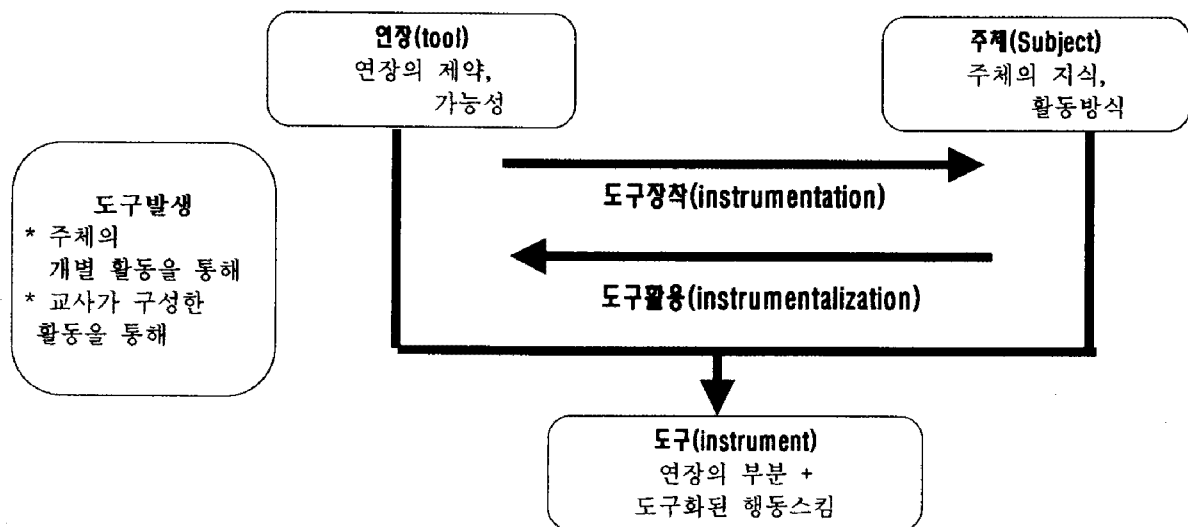
(2003)는 이것을 특정 유형의 문제를 해결하기 위해 기술공학 연장을 활용하기 위한 통일성 있는 유의미한 스킴이라고 정의하였다. 예를 들어, 워드 프로세스 환경에서 글을 쓰면서 텍스트의 블록을 옮기는 과제는 **잘라내서 붙여넣기(cut-and-paste)** 스킴으로 해결될 수 있다. 숙련된 사용자는 이 잘라내서 붙여넣기 스킴을 자판을 순차적으로 두드리거나 마우스를 클릭하는 방식으로 빠르고 정확하게 적용한다. 반면, 미숙한 사용자는 자신이 다른 곳으로 옮기고자 하는 텍스트 블록이 잘라낸 뒤에 잠시 보이지 않는다는 사실과 같은 기술적·개념적 부분과 씨름해야 한다. 이에 **도구장착 과정(instrumentation process)**은 특정 종류의 과제를 수행하는데 유용한 도구화된 행동 스킴의 형성을 이끈다고 할 수 있다.

Trouche(2005)는 도구발생을 사용스킴과 IAS가 복합된 것으로 보고 있으며, 행위자가 연장 쪽으로 활동하는 방향이 **도구활용(사용스킴)**으로, 연장이 행위자 쪽으로 활동하는 방향이 **도구장착(IAS)**으로 정의하고 있다. ([그림II-2]참고). 도구발생은 이러한 인공물이 교수학적으로

유용한 도구가 되는 과정을 고려하는 것으로 도구발생의 관점에 볼 때, 인공물인 CAS 등의 IT가 도구로 되는 것은 자연스런 과정이 아니며 상당한 시간과 노력이 요구되는 과정이다. 또한 도구발생관점은 기기 사용을 위한 기술적 기능 숙달 측면과 CAS 등 IT 환경에서 학습자의 수학적 이해와 통찰을 통한 행동 스킴 개발 측면 모두에 주목한다.

도구적 접근에서는 도구발생의 두 구성요소에 주목하였는데, Artigue (2001)는 도구발생을 IT(인공물)와 주체(학생)의 두 방향에서 진행되는 것으로 보았다. 도구발생의 첫 번째 방향은 “주체(subject)에서 인공물을 향하는 것으로, 점진적으로 인공물에 가능성을 실어 그것을 특정 용도로 변형”하는 **도구활용**이며, 두 번째 방향은 인공물에서 주체로 향하는 것으로, 주어진 과제에 효과적인 반응 기법을 점진적으로 구성하도록 도구화된 행동스킴(IAS)을 개발 또는 전유하게 하는 **도구장착**이다.

도구활용 과정에서는 주체의 수학지식이나 작업방식이 중요한 변수로 작용하며, 도구장착 과정에는 인공물 자체의 특성이 가능성과 억제



[그림 II-2] 두 과정의 복합체로서의 도구발생(출처:Trouche, 2003, p.8, 그림3)

력으로 동시에 작용한다(장경운, 2008). CAS의 가능성이란 IT와 CAS의 특징으로 지도계열의 변화, 수학적 모델링 용이, 계산 알고리즘보다는 의미에 주목하는 등의 인공물 자체가 가지는 가능성을 의미한다. 또한 CAS 장착이 학습의 억제력으로 작용하기도 하는데, 이는 CAS를 사용하기 위하여 요구되는 지식과 방법이 사용자의 기존 인식과 차이가 날 때 발생한다. 억제력은 대부분 학생들이 CAS 사용으로 예기치 않은 답을 얻게 되는 상황에서 나타나는데, Drijvers(1999)는 CAS 장착과정에서 우연히 만나게 되는 CAS의 억제력이 또 다른 수학주제에 대한 학습 기회를 제공한다고 하였다.

요약하면 도구발생이란, 단순한 연장(tool)이나 인공물(artifact)에 지나지 않던 것이 점차 유용한 도구(instrument)로 발전되어 가는 학습과정을 의미한다. 본 연구에서는 CAS가 도구로 발생되었을 때 'CAS가 도구화 되었다'고 하고, 이때 CAS를 도구화된 CAS라 정의 하였다.

III. 연구 방법

1. 대상

본 연구의 대상은 경기도 용인시에 소재한 S 고등학교 1학년 남학생 7명이다. 모두 연구자가 수학을 지도하고 있는 학급 학생들로 본인의 희망에 의해 자원하여 본 연구에 참여하였다. 활동 I과 활동 II에서는 7명 모두 수업에 참여하였다.

