韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 707-734

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 707-734

분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해 분석

김 경 미 (고려대학교 교과교육연구소)
황 우 형 (고려대학교)

본 연구에서는 초등학교 4, 5, 6학년 20명을 대상으로 분수의 덧셈과 뺄셈에 대하여 아동이 어떻게 이해하고 있는지 알아보고, 그것이 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보았다. 연구 결과 많은 아동들이 분수의 덧셈을 합병의 상황으로, 분수의 뺄셈을 제거의 상황으로 이해하고 있었으며, 대부분 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈과 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈을 동일한 의미로 이해하고 있었다. 몇몇 아동들은 분수의 덧셈과 뺄셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하고 있기 보다는 연산의 계산 절차를 연산의 의미로 이해하고 있었는데, 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈보다 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈을 계산절차로만 이해하고 있는 아동들이 상대적으로 많았다. 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해가 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 조사한 결과 분수의 덧셈에 대하여 아동이 어떤 의미로 이해하고 있느냐는 분수의 덧셈 문장제 해결에 큰 영향을 주지 않았다. 또한 분수의 덧셈에 대하여 동일한 이해 범주에 포함된 아동들 간에도 문장제의 해결 방법에 공통된 특성은 발견되지 않았다. 반면, 분수의 뺄셈에서는 많은 아동이 분수의 뺄셈에 대하여 자신이 지니고 있는 의미론적 구조에 기초하여 문제를 해결하려는 경향을 보였으며, 동일한 이해 범주에 포함된 아동들 간에도 분수의 뺄셈 문장제 해결 방법에 공통된 특성이 발견되었다. 특히 분수의 덧셈과 뺄셈을 특정 상황과 연관 지어 이해하고 있기 보다는 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 절차를 각 연산의 의미로 이해하고 있었던 아동들은 다른 아동들에 비해 문장제 해결 능력이 떨어졌다.

Ⅰ. 서 론

어떻게 인간이 수학적 사고를 구성하고 이해하는가는 수학 교육에서 중요한 초점 중의 하나이다. 개념을 이해하는 것은 개념의 구조를 충실히 반영한 정신적 표상이나 정신 모델을 갖는 것이고(English & Halford, 1995), 그 개념이 다른 개념들과 어떻게 관련되고 연결되어 있는지 아는 것을 말한다(Hiebert et al., 1997). Piaget의 인지 발달 이론에 따르면, 개념의 이해는 지식을 기계적으로 연합한 것이 아니라 아동이 그 개념을 자신이 가지고 있는 기존의 인지구조에 동화시키거나, 새로운 개념이 자신의 인지구조에 동화되지 않을 경우에는 자신의 인지 구조를 조절함으로써 새로운 개념이 기존의 지식과 적절한 관계망을 형성하는 것이다(Tall, 1991; Vinner & Dreyfus, 1989). 훌륭한 교사

* 접수일(2009년 8월 3일), 게재확정일(2009년 8월 24일)
* ZDM 분류 : C32
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 분수, 덧셈, 뺄셈, 이해, 문장제의 의미론적 구조

는 아동이 수학적 개념을 어떻게 이해하고 있는지에 주의를 기울이고, 아동이 자신의 개념 구조에 기초하여 새로운 지식을 구성할 수 있도록 도울 것이다. 수학적 개념에 대한 아동의 이해를 측정한다는 것은 결코 쉬운 일이 아니며, 완벽하게 측정한다는 것은 불가능한 일이다. 그러나 교사는 다양한 방법을 이용하여 아동들이 수학적 개념을 어떻게 이해하고 있는지 계속적으로 살펴보아야 아동들이 수학적 개념을 의미 있게 학습할 수 있도록 도울 수 있으며, 적절한 교수학적 방안을 모색할 수 있다. 이런 점에서 아동의 이해에 관한 고찰은 의미를 가진다.

초등 수학에서 덧셈과 뺄셈은 가장 기초 개념으로 학교 교육의 시작과 함께 도입되는 연산 활동이다. 1970년대 후반부터 지난 30년 간 많은 학자들에 의하여 덧셈과 뺄셈에 관한 연구가 수행되었다. 연구 초기에는 자연수의 덧셈과 뺄셈에 관한 연구들이 주를 이루었는데, 특히 자연수의 덧셈과 뺄셈의 의미론적 분류와 아동의 비형식적 전략에 관한 연구가 많이 이루어졌다(예를 들어, Bell et al., 1984; Carpenter et. al., 1981; 1983; 1984; 1988a; 1993; Christou, & Philippou, 1998; De Corte, & Verschaffel, 1987; Fischbein et al., 1985; Fuson, 1992; Nesher et. al., 1982). 연산의 의미론적 구조는 언어표현과 의미와의 관계를 나타내는 것으로, 언어의 배열과 수학적 연산 구조의 관계를 의미한다(Fuson, 1992). 문장제의 의미론적 구조는 많은 학자들에 의하여 문제 상황이 수학의 어떤 의미와 연결되는지에 따라, 문장제에 포함된 양이 정적인지, 동적인지에 따라, 미지수의 위치에 따라, 언어의 배열순서와 수식의 배열순서가 일치하는지 등 다양한 변인에 의해 세분화되었다(Fuson, 1992).

Riley, Greeno와 Heller (1983)는 덧셈과 뺄셈 문장제를 크게 변화(Change), 합병(Combine), 비교(Compare)로 분류하였고, Carpenter et al. (1988b)는 첨가(Join), 합병(Combine), 제거(Separate), 비교(Compare)로 분류하였으며, Fuson(1992)은 '비교(Compare)', '합병(Combine)', '첨가에 의한 변화(Change add to)', '제거에 의한 변화(Change take from)'로 분류하였다. Carpenter et al. (1988a)에 의하면, 의미론적 요소는 아동들의 문장제 해결 방법에 중요한 역할을 한다. 그러나 Mulligan et al. (1997)는 문제의 의미구조와 학생들이 그 문제를 풀기위해 사용하는 해결 방법 사이에는 직접적인 일치가 없음을 주장하였고, Christou와 Philippou (1998)는 문제 상황과 아동의 인지 발달 수준, 아동의 문제 해결 능력 사이에는 연관성이 있음을 실험 연구를 통하여 알아내었다. 최근 황우형 · 김경미 (2008)는 아동이 자연수의 사칙연산을 어떤 의미로 이해하고 있는지 조사하고, 그것이 1단계 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아본 결과 덧셈을 제외한 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대한 의미론적 구조와 문장제 해결 방법 사이에 긴밀한 관련성이 발견되었다. 서로 다른 연구 결과들로 말미암아 아동이 덧셈과 뺄셈을 어떻게 이해하고 있으며, 그것이 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 좀 더 심층적인 연구가 필요하다.

자연수의 덧셈과 뺄셈의 방대한 연구들에 비하면, 분수의 덧셈, 뺄셈 문장제의 의미론적 구조에 관한 연구는 매우 미흡하다. 초등수학에서 분수의 연산 학습이 매우 중요함에도 불구하고, 학교 현장에서는 아직도 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 의미보다는 형식적인 계산 알고리즘과 빠른 계산 능력을 강조하고 있다. 그로 인하여 많은 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산식보다는 문장제를 더욱 어려워

하고 있다. 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 계산해야 할 때 분수의 다양한 기호의 의미와 기호 사이의 연결성에 대해서 이해하고 있지 못하는데, 그것은 통합적인 관점에서 아동들의 수학적 능력을 계발하는데 장애가 된다(Kilpatrick et al., 2001). 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 의미 있게 학습할 수 있도록 돕기 위해서는 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있는지에 대한 고찰이 선행되어야 한다.

따라서 본 연구에서는 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떻게 이해하고 있는지 조사하고, 그것이 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보고자 한다. 본 연구의 세부 연구문제는 다음과 같다.

