계층적 오드 연결망(*HON*): 오드 연결망을 기반으로 하는 새로운 상호연결망

(Hierarchical Odd Network(*HON*): A New Interconnection Network based on Odd Network)

김 종 석 † 이 형 옥 ††
(Jongseok Kim) (Hyeongok Lee)

요 약 본 논문에서는 오드 연결망을 기반으로 하는 새로운 상호연결망, 계층적 오드 연결망 $HON(C_d,C_d)$을 제안한다. 그리고 $HON(C_d,C_d)$의 여러 가지 망성질(연결도, 라우팅 알고리즘, 지름, 방송 등)을 분석한다. 본 논문에서 제안한 $HON(C_d,C_d)$가 오드 연결망과 $HCN(m,m)$, $HFN(m,m)$보다 우수한 연결망임을 보인다.

키워드 : 상호연결망, 오드 연결망, 계층적 오드 연결망, 연결도, 라우팅 알고리즘, 지름, 방송

Abstract In this paper, we propose a new interconnection network, hierarchical odd network $HON(C_d,C_d)$, which used the odd network as basic modules. We investigate various topological properties of $HON(C_d,C_d)$, including connectivity, routing algorithm, diameter and broadcasting. We show that $HON(C_d,C_d)$ outperforms the three networks, i.e. the odd network, $HCN(m,m)$, and $HFN(m,m)$.

Key words : Interconnection network, odd network, Hierarchical odd Network, connectivity, routing algorithm, diameter, broadcasting

1. 서 론

현대 공학과 과학 분야의 대부분의 응용문제들은 많은 계산을 수행하며, 동시에 실시간 처리를 필요로 하기 때문에 지금까지의 컴퓨터 시스템보다 빠른 계산 능력을 갖는 고성능 병렬 처리 시스템에 대한 필요성이 계속 증가되고 있다. 병렬 처리 시스템은 자신의 메모리를 갖는 프로세서들을 상호연결망(interconnection network)으로 연결하고, 프로세서들 사이에 통신은 상호 연결망을 통해 메시지를 교환(message passing)하는 방식으로 이루어진다. 상호연결망(interconnection network)은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프(undirected graph)로써 표현 될 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 망척도는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 지름(diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting) 등이 있다. 상호연결망에서 하드웨어의 비용과 관련된 분지수(degree)와 메시지의 전송시간과 관련된 지름(diameter)은 상호간에 상관관계를 갖고 있다. 일반적으로 연결망의 분지수를 늘리면 지름을 줄이게 되어 그 연결망에서의 처리량(throughput)을 높일 수 있는 장점이 있지만, 병렬컴퓨터를 설계할 때 처리기의 핀(pin) 수가 늘어나게 되어 하드웨어의 비용이 증가하는 단점이 있다. 분지수가 작은 상호연결망은 하드웨어 비용은 줄어드는 반면 메시지 전송시간이 늘어나게 되어 상호연결망의 지연시간(latency)이나 처리량(throughput)이 나빠지는 단점이 있다. 이러한 특성 때문에 상호연결망을 비교 평가하기 위해 대표적으로 사용되는 망척도는 상호연결망의 분지수(degree) × 지름(diameter) 값으로 정의되는 망비용(network cost)이다.

† 정 회 원 : 영남대학교 정보통신공학과 교수
rockhee7@gmail.com
†† 정 회 원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 교수
oklee@sunchon.ac.kr
(Corresponding author임)
논문접수 : 2009년 2월 25일
심사완료 : 2009년 6월 8일

상호연결망의 대표적인 위상으로는 하이퍼큐브 연결망이 있다. 하이퍼큐브 연결망은 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 기존의 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있는 대표적인 상호 연결망이다. 하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고 간단한 라우팅 알고리즘과 최대 고장 허용도와 단순한 재귀적 구조를 가지고 있으며, 기존에 제안된 다양한 상호 연결망과 쉽게 임베딩 가능하다는 장점을 가지고 있다[1,2]. 그렇지만 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선하고자 폴디드 하이퍼큐브[3], 오드(odd) 연결망[4], 이븐(even) 연결망[5], 하이퍼-스타 연결망[6]이 제안되었고, 최근에는 기존에 발표된 연결망의 망비용을 효율적으로 개선하기 위해 계층 구조를 갖는 상호연결망이 제안되었다. 대표적인 계층적 상호연결망으로 $HCN(m,m)$[7]과 $HFN(m,m)$[8]이 소개되었다.