학생들의 모의고사 성적은 2008년 11월 시행된 대학수학능력 모의평가에 대한 등급이다. 학교성과와 모의평가는 전체를 9등급으로 나누고 상위 0%~4%를 1등급, 4%~11%를 2등급, 11%~23%를 3등급, 23%~40%를 4등급, 40%~

60%를 5등급으로 구별한다. 연구 참여자들의 학교 내신 성적과 모의고사 성적은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 학생들의 학교성적 및 모의고사

| 성명 | 학교성적 | 모의고사 |
|-----|------|------|
| 학생1 | 1등급 | 1등급 |
| 학생2 | 3등급 | 1등급 |
| 학생3 | 5등급 | 3등급 |
| 학생4 | 3등급 | 2등급 |
| 학생5 | 5등급 | 1등급 |
| 학생6 | 5등급 | 2등급 |
| 학생7 | 3등급 | 2등급 |

S 고등학교는 비평준화 지역의 학업성취도가 우수한 학교로 내신 성적에 비해 모의고사 성적이 전반적으로 높다. 학생들의 가정환경 또한 중상류층 학생들로 구성되었으며 7명 모두 집에 인터넷 사용이 가능한 컴퓨터를 갖추고 있었다.

2. 도구

본 연구를 위하여 활동지 I, II의 2종 세트를 제작하여 사용하였다. 각 활동지 구성은 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 연구도구의 구성

| 과제 세트 | 주제 | 시 수 | 비고 |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------|-----|------|
| 활동지 I (개념중심 수학과제 학습세트) | · 일, 이차방정식 풀이 · 대입과 식의 변형 · 미지수 상수를 포함한 연립방정식 풀이 · 연립방정식 응용 | 9 | 활동I |
| 활동지 II (문제해결 과제세트) | · 미지수 상수를 포함한 무리 방정식 해구하기 | 3 | 활동II |

활동지 I은 CAS에 기반 한 개념중심 수학과제 학습에서 CAS의 도구발생 과정 고찰을 목적으로 Drijvers(2003)의 연구를 토대로 개발되었으며 일차방정식 해 구하기, 대입과 식의 변형, 연립방정식 해 구하기, 연립방정식 응용문제 풀이 과제 등 총 9문항으로 구성되어 있다. 활동지 II은 CAS에 기반 한 문제해결활동이 수학과 교육과정의 내용 제시 순서에 미치는 영향을 분석하기 위해 본 연구자가 개발하였으며, 계수와 상수가 문자로 표현된 무리방정식의 해 구하기 과제 등 총 2문항으로 구성되어 있다.

3.절차

본 연구를 위해, 7명의 학생을 대상으로 50분 수업을 1차시로 하여, 활동 I에 9차시, 활동 II에 3차시 등 총 12차시에 걸쳐 수업을 진행하였다.

학생들이 연구에 참여한 기간은 활동 I이 2008년 12월 30일에서 2009년 1월 15일까지 동계방학 기간 중 오후에, 활동 II는 2009년 3월 5일에서 2009년 3월 6일까지 개학 후 방과 후 야간 자율학습 시간에 실시되었다. 활동 장소는 프로젝션 TV가 구비된 특별실에서 이루어졌고, 활동시간은 겨울방학기간 중에는 오후 2시와 3시 사이에, 개학 후 활동은 야간자율학습 시간을 할애하여 7시와 8시 사이에 이루어졌다.

수업시간에 학생들이 사용한 계산기는 Casio Classpad300이었으며 개인당 1개씩 주어졌다. 교사 노트북에는 Classpad300 계산기 소프트웨어가 내장 되어있고, 프로젝션 TV와 연결되어 있었으며, 교사와 학생들이 자유롭게 사용할 수 있었다. 또한 계산기는 수업 후에도 자유롭

게 사용할 수 있도록 실험 기간 동안 학생들에게 대여하였다.

지도교사는 본 연구자로 경력 16년차인 수학교사이며 5년간의 CAS 활용 수업 경험을 갖고 있다. 연구에 참여한 7명의 학생들은 협동학습 및 개인별 탐구학습을 자유롭게 할 수 있도록 했다. 수업을 녹화하기 위해 고정식 카메라 한 대를 교실 뒤편에 설치하였으며, 이동식 카메라로 학생들의 개별 활동을 녹화하였다. 지도교사인 본 연구자는 실험과정의 학습조력자로서 활동 I에서는 학생들이 계산기의 기능 설명을 도와주는 조력자, 활동 II에서는 문제 해결 활동을 촉진시키는 발문자 및 조력자로서의 역할을 하였다. 수업은 개념중심 수학과제 학습, 문제해결 활동 순으로 진행하였다(<표 III-3>, <표 III-4> 참고).

<표 III-3> 활동 I 수업 절차

| 차시 | 개념중심 수학과제 학습(활동 I) |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none"> 계산기 활동에 필요한 기초적인 활동 · 칠판에 기록된 간단한 수식기호 입력하기 (예: $\sqrt{16} + \frac{4}{2}$, $(1+i)^3$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 \dots$) |
| 2 | <ul style="list-style-type: none"> · 미지수가 포함된 방정식의 해 구하기 (문항 I-1, I-2, I-3, I-4) · 계산기의 solve 명령어와 해구하기 개념 |
| 3-4 | <ul style="list-style-type: none"> · 원기둥과 원뿔의 부피 구하기(문항 I-5, I-6) · 조건삽입기호 “ ”와 대입(substitution) |
| 5 | <ul style="list-style-type: none"> · $\begin{cases} y+x=a \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ (문항 I-7) |
| 6 | <ul style="list-style-type: none"> · 닮은비를 이용한 도형문제 (문항 I-8번) · 직선의 방정식을 이용한 문제(문항 I-8번) |
| 7-9 | <ul style="list-style-type: none"> · 대입개념과 방정식 해구하기 포함된 문제 · 도형 분석 후 연립방정식으로 바꾸는 활동 (문항 I-9) |

<표 III-4> 활동 II 수업 절차

| 차시 | 문제해결 학습(활동 II) |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none"> • 도형 분석 후 무리방정식으로 바꾸는 활동 • 미지수 상수를 포함한 무리방정식 해 구하기 활동 |
| 2-3 | <ul style="list-style-type: none"> • 그래프 그리기 • 미지수 상수를 포함한 무리방정식 해 해석 (토론) • 최적화 문제해결(토론 및 개별활동) |

IV. 결과 분석

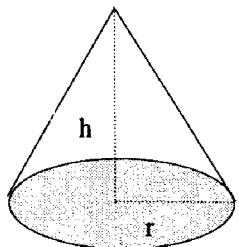
활동 I, II을 통해 수집한 비디오, 활동지, 면담자료를 기초로 도구발생 관련요소를 먼저 규명하였고, 이를 바탕으로 각 활동에서의 도구 발생 과정을 분석하였다. 모든 도구발생 요소와 도구 발생 과정을 기술하기에는 한계가 있으므로 각 활동에서 중요한 사례를 중심으로 기술 하였다.