1. 아동은 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떻게 이해하고 있는가?
   1-1. 아동은 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈과 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있는가?
   1-2. 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈과 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 아동의 이해에 어떤 차이가 있는가?
2. 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해는 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제 해결에 어떤 영향을 주는가?
   2-1. 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해는 아동의 문장제 해결 방법에 어떤 영향을 주는가?
   2-2. 분수의 덧셈, 뺄셈의 각 연산에 대하여 동일한 이해 범주에 속한 아동들은 문장제 해결 방법에 공통된 특성을 가지고 있는가?

Ⅱ. 문헌 고찰

1. 분수 학습

많은 아동들이 분수 학습에 어려움을 겪고 있으며(Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Kieren, 1976; Streefland, 1991), 예비 교사와 현직 교사들도 분수의 교수-학습에 어려움을 겪고 있음이 많이 보고되었다(Ma, 1999; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993). 실제 우리의 현실도 크게 다르지 않다. 많은 아동들이 분수의 다양한 개념을 이해하고 있지 않으며(권성룡, 2003; 오유경 · 김진호, 2009), 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 예비 교사들의 이해가 매우 부족한 것으로 나타났다(박교식 · 송상헌 · 임재훈, 2004; 방정숙 · Li, 2008; 오영열, 2004). Pearn과 Stephens (2007)는 많은 아동들과 교사들이 분수 학습에 어려움을 겪고 있으며, 그 이유는 분수 개념이 정교하고 자연수 개념과 차이가 있으며, 아동이 분수, 소수, 대수적 형식으로 더 나아가기 위해서는 적절한 이미지와 행동, 언어를 계발해야하기 때문이라고 하였다. English와 Halford (1995)는 분수 학습이 어려운 주요 원인으로 분수는 수의 관계를 연결해서 사고해야 한다는 것과 분수에 할당될 수 있는 다양한 의미가 존재한다는 점을 들었

다. 예를 들어, 분수 $\frac{3}{4}$은 "동일 크기의 4 부분 중의 3 부분 (부분-전체)", "3 나누기 4 (몫)", "수나 집합, 대상 등을 4개로 나눈 것 중의 3개 (연산자, 분자 3은 양을 확대하고, 분모 4는 양을 축소함)", "4 부분에 대한 3 부분 (비)", "수직선 0과 1 사이의 한 점 (측정)" 중 어떤 의미로도 해석될 수 있다 (Lamon, 2001). Amato (2006)는 분수 학습의 어려움의 요인으로 분수 개념에 대한 교사의 이해와 분수 학습의 교수학적 측면을 강조하였다. 종합하면 분수 학습의 어려움은 크게 분수 개념 자체의 복합성과 분수 학습 이전에 습득하는 자연수와의 인지적 상충, 분수의 개념 이해보다는 절차적인 기능과 계산을 강조하는 수업 방식에 의한 것으로 볼 수 있다.

수 세기를 통하여 비교적 간단하게 계산할 수 있는 자연수의 덧셈, 뺄셈과는 달리 분수의 덧셈과 뺄셈을 하기 위해서는 분수의 개념과 단위에 대한 이해가 매우 필요하다. 아동은 분수의 덧셈과 뺄셈 상황을 자기가 이전에 경험했던 자연수의 예와 비슷한 형태로 인식하고, 새로운 상황들을 자연수의 덧셈과 뺄셈에 대한 자신의 기존 정신 모델에 사상시킬 수 있어야 한다. 각각의 경우에 대해 초기의 양을 분별할 수 있어야 하고, 어떤 행동을 취해야 할지를 결정할 수 있어야 한다. 만일 아동이 분수의 개념에 관하여 충분한 이해가 없다면 아동은 이런 문제들에 관해 의미 있는 표상을 형성할 수 없다. 아동이 자연수에 관한 것이든 동분모 분수끼리의 덧셈과 뺄셈이든 간에 기초적인 덧셈과 뺄셈에 관한 하나의 정신 모델을 발달시키는 것은 아주 중요한 일이다(English & Halford, 1995). 또한 아동의 비형식적 지식에 의존하는 실생활 문제들은 아동이 이러한 사상을 형성하도록 도움을 준다(Mack, 1993). 즉, 분수 연산의 문장제는 아동들로 하여금 아동들의 비형식적 지식과 상징적 표상 사이의 연결성을 이해하도록 하는데 도움이 되며, 문장제의 의미론적 요소들은 아동들의 문제 해결 과정에 중요한 역할을 한다.

2. 문장제 해결

1900년대 초 인류학자들은 사람들이 나이, 문화와는 상관없이 읽었거나 들었던 이야기를 바꾸어 말할 때 하나의 패턴을 따른다는 것을 발견하였다. 이 패턴을 "이야기 문법(story grammar)"이라 부른다(Dimino, Gersten, Carnine, & Blake, 1990; Mandler & Johnson, 1977; stein & Glenn, 1979; Xin, Wiles, & Lin, 2008 재인용). 이야기 문법의 접근이란 문장에 문법이 있듯이 이야기에도 문법에 해당하는 스키마가 있다고 보는 입장이다. 이야기 문법의 형태는 조금씩 다르지만, 일반적으로 이야기 안의 구절들을 그 내용에 따라 배경(setting), 목표(goal), 시행(attempt), 결과(sonsequence), 반응(response) 등으로 범주화한다(Brewer, & Lichtenstein, 1981). 이야기 문법에서 문법은 요소를 의미하므로, 이야기 문법은 이야기의 요소를 말한다. 이야기 요소는 이야기의 내적 구조에 대한 지식과 기대를 포함한다. 이야기의 내적 구조는 이야기 스키마로 개념화될 수 있는데, 그것은 좀 더 효과적으로 이해하고 회상하게 한다. 이야기 문법 지도는 이야기의 중요한 요소에 중점을 두고 학생들에게 텍스트 구조의 조직에 대한 특정 구조를 제공한다. 이야기 문법은 이야기의 구성 요소들에 대한 추

상적인 구조를 보여주는데, 개별 사건들의 의미적 표상을 일화적 단위로 범주화하며, 각 일화내의 사건들 간의 관계적 응집성을 형성하는 과정을 수행한다.

최근 이야기 문법과 이야기 사상을 적용한 교수법이 학습 부진아뿐 아니라 초중등 학생들의 읽기 능력과 문장 이해력에 긍정적인 영향을 주었다는 연구 결과들이 있다(Boulineau et al., 2004; Dimino et al., 1990; Gardill & Jitendra, 1999). 이야기 문법과 이야기 사상은 학생들이 이야기의 내적 구조를 표상하고 조직하는데 도와주는 도구로서 작용하므로 학생들의 이해를 증진시킨다(Xin, et al., 2008). 문장제의 이야기 구조는 특정 문제 상황에 대한 문장제 이야기 문법으로 정의될 수 있다. 문장제 이야기 문법은 문제 해결과 의미 있는 표상을 돕기 위하여 문장제의 개념 모델에서 수학적 관계에 대한 대수 식을 강조한다. 일반적으로, 부분-부분-전체(PPW; part+part=whole)는 덧셈과 뺄셈 문장제의 일반적인 개념 모델이다. 거기서 부분, 부분, 전체는 세 개의 기본 요소이다. 반대로 요소-요소-결과(factor×factor =product)는 곱셈과 나눗셈 산술 문장제의 일반적인 개념 모델이며, 요소, 요소, 결과라는 세 가지 기본 요소를 갖는다.