오드 연결망은 [9]에서 그래프이론 모델의 하나로 발표되었는데, [4]에서 Ghafoor가 상호연결망으로 소개하였다. 오드 연결망은 노드 개수가 조합(combination) 형태로 증가하는 연결망으로, 하이퍼큐브에 비해 망비용이 절반 이상 개선된 연결망이다. 오드 연결망은 최대 고장 허용도를 가지며, 높은 밀집도와 단순한 라우팅 알고리즘을 가지고 있다. 또한 대칭적인 영역에 대한 분할 능력이 뛰어난데 이것은 하다마드 매트릭스(hadamard matrix)라는 조합 구조에 기반하고 있기 때문이다. 오드 연결망의 분할 성질은 그래프의 확장과 자기 진단을 위해 효과적으로 사용할 수 있다는 장점을 갖는다. 지금까지 오드 연결망의 여러 가지 성질들 즉, 노드 및 에지 대칭성, 노드 중복 없는 경로, 고장 지름, 임베딩 등이 분석되었다[4,9-13].

본 논문에서는 이러한 오드 연결망 O_d의 망비용을 효율적으로 개선하기 위해 O_d를 기반으로 하는 새로운 계층적 연결망인 HON을 제안하고, HON의 여러 가지 특성을 분석한다. 그리고 HON을 기존에 제안된 연결망인 HCN, HFN, O_d와 망비용을 이용하여 비교함으로써, 본 논문에서 제안하는 HON이 우수한 연결망임을 보이겠다. 본 논문에서는 $\binom{2d-1}{d}$을 C_d으로 표시하겠다. 2장에서는 오드 연결망의 기본 성질을 알아 보고, 3장에서는 HON을 설계하고, 여러 가지 망성질을 분석하며, 4장에서는 오드 연결망, HCN, HFN과 망비용을 비교 분석하고, 마지막으로 결론을 맺겠다.

2. 오드 연결망의 성질

오드 연결망 O_d의 노드수는 $\binom{2d-1}{d}$이고, 분지수는 d이며, 지름은 $d-1$이다. 각 노드는 $2d-1$개의 이진비트스트링 $x_1x_2...x_i...x_{2d-1}$으로 구성되어 있고, 각 노드를 구성하는 이진비트스트링을 보면 1의 개수가 0의 개수보다 하나 많다. 두 노드를 연결하는 에지가 존재하는 경우는 오직 하나의 비트스트링만 같은 두 노드 $U=x_1x_2...x_i...x_{2d-1}$와 $V=\overline{x_1x_2\cdots}x_i\overline{\cdots x_{2d-1}}$사이에 i-에지가 존재한다. 오드 연결망에서 각 노드를 구성하는 이진비트스트링 중에서 하나의 비트스트링 x_i를 제외한 나머지 비트스트링들을 모두 보수로 변환하는 연산을 σ_i라 하면, $U=\sigma_i(V)$인 두 노드 U와 V 사이에 i-에지가 존재한다. 본 논문에서는 오드 연결망 O_d의 한 노드, $d-1$개의 0과 d개의 1로 구성된 노드 $S=0...01...1$을 $S=0^{d-1}1^d$로 표현하겠다.

오드 연결망 O_d의 임의의 두 노드를 $U(=u_1u_2...u_i...u_{2d-1})$와 $V(=v_1v_2...v_i...v_{2d-1})$라 할 때, 두 노드 U와 V 사이에 Exclusive-OR 함수($\oplus$)를 적용시킨 결과를 $R(=r_1r_2...r_i...r_{2d-1})$이라고 표시하겠다($r_i=u_i\oplus v_i$, $1\le i\le 2d-1$). 두 노드 U와 V 사이의 해밍거리 H_{UV}는 $r_i=1$인 r_i의 개수이다. 두 노드 U와 V 사이의 거리(distance)를 $dist(U,V)$라고 표시하면, 두 노드 사이의 거리 $dist(U,V)$는 $\min\{H_{UV}, H_{U\overline{V}}\}$이다[4]. 그림 1은 3차원 오드 연결망이다.

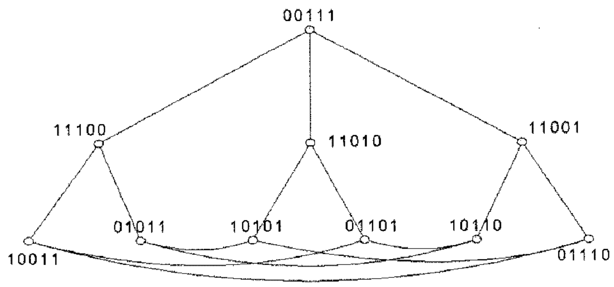

그림 1 3차원 오드 연결망 O_3

3. 계층적 오드 연결망(HON)의 설계

본 논문에서는 오드 연결망을 기반으로 하는 새로운 계층적 연결망을 설계한다. 이 계층적 연결망을 HON (Hierarchical Odd Network)이라고 하고, HON을 구성하는 각 오드 연결망 O_d를 클러스터라고 하겠다. $HON(C_d,C_d)$은 C_d개의 클러스터로 구성된다. 각 노드는 (I,J)와 같이 두 개의 주소로 표현하며, I와 J를 구성하는 비트스트링의 개수는 같다. 노드 주소 표현에서 I는 클러스터의 주소를 나타내고, J는 클러스터 내부의 주소를 나타낸다. 각 노드는 $d+1$ 혹은 $d+2$개의 에지를 갖는다. $I\neq J$인 경우에는 클러스터와 클러스터를 연결하는 에지가 존재하고, 그렇지 않은 경우에는 클러스터와 클러스터를 연결하는 에지가 존재하지 않는다. 이 에지