- 개념중심 수학과제 학습(활동 I)에서의 CAS 도구발생

원통의 부피와 원뿔의 부피를 구하는 응용 문제를 대입개념을 중심으로 한 수학과제로 제시하였다. 우선 학생들에게 classpad300에서 조건삽입기호 “|”의 키보드 위치를 알려주고 활동 I의 문항 I-5, I-6에 해당하는 원기둥과 원뿔의 부피를 구하는 과제를 제시하였다. 원뿔의 부피를 구하는 과제는 [그림 IV-1]와 같다.

본 과제에서 도구발생의 관련요소는 기존 연구(Drijvers & Gravemeijer, 2005, Kutzler, 2003)를 기초로 하여 활동을 통해 학생들이 보여준 행동을 관찰하여 연구자가 재구성하였다. 도구발생의 관련 요소는 <표 IV-1>와 같다.

목록의 (1), (3)와 (5) 항목은 기술적 특성을 지니는 반면, 다른 것들은 순수하게 개념적 특성을 지니고 있다. (2)번 항목은 대입에 대한 확장된 이해를 내포한다. 학생들은 대개 대입을 ‘구체적인 수치 값을 채워 넣는 것’으로 여기고 있었는데, 이러한 관점은 조건삽입기호를 통하여 ‘식을 붙여 넣는 것(pasting)’을 뜻하는 대수적 수식의 대입으로 확장되었다.



다음을 만족하는 원뿔의 부피를 구하시오

(a) $r=5, h=9$ 일 때

(b) 원뿔의 높이가 밑면의 반지름에 2배일 때,
원뿔의 부피(V)를 밑면의 반지름(r)으로 표현하시오.

(c) (b)에서
원뿔의 부피를 높이(h)로 표현하시오.

(d) (b)를 만족하는
원뿔의 부피가 500일 때, 밑면의 반지름을 구하시오.

[그림 IV-1] 대입 개념 중심 원뿔 부피구하기 과제

<표 IV-1> 대입 과제 IAS

| 대입 과제 IAS 핵심 요소 | |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | • [Setting] 확인하기 (복소모드, 실수모드, 표준모드, 십진모드, 호도법, 각도법, 변수 확인, 그래프(window setting)) |
| 2 | • 변수에 식을 붙여넣기 • 붙여넣기(pasting)로서 식 대입을 이미지화하기 |
| 3 | • Classpad300 대입 명령어의 문장 구성 문법 알기 • (수식1 변수 = 수식2)에서 수직 막대()가 상징하는 의미를 기억하기 |
| 4 | • 어떤 수식이 '수식1'과 '수식2'의 역할을 수행하는지 알기 • 수식2를 과정이 아닌 하나의 대상으로 여기기 |
| 5 | • Classpad300에 대입 명령어를 올바르게 입력할 수 있기 • 결과를 해석할 수 있기 |
| 6 | • 특히 결과가 식이나 방정식일 때 미완성 상태 수용하기 |

CAS에 기반 한 대입에 대한 수학과제 학습은 대입이라는 개념의 확장을 요하는 한편, 그것을 촉진할 수도 있었다. (4)번 항목에서 우리는 과정-대상과, (3)번 항목에서 언급된 배열을 활용하기 위해 식을 하나의 대상으로 인식할 필요성을 한 번 더 느끼게 된다. 또한 학생들은 대입(Substitute) 명령어를 적용하기에 앞서 수식2를 대상으로 보는 관점을 지녀야 한다.

(6)번 항목에서, 학생들은 (5)번 항목 기법을 적용한 결과를 다루어야 하는데, 일례로 수식1의 모든 변수 항들이 수식2로 대체된 것을 볼 수 있다. 결과에 여전히 변수가 남아있을 때 학생들은 과정-대상 문제와 미완성 상태의 고통을 유연히 경험하게 되었다.

대입 과제에서 학생들은 CAS의 조건삽입기호

“|”를 사용하여 도형의 부피 구하기 과제를 잘 수행해냈다. 학생들은 처음에 (수식 1 | 수치 1, 수치2)와 같은 조건삽입기호 “|” 사용상의 어려움을 겪었다. 그러나 후에는 이를 극복하여 조건삽입기호의 중복사용에 대한 새로운 기법을 발견하는 등 과제 수행에 필요한 조건삽

입기호 “|” 문법과 기능을 정확하게 구사하였다([그림 IV-2] 참고).

| |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V = \frac{1}{3} \times a \times h \mid a = \pi \times r^2 \quad V = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3}$ |
| $(a) V = 175\pi \text{ solve } (V = \frac{1}{3} \times a \times h \mid a = \pi \times r^2 \mid r = 5 \mid h = 9)$ |
| $(b) V = \frac{27\pi r^2}{3} \text{ solve } (V = \frac{1}{3} \times a \times h \mid a = \pi \times r^2)$ |
| $(c) V = \frac{\pi \cdot h^2}{12} \text{ solve } (V = \frac{1}{3} \times a \times h \mid a = \pi \times (\frac{h}{2})^2)$ |
| $(d) r = \frac{5 \cdot 6^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} \approx 6.203504909$ |

[그림 IV-2] 원뿔문제에 대한 학생2 답안지

본 과제의 IAS의 대입개념은 조건삽입기호 “|”를 통해 명시화 되었고, 이 “|” 기호의 활용이 단순한 수치 대입을 넘어서는 대입개념의 확장에 기여했다고 볼 수 있다. 따라서 어느 정도 만족할 만한 도구발생이 이루어졌다고 볼 수 있다.

CAS에 기반 한 연립방정식 풀이 과제에서의 도구발생을 고찰하기 위해 3차시 과제로 문항 I-7, I-8, I-9를 학생들에게 제시하였다. 도구화된 Classpad300의 조건삽입기호 “|”를 장착한 학생들에게 먼저 문항 I-7 계수와 상수가 문자로 표현된 연립방정식 문제가 제시되었다([그림 IV-3]참고).

| | |
|---------------------|---------------------------------------------------------|
| 연립 방정식의 해를 구하시오. | $\begin{cases} y + x = a \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ |
|---------------------|---------------------------------------------------------|

[그림 IV-3] 연립방정식 과제

도구발생의 관련요소는 기존연구(Drijvers & Gravemeijer, 2005, Drijvers, 2003Kutzler, 2003)를 기초로 하여 활동을 통해 학생들이 보여준 행동을 관찰하여 본 연구자가 재구성하였다. 도구발생의 관련 요소는 <표 IV-2>와 같다.