몇 십년 전까지는 연구자들이 문장제 해결 과정에서 적절한 산술 연산을 선택하고 적용하는 것이 성공적인 문제 해결에 중요하다고 생각하였다. 그러나 최근에는 문장제 해결에 있어 스키마 기반의 교수법이 강조되고 있다(Fuchs et al., 2003, 2004; Xin, 2008). 스키마 기반의 교수법은 대수적 사고를 촉진하기 위해 수식의 수학적 관계에 대한 표상을 강조한 교수법을 말한다. 문제 구조의 인식은 스키마 기반의 문제해결에 있어 매우 중요하다. 최근 개념적 모델 기반의 문장제 이야기 문법을 이용한 교수법이 학생들의 1단계 문장제 해결 능력을 신장시킨다는 연구 결과도 보고되었다(Xin, Wiles, & Lin, 2008). Xin, Wiles와 Lin (2008)은 자연수의 덧셈과 뺄셈 문장제를 부분-부분-전체(Part-Part-Whole; PPW)와 덧셈적 비교(Additive Compare; AC)의 두 유형으로 구분하여 분석하였다. 부분-부분-전체는 합병, 첨가에 의한 변화, 제거에 의한 변화라는 3가지의 하위유형을 포함하며, 곱셈적 비교는 좀 더 많은 곱셈적 비교(AC-more), 좀 더 적은 곱셈적 비교(AC-less)의 2가지 하위유형을 포함한다.

문제를 풀기 전에 문장제의 개념적 이해는 문제 해결에 매우 중요한 역할을 하므로, 아동은 풀이를 계획하기 전에 문제의 구조를 인식하고 재조직하는 개념적 모델을 구성해야 한다(Jonassen, 2003; Xin, Wiles, & Lin, 2008). 또한 문장제를 수식으로 정확히 표현하기 위해서는 수 지식에 기반한 통합되고 잘 조직된 지식과 부분-전체 관계와 분수에 대한 개념적 이해, 곱셈적 추론, 사칙연산에 관한 지식들이 필요하다. 다양한 상황을 수식이나 다이어그램으로 표현하는 활동 또한 아동들의 산술의 문장제 해결 능력을 신장시킨다(Ng & Lee, 2009).

3. 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제의 의미론적 구조

분수의 덧셈과 뺄셈 상황의 의미론적 구조는 자연수의 덧셈과 뺄셈 상황의 의미론적 구조와 동일

하다. 다른 점은 자연수 대신 분수를 다룬다는 것인데, 분수의 덧셈과 뺄셈식을 세우고 풀기 위해서는 기본적으로 분수의 개념을 이해하고, 단위, 단위화, 분할, 부분-전체 관계와 같은 개념들을 이해하고 있어야 한다. 특히 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 경우 같은 단위에서 더하고 빼야하기 때문에 동치분수에 대한 이해가 수반되어야 한다. 또한 아동들이 공통분모의 필요성을 스스로 인식하여야 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 알고리즘을 이해할 수 있으며 분수의 덧셈에서 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 더하는 전형적인 계산상의 오류를 범하지 않을 수 있다.

덧셈과 뺄셈 문장제의 의미론적 구조는 여러 학자들에 의해 다양하게 분류되었다. Riley, Greeno와 Heller (1983)는 덧셈과 뺄셈 문장제를 변화(Change), 합병(Combine), 비교(Compare) 문제로 분류하였다. Riley et al. (1983)은 문장제 상황을 동적인 상황과 정적인 상황으로 나누어 제시하였고, 문장제의 미지수가 처음량, 변화량, 결과량인 경우로 다시 세분화하였다. 변화 문제는 어떤 양이 증가되거나 감소하는 상황의 문제를 말하고, 합병 문제는 적어도 두 개의 양을 합하는 상황의 문제이다. 비교 문제는 "좀 더 많은(more)", "좀 더 적은(less)"과 같은 관계를 사용하여 두 양 사이를 비교하는 상황의 문제로, 미지수는 비교량, 기준량, 두 양 사이의 차가 될 수 있다. Riley et al. (1983)의 연구에 의하면, 문장제의 의미론적 구조는 문제의 난이도에 중요한 영향을 준다. 비교 문제는 변화 문제나 합병 문제보다 더 어렵다. 또한 미지수의 위치도 문제의 난이도에 영향을 준다. 미지의 양이 변화의 결과량인 경우에서 변화량인 경우, 처음량인 경우 순으로 아동들이 어려워하였다.

Carpenter et al. (1988b)는 덧셈과 뺄셈 상황을 첨가(Join), 합병(Combine), 제거(Separate), 비교(Compare)로 분류하였다. 첨가와 합병은 덧셈의 상황이고, 제거와 비교는 뺄셈의 상황이다. 첨가의 상황은 한 집합에 대하여 그 집합의 원소와 동일한 내용의 원소가 시간적인 간격을 갖고 원소의 양을 증가시키는 상황이다. 처음에 주어진 원소는 정적이고 뒤의 원소는 동적으로 보태어진다. 합병의 상황은 동시적으로 존재하는 서로 소인 두 집합이 동등한 위치에 모여 하나의 총체적인 전체의 집합을 만드는 상황을 말한다. Fuson (1992)은 이후 합병을 "물리적 합병"(예: 철희는 빨간색 연필 4개와 파란색 연필 5개를 가지고 있습니다. 철희는 그것을 모두 책상 위에 올려놓았습니다. 책상 위의 연필은 모두 몇 개 있습니까?)과 '개념적 합병'(예: 축구팀에 남학생 6명, 여학생 8명이 있습니다. 축구팀은 모두 몇 명입니까?)으로 세분화하였다. 제거의 상황은 한 집합에 대하여 그 집합의 원소와 동일한 내용의 원소가 시간적 간격을 갖고 원소의 양을 감소시키는 상황이다. 비교 상황은 한 집합과 그 부분집합 사이의 관계가 아니라 두 개의 서로 소인 집합의 양을 비교하는 상황을 말한다. 한 집합이 다른 집합에 비교되기 때문에 한 집합은 기준 집합이 되고, 다른 집합은 비교 집합이 된다.

Carpenter et al. (1993)는 이후에 덧셈과 뺄셈 상황을 '첨가/제거', '부분-부분-전체', '비교', '동등화'로 분류하였는데, 부분-부분-전체는 합병과 동일한 의미 상황이며, 동등화는 "영희는 $\frac{1}{3}$kg의 찰흙을 가지고 있습니다. 철희는 $\frac{1}{2}$kg의 찰흙을 가지고 있습니다. 영희는 철수와 똑같은 무게의 찰흙을 가지려면 몇 kg의 찰흙이 더 필요합니까?"와 같은 비교 상황을 말한다. 동등화 문제는 비교 상황으로

두 집합을 비교하여 한 양을 어떤 양과 같아지게 하려면 어떻게 해야 하는지 묻는 문제이다. 수행되어야 할 행위가 두 집합에서 좀 더 작은 것에 기초한다면 첨가에 의한 동등화 상황이 되고, 좀 더 큰 집합을 기준으로 한다면 제거에 의한 동등화 상황이 된다(Romberg, et al., 1987). 덧셈과 뺄셈 상황은 미지수가 어느 위치에 있느냐에 따라 더욱 세분화되었다(Carpenter et al., 1999). 본 연구에서는 아동들의 이해와 문장제 해결 사이의 관련성만을 알아보기 위한 것이므로 미지수를 가장 일반적이고, 아동이 쉽게 느끼는 변화의 결과로 한정하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 참여자

서울시 강북에 소재한 초등학교의 4, 5, 6학년을 대상으로 A구청과 B대학이 주최한 수학교실에 참여하기를 희망하는 아동들을 인터넷으로 접수받은 후 전자추점을 통하여 무작위로 25명을 추출하였다. 이 중에서 설문 조사 시 결석으로 인하여 설문이 이루어지지 않았거나, 설문에 충실하게 응답하지 않은 아동 5명을 제외한 20명의 아동을 대상으로 연구를 수행하였다. 본 연구에 참여한 20명은 강북에 소재한 15개 초등학교에 재학 중인 초등학생으로 4학년은 9명, 5학년은 8명, 6학년은 3명이었고, 남자는 7명(4학년 3명, 5학년 3명, 6학년 1명), 여자는 13명(4학년 6명, 5학년 5명, 6학년 2명)이었다. 가정의 사회경제적 수준은 대부분 중하위권의 아동이었다. 4학년 아동 대부분은 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈은 할 수 있었으나, 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈을 계산하지 못하였고, 5, 6학년 아동 대부분은 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈 계산이 가능하였다. 4학년 아동 중에서 선행학습이 이루어진 2명의 아동(C, N)은 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈이 가능하였다.