를 외부에지라고 하며, 두 노드 (I,J)와 (J,I)를 연결한다. 외부에지를 제외한 나머지 에지를 내부에지라고 한다. $HON(C_d,C_d)$의 분지수는 d+2이다. 그림 2는 $HON(C_3,C_3)$의 구조를 나타내고 있고, 그림 2의 각 클러스터는 3차원 오드 연결망 O_3을 나타낸다.

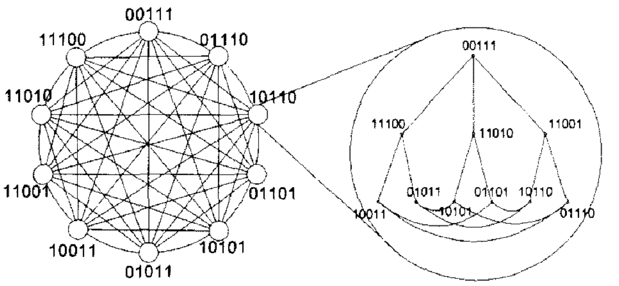

그림 2 $HON(C_3,C_3)$

3.1 연결도

노드 연결도는 연결망을 노드 중복없이 둘 이상의 부분으로 나누기 위해 제거해야 할 최소 노드의 개수이다. 상호연결망의 노드 연결도가 k이면 상호연결망의 임의의 두 노드 사이의 노드 중복 없는 경로가 최소 k개가 존재하고 또한 그 역도 성립한다는 것은 멩거(Menger)의 정리에 의해 잘 알려져 있다.

정리 1. $HON(C_d,C_d)$의 노드 연결도는 d+1이다.

증명. $HON(C_d,C_d)$를 구성하는 노드의 분지수는 노드 주소에 따라 d+1 또는 d+2로 구성되어 있다. 분지수 d+1을 갖는 노드는 동일한 클러스터 내부의 노드 사이에만 에지가 존재한다. 그리고 분지수 d+2를 갖는 노드는 클러스터 내부의 노드들 사이에 d+1개의 에지가 존재하고, 다른 클러스터 내부의 한 노드와 1개의 에지가 존재한다. $HON(C_d,C_d)$에서 임의의 d개 노드를 제거해도 $HON(C_d,C_d)$이 분할되지 않음을 보이겠다. $HON(C_d,C_d)$에서 X는 고장이 발생한 노드의 집합이고, 집합 X의 원소의 개수는 d라 하자. $HON(C_d,C_d)$에서 고장 노드 집합 X를 제거한 그래프가 연결된 그래프(connected graph)임을 통하여 $HON(C_d,C_d)$의 노드 연결도는 d+1임을 보인다. $HON(C_d,C_d)$의 임의의 노드를 S라 하고, $HON(C_d,C_d)$에서 고장 노드 집합 X를 제거한 그래프를 $HON(C_d,C_d)$-X로 나타낸다. $HON(C_d,C_d)$에서 제거될 노드 집합 X의 위치에 따라 2가지로 나누어 $HON(C_d,C_d)$-X가 항상 연결된 그래프임을 보인다.

경우 1) 고장 노드 집합 X가 $HON(C_d,C_d)$의 동일한 클러스터에 위치한 경우 : $HON(C_d,C_d)$의 노드 S의 주소를 (I,I)라 할 때, $HON(C_d,C_d)$의 노드 S를 포함하는 클러스터 I의 주소를 갖는 오드 연결망 O_d의 분지수는 d+1이다. 노드 S에 인접한 d+1개의 노드가 제거될 노드 집합 X와 동일하다면 노드 S를 포함하는 클러스터 I는 2개의 구성요소로 분할된다. 즉, 오드 연결망 O_d-X 연결망과 노드 S로 분할된다. 고장 노드 집합 X의 원소의 개수가 d라 하자. 그러면 오드 연결망 O_d의 분지수는 d+1이므로 $HON(C_d,C_d)$에서 어느 한 개의 클러스터 내에서 d개의 고장 노드가 발생하는 경우 $HON(C_d,C_d)$-X는 항상 연결되어 있다. 만약 클러스터 I의 어떤 노드 S에 인접한 d+1개의 노드 중 a개만 고장 노드 집합 X에 속하는 경우 노드 S가 d+1-a개의 고장나지 않은 노드와 연결되어 있기 때문에 이 경우에도 $HON(C_d,C_d)$이 연결된 그래프임을 쉽게 알 수 있다.