<표 IV-2> 분리-대입-풀이(ISS) 스킴의 핵심요소

| 목록 ISS 스킴의 핵심 요소 | |
|------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1 | • 미지수 상수가 포함된 방정식에서 변수 중 하나를 분리하는데 이 기법을 적용하기 (Isolate). |
| 2 | • 앞 단계에서 도출된 결과를 다른 방정식에 대입하는데 수식 대입 기법을 적용하기 (Substitute). |
| 3 | • 해를 구하는데 방정식 풀이 기법을 한 번 더 적용하기(Solve). |

상수가 변수로 표현된 연립방정식 풀이에서 Classpad300에 기반 한 ISS 스킴의 사례는 [그림 IV-1]와 같다. ISS 스킴의 첫 단계는 ‘풀이(Solve)’ 명령어를 이용하여 하나의 변수를 분리하는 단계이다. 두 번째 단계는 치환 기능을 수행하는 조건삽입기호 ‘|’를 사용하여 기호 오른쪽 식을 왼쪽에 대입하는 단계이다. 마지막으로 치환에 의해 구해진 방정식을 ‘풀이(Solve)’ 명령어를 이용하여 해를 구하는 단계이다. 방정식에 쓰이는 [Solve] 명령어와 변수 분리에 쓰이는 [Solve] 명령어를 동일하게 사용하였는데, 이는 Classpad300에서 사용된 동일한 [Solve] 명령어가 “한 변수를 분리시키는 것”과 “과정을 더 진행시키기 위해 다른 변수를 사용하여 한 변수를 식으로 나타내는 것” 또한 의미한다는 것을 학생이 알고 있음을 나타낸다. ‘방정식을 푼다’는 개념의 확장을 나타낸다고 할 수 있다.

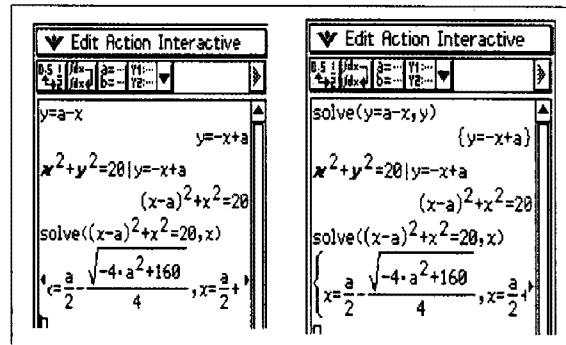
연립방정식 활동이 있는 후 학습 관찰 및 면담을 통해 얻어진 정보를 가지고 학생들의 분리-대입-풀이(ISS: Isolate-Substitute-Solve) 스킴의 도달정도를 <표 IV-3>로 정리하였다.

<표 IV-3>에서 “○”는 자력으로 성취한 것을, “●”는 친구의 도움으로 성취한 것을, “▲”는 아직 성취가 완전하지 않은 수준을 표현한 것이다.

<표 IV-3> ISS스킴 도달정도

| | 학생1 | 학생2 | 학생3 | 학생4 | 학생5 | 학생6 | 학생7 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| I | ○ | ▲ | ▲ | ▲ | ▲ | ▲ | ▲ |
| S | ○ | ▲ | ▲ | ○ | ○ | ▲ | ▲ |
| S | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |

실험에 참여한 학생 모두는 Drijvers(2003)가 소개했던 전형적인 ISS스킴과는 분리(Isolate) 부분에서 차이를 보였다. 유일하게 학생1만이 solve 명령어를 이용하여 분리(I)를 먼저 실행한 후에 대입을 실행하였다. 학생들의 연립방정식 풀이 전략은 [그림 IV-4]와 같다.



[그림 IV-4] 학생들의 연립방정식 해법1

학생들의 계산기 화면인 [그림 IV-1]에서 왼쪽 그림은 분리를 암산으로 해결한 ISS 스킴을 보여주는 화면이고, 오른쪽이 계산기에 의한 ISS 스킴을 보여주는 화면이다.

직각을 낀 한 변의 길이가 9이고, 빗변과 나머지 한 변의 길이의 합이 29인 직각삼각형이 있다.

(a) 빗변과 나머지 한 변의 길이를 각각 구하시오.
 (b) 빗변과 나머지 한 변의 합을 29대신 31로 바꾸었을 때, 빗변과 나머지 한 변의 길이를 구하시오.
 (c) 빗변과 나머지 한 변의 길이의 합이 구체적으로 주어지지 않은 상황에서 문제를 해결하시오.

[그림 IV-5] 연립방정식 응용문제

활동 I의 마지막 문항인 연립방정식의 해를 구하는 응용문제풀이 문항 I-9가 ISS 스킴이 어느 정도 연습이 된 학생들에게 제시되었다([그림 IV-15]참고). 대부분의 학생들이 문항 I-9를 성공적으로 해결하였다. 도구발생의 관련 요소는 <표 IV-4>와 같다.

<표 IV-4> 연립방정식 풀이에서 IAS 핵심 요소

| 목록 | 연립방정식 풀이에서 IAS 핵심 요소 |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <ul style="list-style-type: none"> • [Setting] 확인하기(복소모드, 실수모드, 표준모드, 십진모드, 호도법, 각도법, 변수 확인, 그래프 [window setting]) |
| 2 | <ul style="list-style-type: none"> • ISS 전략이 문제 해결 방법이라는 것 알기 • 특히 전체적인 문제 해결 궤도 유지하기 |
| 3 | <ul style="list-style-type: none"> • 미지수상수가 포함된 방정식에서 변수 중 하나를 분리하는데 이 기법을 적용하기(I) |
| 4 | <ul style="list-style-type: none"> • 앞 단계에서 도출된 결과를 다른 방정식에 대입하는데 수식 대입 기법을 적용하기(S) |
| 5 | <ul style="list-style-type: none"> • 해를 구하는데 방정식 풀이 기법을 한번 더 적용하기(S) |
| 6 | <ul style="list-style-type: none"> • 계산 결과 해석하기 • 특히, 해가 식일 때 미완성 상태 수용하기 |

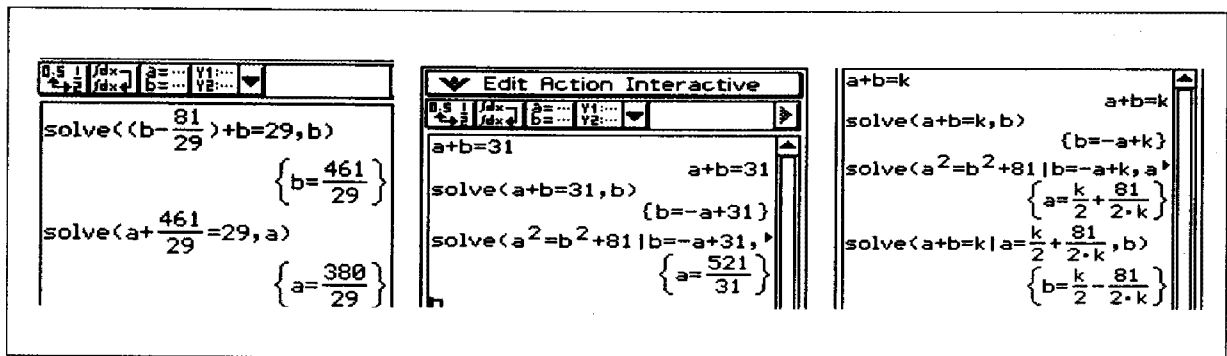
IAS 2번 항목인 ISS전략이 문제해결 방법이라는 것 알기 단계에서 학생7이 문제 이해에 큰 어려움을 겪었으나, 대부분의 학생들은 ISS 전략을 문제풀이 활동의 핵심으로 잘 알고 있