2. 연구 설계

아동이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있으며, 그것이 분수의 덧셈, 뺄셈 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 4, 5, 6학년 20명을 대상으로 설문과 면담을 실시하였다. 우선 아동의 일반적인 수학 수준과 수학적 성향 및 사회적 배경에 관한 정보를 알기 위해 진단평가와 사회적 배경 관련 설문을 실시하였다. 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보기 위하여 분수의 덧셈과 뺄셈의 상황과 의미를 묻는 설문을 실시하였으며, 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해가 분수의 덧셈과 뺄셈의 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 분수의 덧셈, 뺄셈 문장제의 의미론적 구조로 분류된 평가지로 시험을 실시하였다. 그 다음 설문지와 평가지의 결과를 토대로 분석 틀을 고안하고, 그 분석 틀에 기초하여 면담지를 작성한 후 아동들과 반구조화 면담을 실시하였다. 설문지와 평가지로 확인할 수 없는 부분들에 대해서는 개별

면담을 실시하여 확인하였다. 모든 개별 면담은 비디오로 촬영하여 전사하였다. 개별 면담 자료는 아동이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있으며, 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해가 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보는 데 중요한 분석 자료로 사용되었다.

3. 자료 수집 및 분석

아동이 작성한 설문지와 평가지, 면담 과정이 녹화된 비디오테이프, 면담 과정에서 아동이 작성한 활동지와 면담지, 연구자가 적은 기록물과 녹음 내용 등의 자료를 수집하였고, 일정 비교 분석법(Constant Comparative Method)을 사용하여 자료를 분석하였다.

1) 분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 아동의 이해

아동이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보기 위하여 20명의 아동들을 대상으로 설문과 면담을 실시하였다. 분수의 덧셈에 관한 설문지에는 분수의 덧셈의 의미를 묻고, 분수의 덧셈 상황을 나타내는 문제 상황을 세 개 만들고, 문제 상황을 그림으로 풀게 하였다. 분수의 덧셈은 동분모 분수의 덧셈(1/5+2/5)과 이분모 분수의 덧셈(1/3+1/4)으로 나누어 질문하였다. 분수의 덧셈에 대하여 아동이 작성한 의미와 표상, 문제 상황의 의미론적 구조를 종합하여 아동이 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈에 대하여 어떻게 이해하고 있으며, 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해에 어떤 차이가 있는지 분석하였다. 분수의 뺄셈에 관한 설문지는 분수의 덧셈에 관한 설문지와 동일하게 구성하였으며, 분수의 뺄셈도 동분모 분수의 뺄셈(3/5-2/5)과 이분모 분수의 뺄셈(1/2-1/3)으로 구분하여 질문하였다. 분수의 뺄셈도 아동이 작성한 의미와 표상, 문제 상황의 의미론적 구조를 종합하여 분석하였다. 아동이 작성한 의미와 표상, 문제 상황의 의미론적 구조가 일치하지 않은 경우에는 개별 면담을 실시하여 확인하였다.

2) 문장제 해결

분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해가 분수의 덧셈, 뺄셈에 관한 1단계 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 분수의 덧셈, 뺄셈 문장제의 의미론적 구조로 분류된 평가지를 작성하였다. 분수의 덧셈, 뺄셈에 대한 아동의 이해와 분수의 덧셈, 뺄셈 문장제 해결 사이의 관련성을 알아보기 위하여 분수의 덧셈과 뺄셈에 대하여 아동이 이해하고 있는 의미와 아동이 맞히거나 틀린 문항의 의미론적 구조를 비교 분석하였다. 그리고 분수의 덧셈과 뺄셈에 대하여 동일한 의미로 이해하고 있는 아동들 간에 문장제 해결 방법에 공통된 특성이 있는지 알아보기 위하여 아동의 문제 풀이 과정을 정밀하게 분석하였다. 문장제는 제 7차 교육과정의 초등학교 교과서의 문항을 기초로 구성하였는데, <표 1>은 본 연구에서 사용한 각 문항별 내용이다. 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제는 합병, 첨가, 제거, 비교, 동등화의 의미론적 구조로 구분하여 구성하였다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 아

직 배우지 않은 4학년 아동에게는 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈의 문장제를 제시하였고, 5, 6학년에게는 동일한 문맥의 문장제에 분수만 이분모 분수로 바꾸어 제시하였다.

<표 1> 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제

덧셈	뺄셈
합병(Combine)	제거(Separate)
1. 꽃밭의 $\frac{1}{5}$에는 채송화를 심었고, $1\frac{3}{5}$에는 봉선화를 심었습니다. 채송화와 봉선화를 심은 부분은 전체의 얼마입니까? ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$)	4. 미술 시간에 모빌을 만들기 위해 $4\frac{3}{4}$m의 철사에서 $3\frac{1}{4}$m를 잘라 썼습니다. 남은 철사의 길이는 몇 m입니까? ($4\frac{2}{3}$, $4\frac{1}{4}$)
첨가(Join)	비교(Compare)
2. 서정이는 색 테이프 $3\frac{3}{4}$m를 가지고 있었습니다. 동생 서빈이가 서정이에게 색 테이프 $2\frac{1}{4}$m를 더 주었습니다. 서정이가 가지고 있는 색 테이프는 모두 몇 m입니까? ($2\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{5}$)	3. 어머니께서 네모 모양의 커다란 빵을 한 개 사 오셨습니다. 누나에게는 $\frac{8}{9}$를, 준호에게는 $\frac{2}{9}$을 주셨습니다. 누나의 것은 준호의 것보다 얼마나 더 큽니까? ($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$)
	동등화(Equalizing)
	5. 성준이는 $4\frac{2}{5}$kg의 구슬을 가지고 있습니다. 동혁이는 $2\frac{3}{5}$kg의 구슬을 가지고 있습니다. 동혁이는 성준이만큼의 구슬을 가지기 위해서는 몇 kg의 구슬을 더 가져야 합니까?

* ( )는 5, 6학년 아동에게 제시한 문장제에 사용된 분수이다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

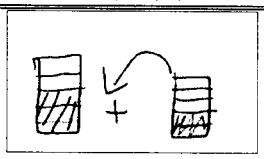
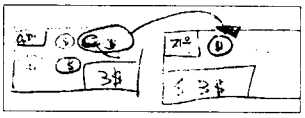
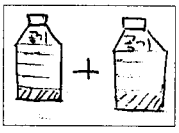
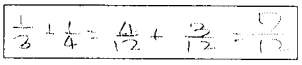
1. 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해

1) 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해

분수의 덧셈에 대한 아동의 이해는 아동이 작성한 의미와 표상, 문제 상황의 의미론적 구조에 기초하여 분석하였는데, 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해는 "첨가", "합병", "계산 절차"로 범주화되었다. 첨가는 분수의 덧셈을 하나의 양에 다른 양을 더 첨가하거나 늘리는 상황으로 이해하는 경우로 이전에 살펴본 Carpenter et al. (1988b)의 첨가와 Fuson(1992)의 첨가에 의한 변화와 동일한 의미이

다. 합병은 분수의 덧셈을 두 개의 독립된 양을 동시에 모아 하나의 양으로 합치는 상황으로 이해하고 있는 경우로 Carpenter et al. (1988b), Riley et al. (1983), Fuson(1992)이 제시한 합병의 의미와 일치한다. 계산절차는 덧셈 상황의 의미론적 분류에는 없는 의미이지만 몇 몇의 아동들이 분수의 덧셈의 의미와 분수의 덧셈 방법을 동일시하여 이해하고 있어 이해 범주에 포함시켰다. 분수의 덧셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하기 보다는 "분모를 통분해서 더하는 것"(R43:4)과 같이 분수 덧셈의 계산 절차를 분수의 덧셈의 의미로 이해하고 있는 경우를 말한다. <표 2>는 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해 범주에 따른 아동들의 대표적인 표상과 문제 상황, 의미 예시이다.