경우 2) X가 두 개 이상의 클러스터에 위치한 경우 : $HON(C_d,C_d)$에서 고장난 노드가 2개 이상의 클러스터 I와 J에 분산되어 있다고 할 때, 한 개의 클러스터 I 또는 J에서 고장이 발생하는 노드는 많아야 d-1개이다. $HON(C_d,C_d)$에서 클러스터 내의 각 노드당 분지수는 d+1 또는 d+2이므로, 클러스터 I(또는 J)의 노드 S에서 인접한 d-1개의 노드를 제거해도 노드 S는 노드 S를 포함하는 클러스터 I의 한 노드와 연결되어 있음을 경우 1에 의해 쉽게 알 수 있다. 제거할 나머지 한 개의 노드가 S를 포함하지 않는 클러스터 J의 노드라 해도 $HON(C_d,C_d)$-X는 연결되어 있음을 쉽게 알 수 있다.

그러므로 $HON(C_d,C_d)$에서 어떤 위치에 있는 고장 노드 집합 X를 제거하여도 $HON(C_d,C_d)$는 항상 연결되어 있으므로 $HON(C_d,C_d)$의 연결도는 d+1이다. □

3.2 라우팅 알고리즘

$HON(C_d,C_d)$의 라우팅 알고리즘을 다음과 같이 구성하겠다. $HON(C_d,C_d)$의 임의의 두 노드를 (I,J)와 (K,L)라고 하자. I,J,K,L은 임의의 비트스트링이다. 만약 I=K이면 두 노드가 동일한 클러스터에 포함되어 있으므로 두 노드 (I,J)와 (K,L) 사이의 라우팅은 오드 연결망의 라우팅 알고리즘을 적용한다. 라우팅 알고리즘에 의해 설정된 경로를 표현할 때 오드 연결망의 라우팅 알고리즘에 의한 경로는 ⇒로 표시하고, 클러스터와 클러스터 사이의 경로는 →라고 표시하겠다. $I \neq K$인 경우 두 노드 사이의 라우팅 알고리즘은 다음과 같다.

• 라우팅 알고리즘 A

[단계 1] 오드 연결망의 라우팅 알고리즘에 의해 노드 (I,J)와 노드 (I,K) 사이의 경로를 설정한다.

[단계 2] 외부에지에 의해 노드 (I,K)와 노드 (K,I) 사이의 경로를 설정한다.

[단계 3] 오드 연결망의 라우팅 알고리즘에 의해 노드 (K,I)와 노드 (K,L) 사이의 경로를 설정한다.

라우팅 알고리즘 A에 의해 설정된 경로 A_p는 다음과 같다.

경로 A_p : $(I,J) \Rightarrow (I,K) \rightarrow (K,I) \Rightarrow (K,L)$

• 라우팅 알고리즘 B

[단계 1] 오드 연결망의 라우팅 알고리즘에 의해 노드 (I,J)와 노드 (I,L) 사이의 경로를 설정한다.

[단계 2] 외부에지에 의해 노드 (I,L)와 노드 (L,I) 사이의 경로를 설정한다.

[단계 3] 오드 연결망의 라우팅 알고리즘에 의해 노드 (K,I)와 노드 (L,K) 사이의 경로를 설정한다.

[단계 4] 외부에지에 의해 노드 (L,K)와 노드 (K,L) 사이의 경로를 설정한다.

라우팅 알고리즘 B에 의해 설정된 경로 B_p는 다음과 같다.

경로 B_p : $(I,J)\Rightarrow(I,L)\rightarrow(L,I)\Rightarrow(L,K)\rightarrow(K,L)$

라우팅 알고리즘 A에 의해 설정된 경로 A_p를 사용하여 구해진 두 노드 (I,J)와 (K,L) 사이의 라우팅 거리를 R_A라고 하고, 라우팅 알고리즘 B에 의해 설정된 경로 B_p를 사용하여 구해진 두 노드 (I,J)와 (K,L) 사이의 라우팅 거리를 R_B라고 하자. 그러면 두 노드 사이의 라우팅 거리는 다음과 같다.

$R_A = dist(J,K)+dist(I,L)+1$

$R_B = dist(J,L)+dist(I,K)+2$

정리 2. $HON(C_d,C_d)$의 임의의 두 노드를 (I,J)와 (K,L)라고 하고$(I\neq K)$, 노드 (I,J)로부터 노드 (K,L)까지의 경로를 P라고 하면, 경로 P가 3개 이상의 외부에지를 포함하면, 경로 P는 최단 경로가 아니다.