었다. IAS 3, 4, 5는 차례로 ISS단계를 의미하는데 앞의 ISS전략에서 볼 수 있듯이 학생2, 학생3, 학생5, 학생6은 암산으로 분리 단계를 생략하는 성향을 나타냈다. 친구들과의 대화를 통해 학생들은 [solve] 명령어를 이용하여 분리를 수행하였다. 그러나 문제 해석에서 어려움을 겪었던 학생7은 ISS전략 수행도 매우 어려워했다.

IAS 6번 항목인 결과를 해석하기와 특히, 해가 식일 때 미완성 상태 수용하기에서는 학생6이 약간 어려워했고, 학생7은 결과를 구하지 못했다.

학생6은 동료들의 도움으로 계산기에 식을 입력하는 단계까지는 도달하였으나 문항(c) 활동에서 매우 큰 어려움을 겪었다. 학생7은 문제를 이해하는데 어려움을 호소하였고, 앞의 ISS전략을 아직도 잘 이해하지 못하고 있었다. 이는 아직 ISS전략이 이 두 학생들에게 하나의 스킴으로 정립되지 않은 증거를 보여주는 예라 할 수 있다. 따라서 스킴이 제대로 정립되지 않은 상태에서 연립방정식의 응용문제에서 식을 구하고, 이 식을 ISS전략을 통해 방정식의 해를 구하는 활동을 하기는 어렵다는 것을 관찰할 수 있었다.

연립방정식 응용문제에 대한 학생들의 해법은 그림과 같다([그림 IV-6]참고).



[그림 IV-6] 연립방정식 응용문제에 대한 학생들의 해법

[그림 IV-7]은 학생2의 풀이 과정을 보여준다. 비록, 해답에 제시한 CAS 명령어가 *Classpad300* 문법상 맞지 않는 것이었지만, 계산기에 직접 입력하는 과정에서 오류를 발견하고 $\text{Solve}(a^2 = b^2 + 81 | b = 29 - a, a)$ 와 같이 교정하였다.

| |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(a) \ a + b = 29, \ a^2 = b^2 + 81$ <hr/> $b = 29 - a \quad \text{solve}(a^2 = b^2 + 81 29 - a, a)$ <hr/> $a = \frac{461}{29}, \ b = \frac{380}{29}$ |
| $(b) \ a + b = 31, \ a^2 = b^2 + 81$ <hr/> $b = 31 - a \quad \text{solve}(a^2 = b^2 + 81 31 - a, a)$ <hr/> $a = \frac{521}{31}, \ b = \frac{440}{31}$ |
| $(c) \ a + b = k, \ a^2 = b^2 + 81$ <hr/> $b = k - a \quad \text{solve}(a^2 = b^2 + 81 k - a, a)$ <hr/> $a = \frac{k}{2} + \frac{81}{2k}, \quad \therefore b = \frac{k}{2} - \frac{81}{2k}$ |

[그림 IV-7] 연립방정식 응용문제의 학생2의 답안지

ISS 스킴 적용 시 CAS 문법에 해당하는 계산기 억제력을 극복하기 위한 다양한 시도가 시행되었다. 대입 과제에서 겪었던 유사한 오류들이 발생하였는데, 시간이 지나면서 학생들은 대입 과제에서와 마찬가지로 과제 수행에 필요한 CAS 문법과 기능을 정확하게 구사하

였다. 이전 과제 수행보다 본 과제에서 학생들이 경험하는 계산기 억제력은 적게 나타났는데, 이는 과제 수행에서 계산기를 다루는 기법의 속도로 알 수 있었다. 일차방정식 해 구하기 과제에서는 볼 수 없던 '방정식을 푼다'는 개념의 확장이 ISS 스킴의 형성 과정을 통해 관찰되었고, CAS는 계수와 상수가 문자로 포함된 식을 빠르고 정확하게 계산할 수 있게 함으로써 연립방정식을 세우는데 집중할 수 있도록 해주었다. 본 과제에서 CAS의 도구발생은 만족스러웠다.

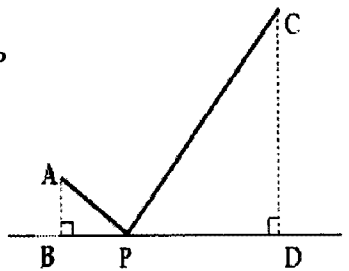
- 문제해결활동(활동 III)에서 도구화된 CAS의 역할

무리방정식 해 구하기 과제가 [그림 IV-8]과 같이 제시 되었다. 본 과제는 연구 대상자 학생들이 고 3 과정에서 학습하게 될 내용이였다. 도구발생의 관련 요소는 <표 IV-5>와 같다.

활동 I의 원기둥, 원뿔 과제와는 달리 방정식 풀이에서 나온 답을 믿을 수 없다는 반응과 함께 여러 가지 방법으로 답을 간단히 하려는 시도가 있었다. 학생4는 메뉴에 있는 [Simplify] 명령어를, 학생2는 [Arrange] 명령어를 이용하여 식을 더 간단히 하고자 시도했다.

문항 III-1] 두 점 A, C와 한 직선 l 이 있다.
 $\overline{AB} = 1$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{BD} = 4$ 이고, l 위에 B, D가 아닌 한 점 P를 잡아서 $\overline{AP} + \overline{CP} = 6$ 이 되게 하려고 한다.

(a) \overline{BP} , \overline{DP} 의 길이를 각각 구하시오.
 (b) $\overline{BD} = a$ 일 때, \overline{BP} , \overline{DP} 의 길이를 구해보자.
 (c) $\overline{BD} = a$ 의 최댓값을 구하시오.