<표 2> 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해 범주

범주	표상 예시	상황 예시	의미 예시
첨가	 (Q7:5)  (L20:3)	"피자 한 개를 10조각으로 잘라 오빠에게는 4/10조각을 주고, 나에게는 오빠보다 1/10조각을 더 주었다. 나는 몇 조각을 받았는가?(H5:2) "잉크가 1/3이 있었는데 잉크 1/4을 더 충전 했다면 모두 얼마인가?"(G38:1) "책을 어제 1/5쪽 읽고 오늘 2/5쪽 더 읽었습니다. 어제 오늘 읽은 책은 몇 쪽입니까?"(N27:3)	"분자에 분자를 더하거나 분자에 더 추가하는 것"(A6:2) "분수에 분수를 추가하는 것(E6:2)
합병	 (C36:2)  (G37:2)	"동생은 1/5조각의 피자를 먹고 오빠는 2/5조각의 피자를 먹었다. 동생과 오빠가 먹은 피자 조각은 몇 분의 몇인가?"(H17:2) "딸기우유가 1/5L 남았고, 초코우유는 2/5L가 남았습니다. 딸기우유와 초코우유는 모두 몇 L입니까?"(J23:2) "눈 뭉치를 3개로 나눈 후 1조각과 눈 뭉치 4개로 나눈 후 1조각을 합치면 크기가 어떻게 되는가?"(S34:2)	"합치는 것"(L6:2) "분수와 분수끼리 합치는 것"(B6:2)
계산 절차	 (P34:1)	"연필 1/3자루와 연필 1/4자루를 더하여라."(Q6:1)	"$\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$을 공통분모로 고친 후 더하는 것"(P34:3) "분모는 그대로 내버려두고 분자만 더하고 통분을 한다."(Q6:2)

본 연구에서는 분수의 덧셈을 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈으로 나누어 아동이 각각을 어떤 의미로 이해하고 있는지 조사한 결과 동분모 분수의 덧셈을 첨가의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 6명, 합병의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 10명, 첨가와 합병의 상황으로 이해하고 있

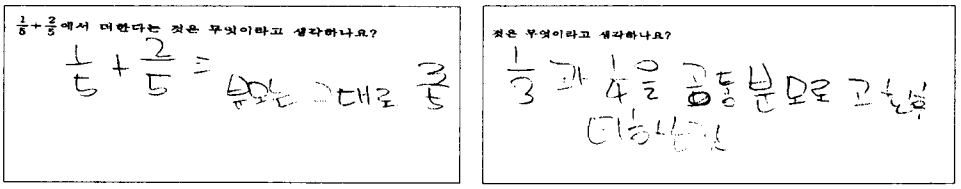
는 아동이 3명이었고, 분수의 덧셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하고 있기보다는 분수의 덧셈 절차를 분수의 덧셈의 의미로 이해하고 있는 아동이 1명이었다. 전체적으로 동분모 분수의 덧셈을 첨가의 상황으로 이해하고 있는 아동은 9명, 합병의 상황으로 이해하고 있는 아동은 13명, 계산 절차로 이해하고 있는 아동이 1명(아동 P)이었다. 연구자가 아동 P에게 동분모 분수의 덧셈의 의미에 대하여 물었을 때 아동 P는 "분모는 그대로 하고 분자끼리 더하는 것"이라고 대답하였다.

이분모 분수의 덧셈은 이분모 분수의 덧셈을 전혀 접하지 못한 4학년 2명을 제외하여 분석한 결과 이분모 분수의 덧셈을 첨가의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 5명, 합병의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 11명, 계산 절차로 이해하고 있는 아동이 3명이었고, 첨가와 합병의 두 가지 상황으로 이해하고 있는 아동은 전혀 없었다. 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈 모두 합병의 상황으로 이해하고 있는 아동이 가장 많았으며, 동분모 분수의 덧셈보다 이분모 분수의 덧셈을 계산절차로 이해하고 있는 아동들이 상대적으로 많았다.

<표 3> 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해

범주 \ 학년	동분모 분수의 덧셈				이분모 분수의 덧셈			
	4학년	5학년	6학년	합계	4학년	5학년	6학년	합계
첨가	3명	3명	0명	6명	2명	3명	0명	5명
합병	5명	3명	2명	10명	5명	3명	3명	11명
첨가,합병	1명	1명	1명	3명	0명	0명	0명	0명
계산절차	0명	1명	0명	1명	0명	3명	0명	3명

동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈의 의미가 일치한 아동이 14명, 불일치한 아동이 4명(F, G, R, S)으로 대부분의 아동은 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈을 같은 의미로 이해하고 있었다. 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈을 다른 의미로 이해하고 있었던 4명의 아동 중 F와 S는 동분모 분수의 덧셈을 첨가와 합병의 상황으로 이해하고 있는 반면, 이분모 분수의 덧셈은 합병의 상황으로만 이해하고 있었다. 그리고 나머지 불일치 아동 Q와 R은 동분모 분수의 덧셈을 각각 첨가와 합병의 상황으로 이해하고 있었던 반면, 이분모 분수의 덧셈은 분모를 통분하여 더한다는 계산 절차로 이해하고 있었다. 아동 P는 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈 모두를 상황과 연결 지어 이해하지 못하고 계산 절차로만 이해하고 있었다. 아동 P는 <그림 1>과 같이 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈의 의미에 덧셈의 방법을 적었다. 아동 P는 동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈 모두를 특정 상황과 연결하지 못하고, 의미 없는 계산 절차로 이해하고 있는 유일한 아동이었다. 분수의 덧셈에 대한 아동 P의 이해는 문장제 해결에도 많은 영향을 주었다.



<그림 1> P가 작성한 분수의 덧셈에 대한 의미
(왼쪽 : 동분모 분수의 덧셈, 오른쪽 : 이분모 분수의 덧셈)

본 연구에서는 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해를 분석하면서 몇 몇 아동들로부터 연산에 대한 아동의 개념이미지를 발견할 수 있었다. 연구자가 아동들에게 일반적인 분수의 덧셈에 대하여 물어보았을 때, 몇 몇 아동들(아동 B, I, P)로부터 공통된 개념이미지가 발견되었다. 아동 I는 분수 더하기 분수에서 더하기의 의미를 묻는 질문에 "완전하지 못한 수끼리(분수끼리) 더하는 것"(I6:2)이라고 썼으며, 동분모 분수의 덧셈의 의미에 "정확히 일이 되지 않는 수끼리의 덧셈, 또는 정확히 일이 되는 수와 일이 되지 않는 수끼리의 덧셈"(I10:5)이라고 썼다. I는 자연수는 완전한 수이고, 분수는 완전하지 않은 수로 이해하고 있었다. 정확히 1이 되는 수가 완전한 수이고, 정확히 1이 되지 않는 수는 완전하지 않은 수라고 하였다. 아동 I뿐 아니라 아동 B와 P도 '분수는 1보다 작은 수'라는 개념이미지를 가지고 있었다. 다음은 아동 B와의 면담 내용이다.