증명. 원시노드를 (I,J)라고 하고, 목적노드를 (K,L)라고 가정하자. $I=V_0$, $J=V_{-1}$, $K=V_x$, $L=V_{x+1}$라고 표시하고, 두 노드를 연결하는 경로 P가 x개의 외부 에지를 포함한다면$(x\geq 3)$, 경로 P는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$P = (V_0,V_{-1}) \Rightarrow (V_0,V_1) \rightarrow (V_1,V_0) \Rightarrow (V_1,V_2) \rightarrow (V_2,V_1) \Rightarrow \cdots \rightarrow (V_x,V_{x-1}) \Rightarrow (V_x,V_{x+1}).$$

경로 P의 라우팅 거리 $R_P = \sum_{i=1}^{x+1} dist(V_{i-2},V_i)+x$이다.

x값에 따라 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1) x가 홀수일 때 : 하나의 외부 에지를 포함하는 경로 Q를 다음과 같이 구성한다.

$$Q = (V_0,V_{-1}) \Rightarrow (V_0,V_1) \Rightarrow (V_0,V_3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (V_0,V_x) \rightarrow (V_x,V_0) \Rightarrow (V_x,V_2) \Rightarrow (V_x,V_4) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (V_x,V_{x+1}).$$

경로 Q의 라우팅 거리 $R_Q = \sum_{i=1}^{x+1} dist(V_{i-2},V_i)+1$ 이다. 그래서 $R_Q<R_P$ 이므로, 경로 Q의 길이가 경로 P의 길이보다 더 짧다는 것을 알 수 있다.

경우 2) x가 짝수일 때 : 두 개의 외부 에지를 포함하는 경로 Q를 다음과 같이 구성한다.

$$Q = (V_0,V_{-1}) \Rightarrow (V_0,V_1) \Rightarrow (V_0,V_3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (V_0,V_{x+1}) \rightarrow (V_{x+1},V_0) \Rightarrow (V_{x+1},V_2) \Rightarrow (V_{x+1},V_4) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (V_{x+1},V_x) \rightarrow (V_x,V_{x+1}).$$

경로 Q의 라우팅 거리 $R_Q = \sum_{i=1}^{x+1} dist(V_{i-2},V_i)+2$ 이다. 그래서 $R_Q<R_P$ 이므로, 경로 Q의 길이가 경로 P의 길이보다 더 짧다는 것을 알 수 있다.

그러므로 만약 경로 P가 3개 이상의 이상의 외부 에지를 포함하면, 경로 P는 최단 경로가 아님을 알 수 있다. □

정리 3. 임의의 두 노드가 동일한 클러스터에 포함되어 있으면 두 노드를 연결하는 최단경로에는 외부에지가 포함되지 않는다.

증명. 정리 2에 의해 3개 이상의 외부에지가 포함되면 최단경로가 아님을 증명하였으므로, 두 노드를 연결하는 최단경로에 하나의 외부에지가 포함되었다고 가정하자. 그러면 두 노드는 서로 다른 클러스터에 포함되어 있다. 이것은 가정에 모순이다. 두 노드를 연결하는 최단경로에 두 개의 외부에지가 포함되었다고 가정하자. 두 노드를 포함하는 클러스터를 M이라고 하고, M과 연결된 클러스터를 T라고 하면, M과 T를 연결하는 외부에지 e는 HON의 정의에 의해 하나만이 존재한다. 두 노드를 연결하는 최단경로에 두 개의 외부에지가 포함되었다는 것은 에지 e를 두 번 사용한다는 것을 의미하므로 이 경우도 최단경로가 아님을 알 수 있다. □

정리 4. $HON(C_d,C_d)$의 임의의 두 노드를 (I,J)와 (K,L)라 하자$(I\neq K)$. 두 노드 (I,J)와 (K,L) 사이의 라우팅 경로를 P라고 하고, 하나의 외부에지를 이용하는 라우팅 알고리즘 A를 사용하여 구해진 라우팅 거리를 R_A라고 하고, 두 개의 외부에지를 이용하는 라우팅 알고리즘 B를 사용하여 구해진 라우팅 거리를 R_B라고 하자. 그러면 두 노드 사이의 최단 경로 라우팅의 거리는 다음과 같다.

1) $R_A = dist(J,K)+dist(I,L)+1$

2) $R_B = dist(J,L)+dist(I,K)+2$

특히, $I=J$이거나 $I=L$이거나 $K=J$이거나 $K=L$인 경우에는 라우팅 알고리즘 A가 최단 경로가 된다.

증명 1) 노드 (I,J)와 (K,L) 사이를 연결하는 라우팅 경로 중에 하나의 외부에지를 이용하는 경로는 (I,K)와 (K,I)를 연결하는 외부에지를 반드시 사용해야만 한다. 그러므로 최단 경로 라우팅은 $(I,J) \Rightarrow (I,K) \rightarrow (K,I) \Rightarrow (K,L)$ 이므로, $R_A = dist(J,K)+dist(I,L)+1$이다.

2) 두 개의 외부 에지를 포함하는 경로 P를 다음과 같이 구성한다.

$P = (I,J) \Rightarrow (I,X) \rightarrow (X,I) \Rightarrow (X,K) \rightarrow (K,X) \Rightarrow (K,L)$ $(X\neq I,\ X\neq K)$.