[그림 IV-8] 활동 III(무리 연립방정식 응용문제)

<표 IV-5> 무리방정식 풀이에서 IAS 핵심 요소

| 목록 | 연립방정식 풀이에서 IAS 핵심 요소 |
|----|-------------------------------------------------------|
| | • [Setting] 확인하기(복소모드, 실수모드, |
| 1 | 표준모드, 심진모드, 호도법, 각도법, 변수 확인, 그래프 [window setting]) |
| 2 | • ISS전략이 문제 해결 방법이라는 것 알기 • 특히 전체적인 문제 해결의 케도 유지하기 |
| 3 | • 미지수상수가 포함된 방정식에서 변수 중 하나를 분리하는데 이 기법을 적용하기(I) |
| 4 | • 앞 단계에서 도출된 결과를 다른 방정식에 대입하는데 수식 대입 기법을 적용하기(S) |
| 5 | • 해를 구하는데 방정식 풀이 기법을 한 번 더 적용하기(S) |
| 6 | • 계산 결과 해석하기 • 특히, 해가 식일 때 미완성 상태 수용하기 |
| 7 | • 문자로 표현된 해를 그래프로 그리기 • 그래프에 표현된 해를 해석할 수 있기 |

비록 보다 간단히 하려는 그들의 시도는 실패로 끝났지만, x 값의 일정한 패턴에 주의를 기울이고 그를 하나의 대상(object)으로 생각하려는 시도가 주목할 만한 점이라 할 수 있다.

학생3은 교사의 지도가 없었는데도, *Classpad 300* 명령어 [simplify]가 식을 간단히 하는 것을 알고 있었다. 물론 나중에 다시 실행해 보아도 식은 전혀 달라지지 않는다는 것을 알게 되었다. 학생들의 대화 내용은 다음과 같다.

학생4: (결과에 놀라며) 옆으로 화면을 4번 넘겨야 돼, x 값이 하나야..

학생2: 계산기 약분할 줄도 몰라.

학생4: 이게 뭐야.

학생3: 약분해 봐. 명령어 [simplify]로 해 봐.

학생4: 멈추었어..계산중이야..돌아 버리겠다. 손이 더 빠르겠어.

학생2: 그래도 계산기가 더 빨라.

학생3: x 값이 무려 4차식이야...

무리방정식 풀이 활동 후 문제에 대한 토론이 학생4의 주도로 이루어졌다. 개인 계산기 대신 속도가 더 빠른 교사용 노트북이 사용되었다. 프로젝션 화면으로 전체 학생이 볼 수 있었다. 학생5가 칠판에 필기를 담당했고, 노트북에 있는 계산기 조작은 학생3이 했으며, 전체적인 토론 진행은 학생4가 이끌었다. 학생들의 자유로운 토론 속에서 교사는 [Copy]기능을 이용한 약간의 기술적 도움을 학생들에게 제공하였다. 학생들은 [그림 IV-10]과 같이 a 값에 4를 대입하여 (a)에서 구한 값과 비교하였다. 이는 대입에 대한 적절한 도구장착(instrumentation)이라 할 수 있다.

$\sqrt{\quad}$ 기호 찾기와 키보드 입력상의 실수가 약간 관찰되었지만, 본 과제에서 학생들은 연립방정식 풀이에서의 ISS전략보다 매우 빠르게 ISS 전략을 사용하였다. [그림 IV-9]처럼 문항 (b) 과정에서 매우 복잡한 형태의 계산 결과는

$$\text{solve}(x+y=a, y)$$

$$\{y=-x+a\}$$

$$\text{solve}(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+9} = 6 \mid y=-x+a, x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2 \cdot a^3}{4 \cdot a^2 - 144} - \frac{56 \cdot a}{4 \cdot a^2 - 144} + \frac{\sqrt{-(16 \cdot a^2 - 576)(a^4 - 56 \cdot a^2 + 40)} + (4 \cdot a^3 - 112 \cdot a)^2}{2 \cdot (4 \cdot a^2 - 144)} \\ x = \frac{2 \cdot a^3}{4 \cdot a^2 - 144} - \frac{56 \cdot a}{4 \cdot a^2 - 144} + \frac{\sqrt{-(16 \cdot a^2 - 576)(a^4 - 56 \cdot a^2 + 40)} + (4 \cdot a^3 - 112 \cdot a)^2}{2 \cdot (4 \cdot a^2 - 144)} \end{array} \right.$$

[그림 IV-9] 무리 연립방정식의 해

학생들을 매우 당황시켰다. ISS스킴이 학생들에게 어느 정도 정착된 시점에서 학생들은 문자로 표현된 계산 결과에 이전보다 더 큰 관심을 표현하였다. 학생들은 처음에는 IAS의 7번 단계인 문자로 표현된 해를 그래프로 그리기, 그래프에 표현된 해를 해석할 수 있기로의 단계로 나아가지 못했다. 그러나 문자로 표현된 매우 복잡한 식으로 무리방정식의 해가 표현되었을 때, 토론 과정에서 한 학생이 그래프 그리기 기능을 교사에게 요구하였다.

그래프 그리기 기능이 학생들에게 장착되었고, 무리방정식 응용 심화과제에서 학생들은 문자로 표현된 해를 그래프로 그리고, 그래프로 표현된 해를 해석하였다. 그래프 그리기 과정에서 좌표축의 x 축과 y 축 간격의 비가 다를 때, 학생들은 처음에 그래프 해석에 어려움을 겪었다. 또한 a 를 x 로 치환하는 과정에서 몇몇 학생들이 문자를 혼동하여 그래프 해석에 어려움을 호소하였으나, 어느 정도의 시간과 토론이 진행되면서 이러한 어려움은 점차 극복되었다. 따라서 CAS의 그래프 그리기 기능은 심화과제를 해결하는데 학생들에게 도움이 되었다.

직선 $\overline{A'C}$ 의 길이가 6이므로 $a^2+4^2=6^2$

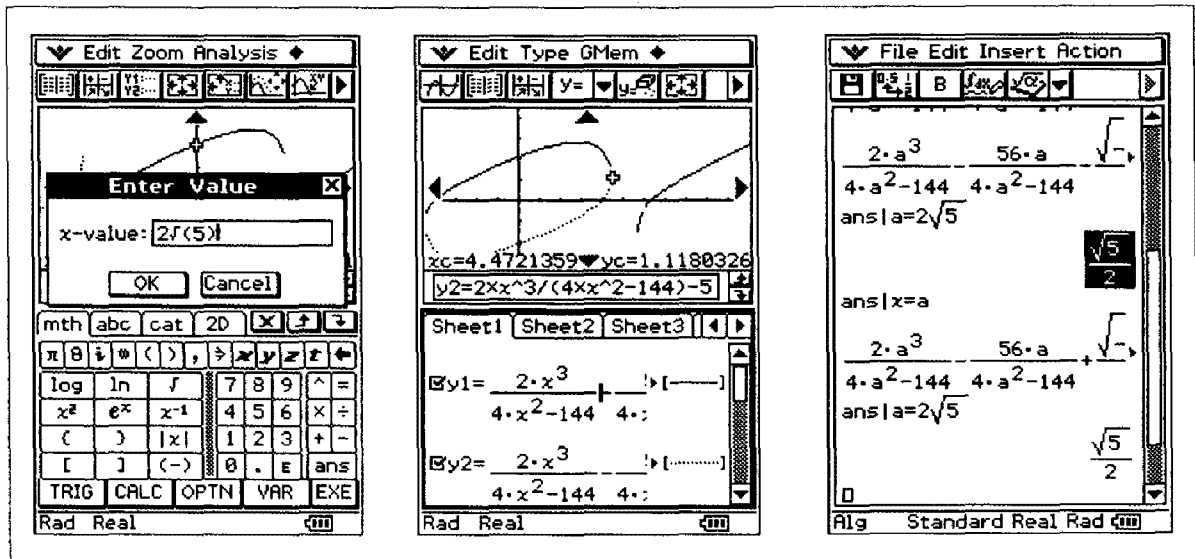
이고, 따라서 $a=2\sqrt{5}$ 를 얻었다. 학생들은 즉각 CAS에 $a=2\sqrt{5}$ 값의 근삿값을 알아보았으며 이를 계산기에 넣어 확인하였다([그림 IV-10]참고).