00 R : 분수에서 덧셈의 의미는요?
01 B : 분수는요 1이 안되니까 합치는 것 같은데요.
02 R : 왜 1이 되지 않는 수끼리 합치는 건가요? 1과 3분의 2는요?
03 B : 그것도 되네요. 1이상에서도 이렇게 합치면 그것도 더하기니까요.
04 R : 그러면은 이것은 잘못생각해서 쓴 건가요? 이때는 어떻게 생각했던 거예요?
05 B : 이때는 분수는 대부분 1미만인 수를 나타낼 때 분수를 쓰니까 그때 이렇게 쓴 것 같아요.
06 R : 대부분 1 미만일 때만 쓰니까? 왜 그렇게 생각했어요?
07 B : 분수는요. 자연수는 크게 단위를 나타내는데 분수는 세세한 부분까지 나타내기 때문에 그러니까 1 미만을...
08 R : 특별하게 다른 이유는 없고요?
09 B : 보통 문제집이나 교과서의 문제 같은 것을 풀 때요 분수는 3분의 2나 3분의 1 이런 것으로 배우기 때문에요.

아동 B는 대부분 교과서와 문제집에서 분수를 나타낼 때 1보다 작은 수로 나타내기 때문에(프로토콜 09) 분수를 1보다 작은 수로 생각하였고, 분수의 덧셈 결과 또한 1 이하의 수로 생각하였다. 교사는 분수 지도 시 다양한 분수를 제시하여 아동들이 '분수는 1보다 작은 수'라는 제한된 개념이미지를 형성하지 않도록 주의를 기울여야 할 것이다.

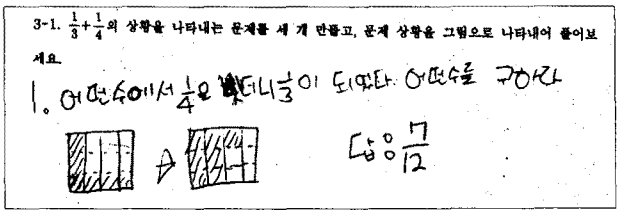
아동 F는 동분모 분수의 덧셈의 의미로 "하나만의 바뀜이라고 생각한다."(F33:5)라고 적었고, 이분

모 분수의 덧셈의 의미로 "바꿈. 일부러 둘을 같게 하는 것. 이기적이다."(F34:7)라고 적었다. 연구자는 아동 F와의 개별 면담을 통하여 그 이유를 확인할 수 있었다(프로토콜 10-17).

10 R : (설문지에 F가 쓴 것을 읽으면서) 바꿈, 일부러 둘을 같게 하는 것, 이기적이다, 이것은 뭐예요?
11 F : 강제로 무조건 바꾼다고 그래가지고 좀 나쁜 것 같다고 생각했어요.
12 R : 강제적으로 공통분모를 똑같이 만들어야 하는 거니까?
13 F : 일부러 라는 게 인공적이다라고 생각해서.
14 R : 둘이라는 것은 뭐에요? 분모를 이야기 하는 거예요?
15 F : 네
16 R : 3분의 1하고 4분의 1의 분모를 서로 같게 해야 한다는 것이 이기적인 거예요?
17 F : 네, 그냥 일방적으로 하는 거니깐.

F는 이분모 분수의 덧셈은 강제로 공통분모를 만들어야 하므로 이기적이라고 생각하였다. 아동들이 통분의 필요성을 스스로 인식해야 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 알고리즘을 이해할 수 있다(Kilpatrick et al., 2001). 따라서 이분모 분수의 덧셈 알고리즘을 배우기 전에 동치분수의 개념을 이해하고, 공통분모를 만드는 이유에 대하여 아동이 완전히 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

본 연구에서는 아동이 작성한 분수의 덧셈을 나타내는 문제 상황을 분석한 결과 몇 몇 아동들에게서 예상하지 못했던 결과들이 나타났다. 우선 아동 F는 <그림 2>에서 알 수 있듯이 덧셈과 뺄셈의 역의 관계를 이용하여 분수의 덧셈 1/3+1/4을 나타내는 문제를 제시하였다.



<그림 2> 아동 F가 작성한 이분모 분수의 덧셈 상황

18 R : (설문지에 F가 쓴 내용을 가리키며) 어떤 수에서 4분의 1을 뺐더니 3분의 1이 되었다 어떤 수를 구하라, 이건 무슨 의미예요?
19 F : 이것은 3 더하기 2는 5 해가지고 뒤에서 하는 거를 응용해 가지고 한 건데 의외로 잘 된 것 같아요.
20 R : 그게 무슨 말예요? 어떤 수에서 4분의 1을 뺐더니 3분의 1이 되었다, 덧셈 문제를 뺄셈 문제로 바꾼 거예요?
21 F : 네.
22 R : 덧셈은 뺄셈의 반대라서?
23 F : 네. 뒤에서부터 검산하면.
24 R : 여기다 한번 써보세요.

25 F : (면담지에 쓰면서) 네모 빼기 4분의 1은 3분의 1이니까 어떤 수를 구하려면 이것이 3분의 1 더하기 4분의 1이 되니까

26 R : 덧셈은 뺄셈의 반대라서 이렇게 한 거예요? 아니면 왜 빼기 문제로 (만들었어요)?

27 F : 검산 식으로 할 수 있다고 생각해서요.

28 R : 검산 식으로? 검산 식으로 할 수 있다는 게 무슨 말이죠?

29 F : 네모를 구할 때 2 빼기 1은 1 이렇게 나왔을 때 맞는 것을 구할 때 1 더하기 1은 2가 되니까 이것이 맞다고 하니까, 이것처럼 얘(□-1/4=1/3)를 구할 때 이 둘(1/4과 1/3)을 더하니까 얘(어떤 수)에서 뺀 것이 이것(1/3)이니까 얘(어떤 수)를 구하라 그러면 더하기 문제가 된다고 생각했어요.

아동 F는 덧셈과 뺄셈의 역의 관계를 응용하여 문제를 만들었는데, 평상 시 덧셈이 뺄셈의 역이라는 사실을 이용하여 답을 검산하는 습관에 의해 덧셈과 뺄셈의 역의 관계를 이해하고 있었다(프로토콜 29). 아동 S는 1/5+1/2를 나타내는 상황으로 "사람 5명 중 여자 1명과 남자 2명, 갓난아이 2명이 있다. 전체 사람에 대한 여자의 비와 전체 사람에 대한 남자의 비를 합한 것을 분수로 나타내어라."(S33:3)와 같이 분수의 비의 의미를 이용하여 문제를 만들었다. 아동 S는 6학년으로 비와 비율을 배운 상태였으므로, 유일하게 분수에 대한 비의 하위개념을 이용하여 분수의 덧셈 상황을 만들었다. 대부분의 아동들은 분수의 덧셈 상황 특히 이분모 분수의 덧셈 상황을 문장제로 만드는 것을 매우 어려워하였다. 그리고 아동들이 작성한 분수의 덧셈 상황에는 많은 오류가 포함되어 있었다. 분수로 나타낼 수 없는 대상을 분수로 나타낸 오류가 가장 많았으며, 단위가 적절하지 않거나 단위가 생략되어 있는 경우도 많았다. 문제 설정 활동은 수학적 개념에 대한 아동의 이해를 높이며, 아동의 창의성 증진에도 큰 효과가 있다(Silver, 1997). 문제 해결 능력만큼이나 문제 설정 능력도 중요하므로 다양한 문제 설정 활동을 통해서 아동들이 분수 연산의 기호적 표상과 상황을 연결할 수 있도록 해야 할 것이다.