그러면 경로 P의 거리는 $dist(J,X)+dist(I,K)+dist(X,L)+2$이다. $L=X$라 하자. 그러면 $P' = (I,J) \Rightarrow (I,L)$

$\rightarrow (L,I) \Rightarrow (L,K) \rightarrow (K,L)$이므로 거리는 $dist(J,L)+dist(I,K)+2$이다. $dist(J,X)+dist(I,K)+dist(X,L)+2 \geq dist(J,L)+dist(I,K)+2$이므로 P'가 최소임을 알 수 있다.

$I=J$인 경우에 $J=X$라 하자. 그러면 경로 $P = (J,J) \Rightarrow (J,K) \rightarrow (K,J) \Rightarrow (K,L)$ 이므로 거리는 $dist(J,K)+dist(J,L)+1$이다. $J \neq K$인 경우에 $J=X$라 하면, 경로 $P = (I,J) \rightarrow (J,I) \Rightarrow (J,K) \rightarrow (K,J) \Rightarrow (K,L)$ 이므로 거리는 $dist(I,K)+dist(J,L)+2$이다. 그러므로 경로 P의 거리는 $J=K$인 경우에 라우팅 알고리즘 A를 이용한 라우팅이 최소임을 알 수 있다. $I=L$이거나 $K=J$이거나 $K=L$인 경우도 동일한 방법으로 증명할 수 있다. □

정리 2와 4에 의해 $HON(C_d,C_d)$에서 $I \neq K$인 두 노드 (I,J)와 (K,L)을 연결하는 정규 라우팅 알고리즘을 찾을 수 있다. 정규 라우팅 알고리즘은 두 개의 라우팅 알고리즘 A, B 중에서 짧은 경로를 갖는 알고리즘이다. 두 노드 (I,J)와 (K,L) 사이의 거리 d는 두 개의 경로 길이 중에서 최단 거리가 된다. 특히, $I=J$이거나 $I=L$이거나 $K=J$이거나 $K=L$인 경우에는 라우팅 알고리즘 A가 최단 거리가 된다.

- $d=\min(R_A,R_B)$

예를 들어 두 노드 $V=(0011,1010)$과 $W=(1100,0110)$ 사이의 거리 d를 구해보자. 두 개의 라우팅 경로의 길이는 다음과 같다.

$R_A = 2+2+1 = 5.$

$R_B = 1+1+2 = 4.$

R_B가 최소값을 가지므로, 라우팅 알고리즘 B가 두 노드 V와 W에 대한 정규 라우팅 알고리즘임을 알 수 있다.

3.3 지름

연결망 G 내부의 임의의 두 노드 사이의 거리(distance)는 두 노드 사이의 최단 경로의 길이(length)를 의미하며, 연결망 G의 지름(diameter)은 두 노드 사이의 최단경로의 최대 거리(maximal distance)를 의미한다.

정리 5. $HON(C_d,C_d)$의 지름은 $2d-1$이다.

증명. 3개 이상의 외부에지를 포함하는 경로는 최단 거리가 아님을 정리 2에서 증명하였고, 동일한 클러스터에 포함되어 있는 두 노드를 연결하는 최단 경로에는 외부에지가 포함되지 않음을 정리 3에서 증명하였다. 그러므로 하나의 클러스터에 포함되어 있는 임의의 두 노드를 연결하는 최단경로의 최대거리는 오드 연결망의 지름이고, 서로 다른 클러스터에 포함되어 있는 임의의 두 노드를 연결하는 최단경로의 최대거리는 하나의 외부에지를 포함하는 라우팅 알고리즘 A 또는 두 개의 외부에지를 포함하는 라우팅 알고리즘 B의 최대거리이다. 오드 연결망의 지름은 $d-1$이다[4]. $HON(C_d,C_d)$의 임의의 두 노드를 $(I,J) = (00...0011...11,00...0011...11)$와 $(K,L) = (1010...101,1010...101)$라고 하자. $I=J$ 이고 $K=L$ 이므로 정리 4에 의해 두 노드 사이의 최단 경로 라우팅은 알고리즘 A에 의해 구할 수 있다. $dist(J,K)=dist(I,L)=d-1$ 이므로 라우팅 알고리즘 A를 이용한 두 노드 사이의 최대거리는 $d-1+1+d-1=2d-1$이다. 라우팅 알고리즘 B를 이용한 두 노드 사이의 최대거리는 $d-1+d-1+2=2d$이다. 그러나 $2d$는 $HON(C_d,C_d)$의 지름이 될 수 없다. 왜냐하면 정규 라우팅 알고리즘은 두 개의 라우팅 알고리즘 A, B 중에서 짧은 경로를 갖는 알고리즘이므로, 라우팅 알고리즘 B를 이용한 두 노드 사이의 최대거리가 $2d$인 경우에는 정규 라우팅 알고리즘은 라우팅 알고리즘 A를 이용하여 구한 거리가 선택된다. 그러므로 알고리즘 B를 이용한 최대거리는 알고리즘 A를 이용한 최대거리보다 작거나 같다. 정리 2에서 외부 에지를 3개 이상 사용한 경우는 최단 거리가 아님을 증명하였으므로 $HON(C_d,C_d)$의 지름은 $2d-1$임을 쉽게 알 수 있다. □