학생들은 그래프에서 약간 떨어져 있는 것처럼 보이는 화면이 실제로는 같은 값을 지나는 것을 알게 되었고, $a=2\sqrt{5}$ 라는 최댓값을 찾을 수 있었다.

도구화된 CAS에 기반 한 무리방정식 문제해결활동은 기호조작 및 계산 측면에서 학생들의 짐을 덜어 줄 수 있고, 그래프 탐색이 가능하기 때문에 무리방정식 해구하기를 꼭 고차방정식 및 분수방정식 해구하기 단원 뒤로 미루어 학습하지 않아도 되게 하였다. 도구화된 CAS의 도움이 주어진다면 저학년에서도 무리방정식 풀이 활동이 가능하다.

V. 결론 및 논의

본 연구는 선행연구에 기초하여, CAS가 수학학습에 유용한 도구가 되기 위해서는 연장을 적절하고 적합한 방식으로 사용하는 방법을 발



[그림 IV-10] 학생들의 a 의 최댓값 탐구

달시키는 도구발생의 과정을 거쳐야 하며, 이 도구발생의 핵심은 ‘도구장착’과 ‘도구활용’의 두 방향에서 이루어지는 스킴의 발달이라는 관점에서 출발하였다. CAS에 기반 한 고등학교 수학학습 활동에서의 도구발생 과정에 대한 분석 결과, CAS와 학습자 사이의 도구장착과 도구활용은 어떤 종류의 도구(또는 인공물)를 사용했는가 가 영향을 주기도 하지만, 학습과제나 학습자에 따라 차이를 보인다는 기존연구(Drijvers, 2003, 등)를 확인하였다. 여기서는 과제와 학습자와 도구장착, CAS와 교육과정, CAS와 교사교육에 관하여 논의하기로 한다.

첫 번째로 도구장착은 곧 도구화된 행동 스킴(IAS)의 개발을 의미하는데, 이 과정에서 CAS (Classpad300)의 제약과 가능성은, 처음에는 CAS 사용 문법이 학생들에게 제약으로 작용하였으나 시간이 지나면서 적절한 스킴이 개발되면서 학습의 가능성으로 작용하였다. 예를 들어 [solve] 명령어 사용, 조건삽입기호 “|” 사용, 실수의 소수표현은 학습자에게 처음에는 고충 및 제약이었으나, 각각 ‘방정식을 푼다’는 개념의 확장, 단순한 수치 대입을 넘어선 대입 개념의 확장, 실수에 관한 이해의 명료화가 이루어질 수 있도록 여건을 조성하였다.

도구발생 과정에 학습자가 변인으로 나타났다. 예를 들어 활동 I의 경우 Drijvers(2003)는 ‘방정식을 푼다’는 개념이 “한 문자를 다른 문자에 대하여 푸는” 개념으로 확장된 사례와 주어진 방정식을 대상으로 보는 관점에서 대칭성을 처음부터 인식한 사례를 보고한 것과는 달리, 본 연구에서는 대상 학생들에게서 이와 같은 사례가 발견되지 않았다. 이 차이는 개인차를 넘어 누적된 학습경험과 교육과정의 차이에서 비롯된 것일 가능성을 배제할 수 없다. 본 연구 대상의 크기가 Drijvers 연구에 비해 상대적으로 작은 것이 한 요인일 수 있으나, 본 연

구의 대상 학생들이 방정식 풀이를 이미 학습한 상황이고, 그것도 알고리즘적 차원의 방정식의 풀이에 고착하여 이해했기 때문에 ‘방정식의 풀이’를 ‘ x 를 다른 문자에 대해 푸는 것’과 관련시킬 수 있는 안목을 갖지 못했을 수도 있다.

둘째, CAS는 수학교육의 초점과 교육과정의 내용 제시 순서를 바꿀 수 있음을 알 수 있었다. CAS는 학생들로 하여금 아직 지필해법을 학습하지 않은 무리방정식의 풀이를 그래프로 구하고, 구한 해의 의미를 이해할 수 있게 하였다. 따라서 도구화된 CAS에 기반 한 무리방정식 문제해결활동은 CAS가 교육과정의 제시 순서에 영향을 줄 수 있으며, 식을 세울 수 있으면 해를 구할 수 있는 일반적인 방식을 제공함으로써 방정식 풀이 기법에서 식 세우기로 수학활동의 초점이 변하는 사례이다.

여기에서, “수학의 가치를 어디에 두는가?” 하는 문제가 교육과정의 초점과 계열 조정 여부에 영향을 미친다. 수학적 모델링을 중시하고, 실생활 문제를 접할 수 있는 계기를 조성한다는 관점에서 보면 CAS가 중요한 역할을 한다고 볼 수 있다. 그러나 무리방정식의 정확한 해를 구하는 문제에 초점이 맞추어 진다면 이곳에서의 CAS의 역할은 단순한 “Black Box”로 기능하는데 지나지 않을 것이다. 결국 CAS 도입의 성패여부는 교육과정의 유연성 여부와 맥을 같이한다.

셋째, CAS의 제약이 새로운 가능성으로 바뀌게 되는 것은 학습자에게 자연스러운 일이 아니라 교사의 의도된 교수학적 지도가 필요한 부분이므로 교사교육이 필수적이다. CAS는 계산기 자체의 내부적 제약, 문법과 관련된 명령어상의 제약, 구성적 제약 등 있는데, 교사는 이러한 제약이 CAS가 도구로 발생되는데 가능성으로 작용할 수 있도록 해 주는 방식을 습득

해야 한다. 또한 경우에 따라서 사용 스킴이나 IAS로 볼 수 있는 근사 우회, 또는 그래프 그리기 [Window Setting] 스킴 등도 학습해야 한다. 교사는 또한 도구 장착과정에서 예기치 않은 답을 얻을 수도 있을 것이다. 그러나 그 고충은 종종 '수학적으로 의미 있으나 잘 드러나지 않던' 중요한 주제를 다룰 수 있는 기회가 될 수 있다는 점도 인식해야 한다.