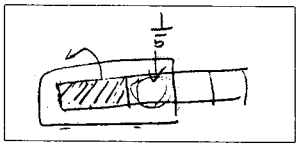
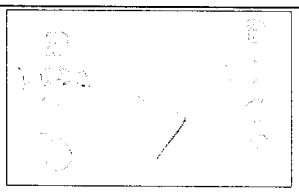
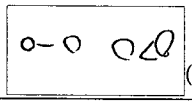
2) 분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해

분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해를 아동이 작성한 의미와 표상, 문제 상황의 의미론적 구조에 기초하여 범주화한 결과, 분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해는 "제거", "비교", "계산 절차"로 범주화되었다. 제거는 분수의 뺄셈을 주어진 집합으로부터 부분 집합이 없어지거나 가져가는 상황으로 이해하는 경우로 이전에 살펴본 Carpenter et al. (1988b)의 제거와 Fuson(1992)의 첨가에 의한 제거와 동일한 의미이다. 비교는 분수의 뺄셈을 두 개의 서로소 집합을 비교하는 상황으로 이해하는 경우로 Carpenter et al. (1988b), Riley et al. (1983), Fuson(1992)[1]이 제시한 비교의 의미와 일치하며, Carepnter et al. (1993)가 제시한 동등화 상황을 포함한다. 계산절차는 덧셈의 이해 범주와 마찬가지로 분수의 뺄셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하기 보다는 "분모를 통분해서 빼는 것"(R45:4)과 같이 분수 뺄셈의 계산 절차를 분수 뺄셈의 의미로 이해하고 있는 경우를 말한다. <표 4>는 분수의 뺄셈

1) Fuson (1992)이 제시한 의미론적 구조에 관한 상세한 내용은 황우형 · 김경미 (2008)에 기술되어 있다.

에 대한 아동의 이해 범주에 따른 아동들의 대표적인 표상과 문제 상황, 의미 예시이다.

<표 4> 분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해 범주

범주	표상 예시	상황 예시	의미 예시
제거	 (A34:2)	"피자 3/5조각이 있다. 이 중에서 2/5조각을 먹었다면 피자는 몇 조각이 있는가?(H19:1) "우유 3/5L 중 2/5L를 마셨다. 남은 우유는 총 몇 L인가?"(I26:1) "용호는 리본의 3/5을 가지고 있었는데, 2/5를 잃어버렸다. 남은 리본을 구하여라.(F35:3)	"어떤 분수에서 어떤 분수를 덜어내고 없애는 것"(C11:2) "사라지는 것, 빌린다는 것, 가져간다는 것, 결국엔 없애는 것"(F35:4)
비교	 (R67:3)  (R45:6)	"딸기우유가 3/5L가 있고, 초코우유는 2/5L 있다. 딸기우유는 초코우유보다 몇 L가 많은가?"(J25:1) "3/5이랑 2/5 중 누가 더 얼마나 큰가?"(R44:3) "고구마 피자 3/5조각이 있고, 슈크림피자가 2/5조각이 있는데, 고구마 피자는 슈크림 피자보다 몇 조각 많은가?"(J25:2)	"어떤 수와 어떤 수를 비교하거나 없애는 것"(R11:2)
계산 절차	 (AI:1:3)	"쌀 전체의 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$을 빼면 쌀은 얼마가 남습니까?"(A35:1)	"분자에서 분자를 빼는 것"(A34:3) "분모를 통분하여 빼는 것"(A35:2)

분수의 뺄셈을 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈으로 나누어 아동의 이해를 조사한 결과 동분모 분수의 뺄셈을 제거의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 18명, 비교의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 1명, 분수의 뺄셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하고 있기 보다는 분수의 뺄셈 절차를 분수의 뺄셈의 의미로 이해하고 있는 아동이 1명이었다. 동분모 분수의 뺄셈을 제거와 비교의 두 가지 상황으로 이해하고 있는 아동은 아무도 없었으며, 대부분의 아동들이 동분모 분수의 뺄셈을 제거의 상황으로 이해하고 있었다.

이분모 분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해를 분석한 결과 이분모 분수의 덧셈을 제거의 상황으로만 이해하고 있는 아동이 8명이었고, 계산 절차로 이해하고 있는 아동이 3명이었다. 이분모 분수의 뺄셈을 배우지 않은 4학년은 분석 대상에서 제외하였다. 대부분의 아동들이 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈을 제거의 상황으로 이해하고 있었으며, 분수의 덧셈에서와 마찬가지로 동분모 분수의 뺄셈보다 이분모 분수의 뺄셈을 계산절차로 이해하고 있는 아동들이 상대적으로 많았다.

<표 5> 분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해

범주 \ 학년	동분모 분수의 뺄셈				이분모 분수의 뺄셈		
	4학년	5학년	6학년	합계	5학년	6학년	합계
제거	8명	7명	3명	18명	5명	3명	8명
비교	1명	0명	0명	1명	0명	0명	0명
제거, 비교	0명	0명	0명	0명	0명	0명	0명
계산절차	0명	1명	0명	1명	3명	0명	3명

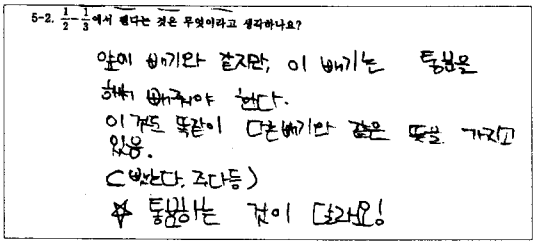
5, 6학년 11명 중에서 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈의 의미가 일치한 아동이 10명, 불일치한 아동이 1명(아동 Q)으로 대부분의 아동은 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈을 같은 의미로 이해하고 있었다. 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈을 다른 의미로 이해하고 있었던 아동 Q는 동분모 분수의 뺄셈을 제거의 상황으로 이해하는 반면, 이분모 분수의 뺄셈은 분모를 통분하여 빼는 계산 절차로 이해하고 있었다. 아동 A와 R은 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈 모두를 상황과 연결 지어 이해하지 못하고 계산 절차로 이해하고 있었다. A는 동분모 분수의 뺄셈은 "분자에서 분자를 빼는 것"(A34:3)이고, 이분모 분수의 뺄셈은 "분모를 통분하여 빼는 것"(A35:2)이라고 적었다. 면담과정에서 A는 분수의 뺄셈의 의미에 대하여 생각해본 적이 없다고 말하였는데, 모든 연산을 계산 방법과 연관 지어 이해하고 있었다.

많은 아동들이 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈이 제거의 상황을 나타내는 것은 같지만 통분을 해야 한다는 점을 다른 점으로 생각하고 있었다. 특히 5명의 아동(A, D, E, F, Q)은 이분모 분수의 뺄셈은 통분을 해서 빼줘야 한다는 사실을 매우 중요한 특징으로 이해하고 있었다. 다음은 아동 F와의 면담 내용이다.

30 R : 여기서의 빼기(이분모 분수의 뺄셈)의 의미는 앞에서의 빼기(동분모 분수의 뺄셈)의 의미와 달라요?
31 F : 같아요.
32 R : 어떻게 같아요?
33 F : 앞의 것처럼 사라지거나 없어진다는 것.
34 R : 다른 점은?
35 F : 바꿔서 뺀다.
36 R : 바꾼다는 것은 무엇을 바꾼다는 거예요?
37 A : 분모를
38 R : 분모를 서로 같게 해서 빼야한다는 거예요?
39 F : 네.

아동 F는 동분모 분수의 뺄셈과 이분모 분수의 뺄셈의 의미는 제거의 의미로 같지만 통분을 해야 한다는 점을 다른 점으로 생각하고 있었다(프로토콜 30-39). 또한 아동 D가 작성한 이분모 분수의

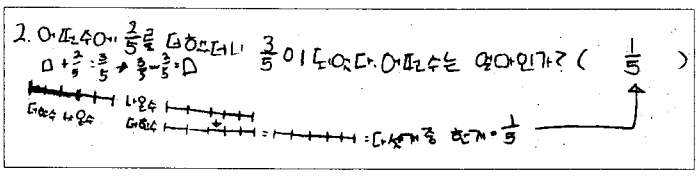
뺄셈의 의미에서 알 수 있듯이(<그림 3>), 많은 아동들이 이분모 분수의 뺄셈에서 통분을 해서 빼는 것을 매우 중요하게 생각하였다. 그러나 면담 과정에서 통분을 해야 하는 이유에 대하여 정확하게 알고 있는 아동은 거의 없었다. 이분모 분수의 뺄셈에서 통분은 매우 중요한 개념으로 아동들이 공통분모의 필요성을 스스로 인식할 수 있도록 지도해야 할 것이다.