3.4 방송

방송은 상호연결망을 위한 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미한다. 방송은 크게 일-대-다 방송과 다-대-다 방송으로 나눌 수 있으며, 일-대-다 방송은 메시지를 갖고 있는 한 노드에서 다른 모든 노드로 메시지를 전송하는 것이고, 다-대-다 방송은 메시지를 갖고 있는 각각의 노드들이 다른 모든 노드들로 메시지를 전송하는 것이다. 정리 6에서 $HON(C_d,C_d)$의 일-대-다 방송 시간이 $4d-3$임을 보인다.

정리 6. $HON(C_d,C_d)$의 일-대-다 방송 시간은 $4d-3$이다.

증명. $HON(C_d,C_d)$의 각 클러스터는 오드 연결망을 나타내며, 오드 연결망의 방송 수행 시간은 $2d-2$[11]이다. 그리고 하나의 클러스터는 자신을 제외한 다른 모든 클러스터와 외부에지에 의해 연결되어 있다. 방송하는 과정은 다음의 3단계로 나눈다.

[단계 1] 메시지를 가지고 있는 노드 S가 자신이 속해 있는 클러스터 내부의 모든 노드에 메시지를 전송한다.

[단계 2] 노드 S를 포함한 클러스터의 모든 노드에서 외부에지를 이용하여 각 클러스터에 적어도 한 노드로 메시지를 전송한다.

[단계 3] 각 클러스터에서 [단계 1]의 과정을 반복한다.

방송 시간은 [단계 1]에서 오드 연결망의 방송 수행 시간과 동일하므로 $2d-2$이고, [단계 2]에서 외부에지를 이용한 전송을 1회 수행하고, [단계 3]에서 [단계 1]의 과정을 반복하므로 메시지 전송을 $2d-2$번 수행한다. 따라서 방송 시간은 $4d-3$이다. □

4. 망비용 비교 분석

지금까지의 연구 결과를 바탕으로 본 논문에서 제안한 $HON(C_d,C_d)$이 병렬 처리를 위한 대규모 시스템 구현에 적합하다는 것을 보이기 위해 기존에 제안된 오드 연결망 O_d과 하이퍼큐브를 기반으로 설계된 $HCN(m,m)$, $HFN(m,m)$보다 망비용 측면에서 우수하다는 것을 표 1을 통하여 보이겠다. 네 가지 연결망은 차원 증가에 따른 노드 증가 개수가 동일하지 않기 때문에 노드수가 비슷한 경우를 비교하여 망비용을 분석하도록 하겠다.

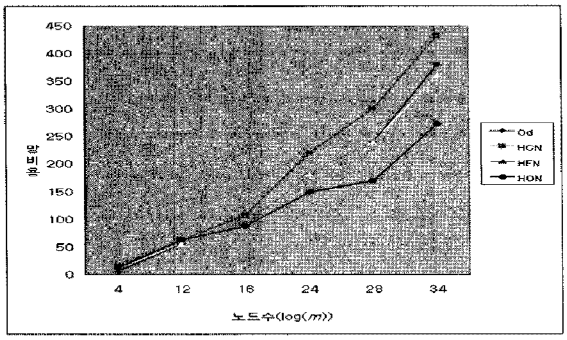

그림 3 망비용 비교

망비용 비교 결과를 표 1과 그림 3에 나타냈다. 이와 같은 망비용 비교 결과에 의해 본 논문에서 제안한 $HON(C_d,C_d)$이 기존에 제안된 오드 연결망과 하이퍼큐브를 기반으로 설계된 $HCN(m,m)$, $HFN(m,m)$보다 망비용 측면에서 우수하다는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 오드 연결망을 기반으로 하는 새로운 상호연결망, 계층적 오드 연결망 $HON(C_d,C_d)$을 제안하였고, $HON(C_d,C_d)$의 여러 가지 성질들을 분석하였다. 즉, 노드연결도가 $d+1$임을 증명하였고, 라우팅 알고리즘을 제안하였고, 지름이 $2d-1$임을 보였으며, 일-대-다 방송 수행 시간이 $4d-3$임을 보였다. 또한 기존에 제안된 오드 연결망과 $HCN(m,m)$, $HFN(m,m)$과 망비용 측면에서 비교 분석함으로써 $HON(C_d,C_d)$이 더욱 우수한 연결망임을 입증하였다. 이와 같은 결과는 $HON(C_d,C_d)$이 병렬 처리를 위한 대규모 시스템 구현에 매우 적합한 연결망임을 입증하는 결과이다.