활동 II에서 학생들은 CAS를 블랙박스로서 사용하여 무리방정식의 해를 구하고, 구한 해로 그래프를 그려서, 이를 해석함으로써 무리방정식의 최적화 문제를 좀 더 심층적으로 해결할 수 있었다. 즉, 무리방정식의 최적화 문제해결 과정에서 "Black Box"로 이용된 CAS가 비계(scaffolding)역할을 수행한 것인데, 이와 같이 도구화된 CAS를 비계로 활용하게 하는 적절한 과제를 개발하여 제공하는 일 또한 교사의 몫이다.

본 연구는 고등학교 수학교육에서 CAS의 도구발생을 분석하여 그 사례를 제공하였다. CAS가 도입된 이후의 우리나라 수학교육에 대비한 좀 더 지속적인 기초연구가 요구된다.

참고문헌

- 교육부(2000). **수학과 고등학교 제 7차교육과정**. (교육부 고시 제 1997-15호 [별책 4]). 서울: 대한교과서주식회사.
- 교육인적자원부(2007). **초중등학교 수학교육과정**. (교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8] 대한교과서주식회사.
- 류희찬(2005). CAS를 활용한 대수교육의 의미와 방법. **제 18회 수학교육과 세미나**, 한국교원대학교 수학교육과.
- 장경윤(2005). CAS와 수학교육. **제 18회 수학교육과 세미나**, 한국교원대학교 수학교육과, p10.
- _____ (2007). ICT 시대의 대수교육의 방향과 과제. **학교수학**. 9(3), 409-410.
- _____ (2008). 컴퓨터 대수체계(CAS) 대비 중등대수교육 기초 연구. **학교수학**. 10(2),
- 차용순(2001). **그래픽 계산기를 활용한 중학교 3학년 대수와 함수영역의 단원구성**, 한국교원대학교 석사학위 논문. pp 3-5
- 한세호(2001). **그래픽 계산기를 활용한 개방형 문제 풀이 활동에 관한 연구**, 한국교원대학교 석사학위 논문.
- Atigue, M. (2001). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *CAME Symposium 2001: Theme 1 Presentation*.
- Drijvers, P.H.M. (2003). Algebra on screen, on paper, and in the mind. In Fey, J.T., Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp. 241-267).
- Drijvers, P.H.M. and Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes, In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*(pp. 176-186). New York: Springer.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

- _____ (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments : Necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.
- Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (2004). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculator: Turing a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Heid, M.K. & Edwards, M.T. (2001). Computer Algebra Systems: revolution or retrofit for today's classrooms?, *Theory into Practice* 40. spring: 128-36.
- Kieran, C. & Dijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: *A Study of CAS use in secondary school algebra*(pp.206-207). New york: Springer.
- Kutzler, B. (2003). CAS as Pedagogical Tools for Teaching and Learning Mathematics", In Fey. J.T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R.M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp.73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lagrange, J.B.(2001). A multi-dimensional study of the use of IC technologies: The case of computer algebra. In J. Novotna (Ed), *Proceeding of the second conference of the European Society for Research in Mathematics Education*(pp.170-182).
- _____ (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin,, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. (pp. 113-136). New York: Springer Science Business Media, Inc..
- Mayes, R. (1992). The effects of using software tools on mathematical problem solving in secondary schools. *School Science and Mathematics*, 92.
- _____ (1993). The effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in college algebra. *In Proceedings of the Fourth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, edited by L. Lum, pp. 339-43. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.
- _____ (1995). The application of a computer algebra system as a tool in college algebra. *School Science and Mathematics* 95: 61-68.
- _____ (1998). ACT in algebra: Student attitude and Belief. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education* 5:3-14.
- O'Callaghan, B.R. (1998). Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Functions.: *Journal for Research in Mathematics Education* 29, 21-40.
- Pierce, R.U., & Stacey, K.C. (2002). Algebraic insight: The algebra needed to use computer algebra systems. *The Mathematics Teacher*, 95(8), 622.
- Rabardel, P. (1995). *Men and technologies - a cognitive approach to contemporary*

- instruments. paris : Armand Colin.
- Trouche, L. (2000). The parable of the left-handed and the skillet: Study on the learning process in a symbolic calculator environment. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239-264.
- _____ (2002). An instrumental approach of learning mathematics in a symbolic calculator environment. In D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Symbolic calculators, transforming a tool into an instrument for a mathematical work: A didactical problem*, 215-242. France.
- _____ (2003). Managing the complexity of human/machine interaction in a computer based learning environment(CBLE): guiding students' command process through instrumental orchestrations. *CAME 2003 at IUFM Reims*, France.
- _____ (2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with differential effects. New york: Springer.
- Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualization, in R. Noirgalise & M.J. Perrin (Eds), *Calcul formel et apprentissage des mathématiques* (pp.9-26). Paris: INRP.
- Zibiek, R.M. (2003). Using research to influence teaching and Learning with computer algebra systems, In Fey. J.T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. & Zbiek, R.M. (Eds), *Computer algebra systems in scondary school mathematics education* (pp.197-216). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Instrumental Genesis of Computer Algebra System(CAS) in Mathematical Problem Solving among High School Students

Han, Se Ho (Suji High School)

Chang, Kyung Yoon (Konkuk University)

This study was designed to gain insights into instrumental genesis process of CAS in Korean high school students and to explore its practical potentials in secondary mathematics education. Two activities, such as Concept-Centered Mathematics Activity based on CAS and Problem Solving Activities, were constructed and executed to 10th Grade seven students for twelve class hours.

The finding on the students' activities are as follows : it is meaningful in mathematics education, especially in algebra education, in that the CAS based concept centered

mathematics activity offers great opportunities to deal with high-qualified application problems.

The problem solving activities based on the instrumented CAS may have an influence on the sequence of mathematics curriculum, e.g. the optimization problems may precede the calculus problems such as derivatives in high school.

The results of this study to investigate the instrumental genesis of CAS in mathematical activities will give insights into the secondary mathematics curriculum to prepare the CAS in Korea.

* key words : Computer Algebra Systems(컴퓨터 대수 체계), Instrumental Genesis(도구발생), Instrumented CAS(도구화된 CAS), Instrumentation(도구장착), Instrumentalization(도구활용)

논문접수 : 2009. 8. 1

논문수정 : 2009. 9. 3

심사완료 : 2009. 9. 7