표 1 망비용 비교

O_d				$HCN(m,m)$			
노드수	분지수	지름	망비용	노드수	분지수	지름	망비용
$\binom{2d-1}{d}$	d	$d-1$	d^2-d	2^{2m}	$m+1$	$m+1+\left\lfloor \frac{m+1}{3} \right\rfloor$	$(m+1)\times(m+\left\lfloor \frac{m+1}{3} \right\rfloor+1)$
$\binom{5}{3}=10$	3	2	6	$2^4=16$	3	5	15
$\binom{15}{8}=6435$	8	7	56	$2^{12}=4096$	7	9	63
$\binom{19}{10}=92378$	10	9	90	$2^{16}=65536$	9	12	108
$\binom{27}{14}\fallingdotseq 2.0\times10^7$	14	13	182	$2^{24}\fallingdotseq 1.67\times10^7$	13	17	221
$\binom{31}{16}\fallingdotseq 6.01\times10^8$	16	15	240	$2^{28}\fallingdotseq 2.68\times10^8$	15	20	300
$\binom{39}{20}\fallingdotseq 6.89\times10^{10}$	20	19	380	$2^{34}\fallingdotseq 1.72\times10^{10}$	18	24	432

$HFN(m,m)$				$HON(C_d,C_d)$			
노드수	분지수	지름	망비용	노드수	분지수	지름	망비용
2^{2m}	$m+2$	$2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil+1$	$(m+2)\times(2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil+1)$	$\binom{2d-1}{d}^2$	$d+2$	$2d-1$	$(d+2)\times(2d-1)$
$2^4=16$	4	3	12	$\binom{3}{2}^2=9$	4	3	12
$2^{12}=4096$	8	7	56	$\binom{9}{5}^2=15876$	7	9	63
$2^{16}=65536$	10	9	90	$\binom{11}{6}^2=213444$	8	11	88
$2^{24}\fallingdotseq 1.67\times10^7$	14	13	182	$\binom{15}{8}^2\fallingdotseq 4.14\times10^7$	10	15	150
$2^{28}\fallingdotseq 2.68\times10^8$	16	15	240	$\binom{17}{9}^2\fallingdotseq 5.91\times10^8$	11	17	170
$2^{34}\fallingdotseq 1.72\times10^{10}$	19	19	361	$\binom{21}{11}^2\fallingdotseq 1.24\times10^{11}$	13	21	273

참 고 문 헌

[1] S. L. Johnsson, "Communication Efficient Basic Linear Algebra Computations on Hypercube Architectures," *Journal of Parallel Distributed Computer*, vol.4, pp.133-172, 1987.
[2] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes," *Morgan Kaufmann Publishers*, 1992.
[3] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes," *IEEE Trans. Parallel Distributed syst.*, vol.2, no.1, pp.31-42, 1991.
[4] A. Ghafoor and T. R. Bashkow, "A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks," *IEEE Trans. Computers*, vol.40, no.2 pp.225-232, 1991.
[5] A. Ghafoor, "A Class of Fault-Tolerant Multiprocessor Networks," *IEEE Trans. Reliability*, vol.38, no.1, pp.5-15, 1989.
[6] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," *Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510*, pp.858-865, 2002.
[7] K. Ghose and K. R. Desai. "Hierarchical Cubic Network," *IEEE Trans. Parallel Distributed Syst.*, vol.6, no.4, pp.427-435, 1995.
[8] D-R. Duh, G-H. Chen and J-F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modules," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol.6, no.7, pp.714-723, July 1995.
[9] N. Biggs, "Some Odd Graph Theory," *Annals of New York Academy of Sciences*, vol.319, pp.71-81, 1979.
[10] Jong-Seok Kim, Hyeong-Ok Lee, "Comments on "A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks," *IEEE Transaction on Computers*, vol.57, no.6, p.864, 2008.
[11] Jong-Seok Kim, Hyeong-Ok Lee, "One-to-All Broadcasting of Odd Networks for One-port and All-port Models," *ETRI Journal*, vol.30, no.6, pp. 856-858, 2008.
[12] Jong-Seok Kim, Eddie Cheng, Laszlo Liptak, Hyeong-Ok Lee, "Embedding Hypercubes, Rings and Odd graphs into Hyper-stars," *International Journal of Computer Mathematics*, vol.86, no.5, pp.771-778, 2009.
[13] 김종석, 심현, 이형옥, "폴디드 하이퍼큐브와 이븐연결망, 오드연결망 사이의 임베딩 알고리즘", *정보과학회 논문지 : 시스템 및 이론*, vol.35, no.7·8, pp.318-326, 2008.

김 종 석

1995년 순천대학교 전산학과(학사). 2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학석사) 2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사). 2005년~2008년 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 박사후과정. 2008년~현재 영남대학교 전자정보공학부 연구교수. 관심분야는 병렬 및 분산처리, 계산이론, 네트워크 설계 및 분석

이 형 옥

정보과학회논문지 : 시스템 및 이론
제 36 권 제 3 호 참조