<그림 3> 아동 D가 작성한 이분모 분수의 뺄셈 의미

연구자가 아동들에게 일반적인 분수의 뺄셈에 대하여 물어보았을 때, 덧셈과 마찬가지로 몇 몇 아동들(아동 B, I, P)로부터 공통된 개념이미지가 발견되었다. 아동 B는 분수 빼기 분수에서 빼기의 의미를 묻는 질문에 "1이하인 수를 덜어낸 것 나머지"(B11:2)라고 썼으며, 아동 I는 "정확히 일이 되지 않는 수끼리의 뺄셈"(I1:2), 아동 P는 "1보다 작은 수끼리 빼는 것"(P11:2)이라고 썼다. 아동 B, I, P는 모두 분수의 덧셈도 1보다 작은 수끼리의 덧셈으로 이해하고 있었던 아동들로 '분수는 1보다 작은 수'라는 개념이미지를 가지고 있었다. 그 이유는 교과서와 문제집을 통해서 아동이 접하는 분수의 덧셈과 뺄셈 문제가 상대적으로 진분수가 많았고, 분수의 덧셈과 뺄셈을 도입할 때 대분수와 가분수의 연산보다는 단위분수와 진분수의 연산으로 도입하기 때문에 분수는 1보다 작은 수라는 오개념이 형성된 것으로 분석되었다. 교사는 정형화된 예시로 인하여 아동들이 잘못된 개념이미지를 형성시킬 수 있음을 항상 염두에 두고 아동들을 지도해야할 것이다.

아동이 작성한 분수의 뺄셈을 나타내는 문제 상황을 분석한 결과 분수의 덧셈 상황에서 발견된 오류들과 유사한 오류들이 발견되었다. 대표적인 예는 "도서관에 책이 3/5권 있는데 학생들이 책을 2/5 대출해갔다. 남은 책은 몇 권인가?"(N29:2)이다. 특히 아동 S는 이분모 분수의 뺄셈 상황을 곱셈 상황과 혼동하여 분수의 뺄셈 상황에 곱셈 문제를 적었다. 그리고 아동 F는 분수의 덧셈과 마찬가지로 덧셈과 뺄셈의 역의 관계를 이용하여 동분모 분수의 뺄셈 3/5-2/5를 나타내는 문제를 만들었다.



<그림 4> 아동 F가 작성한 동분모 분수의 덧셈 상황

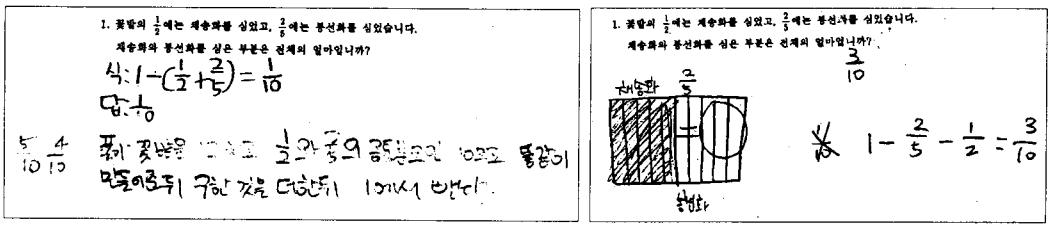
2. 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해와 문장제 해결

분수의 덧셈, 뺄셈 문장제에 대한 학생들의 풀이 결과를 1문항을 1점으로 채점한 결과 평균은 4.3점, 표준편차는 0.9점이었다. 분수의 덧셈 문장제에 대한 아동들의 풀이를 분석한 결과 첨가 상황의 문장제를 맞은 아동은 18명이고, 합병 상황의 문장제를 맞은 아동은 12명이었다. 그리고 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해 범주와 문제 해결 사이에 일치를 보인 아동은 11명이었다. 절반 정도의 아동만이 일치를 보였는데, 분수의 덧셈을 첨가의 상황으로 이해하거나, 합병의 상황으로 이해하는 것과는 상관없이 1번 합병 상황의 분수 덧셈 문제를 많이 틀렸다.

<표 6> 분수의 덧셈 문장제 평가 결과

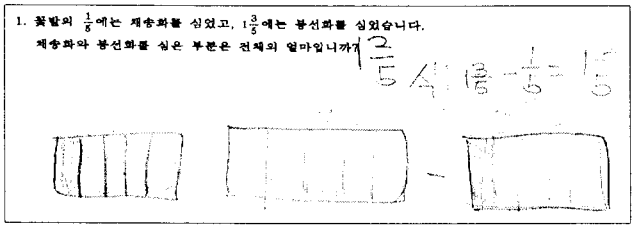
범주 \ 학년	4학년	5학년	6학년	합계	정답률
첨가	9명	6명	3명	18명	90%
합병	4명	6명	2명	12명	60%

합병 상황의 분수의 덧셈 문장제를 틀린 8명의 아동 중에서 아동의 이해와 불일치한 아동이 5명(B, C, I, J, S)이었고, 첨가 상황의 분수의 덧셈 문장제를 틀린 2명의 아동(P, S)도 아동의 이해와 불일치하였다. <그림 5>의 오른쪽 그림은 분수의 덧셈을 첨가의 의미로 이해하고 있던 아동 G가 합병 상황의 분수의 덧셈 문제를 풀은 내용이고, <그림 5>의 왼쪽 그림은 분수의 덧셈을 합병의 의미로 이해하고 있던 아동 C의 풀이 과정이다. 아동 G, C와 같이 몇 몇의 아동들은 합병 상황의 문제를 뺄셈 문제로 착각하여 틀렸는데, 이는 아동들이 문장제의 개념 구조를 이해하기 보다는 문장제에 포함된 수나 특정 단어(예를 들어, 채송화, 봉선화, 전체)에 의존하여 문제를 해결하는 경향 때문으로 분석되었다.



<그림 5> 아동 G(왼쪽)와 C(오른쪽)의 합병 상황의 분수 덧셈 문제 풀이

동분모 분수의 덧셈과 이분모 분수의 덧셈을 모두 계산 절차로 이해하고 있었던 아동 P는 첨가와 합병 문제를 모두 틀렸다. 그리고 분수의 덧셈을 합병의 상황으로 이해하고 있었던 아동 K는 합병 상황의 덧셈 문제($\frac{1}{5}+1\frac{3}{5}$)를 뺄셈 문제로 착각하여 $1\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$로 풀었다.



<그림 6> 아동 K의 합병 상황의 분수 덧셈 문제 풀이

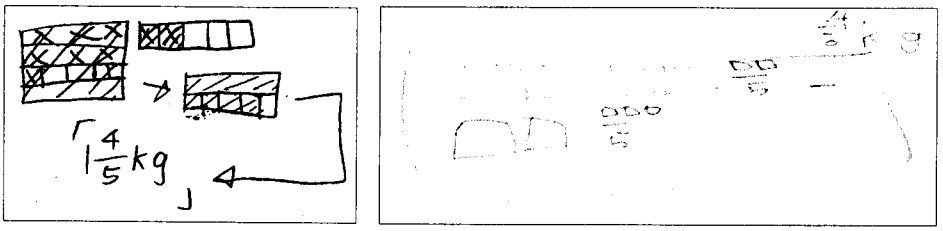
아동 K의 경우 문제를 꼼꼼히 읽지 않고, 그냥 큰 수에서 작은 수를 뺐다. Schoenfeld (1988)는 특히 이런 오류는 개념적 이해 없이 기계적인 암기에 의해 학습되었을 때 발생한다고 지적하였다. 본 연구에서는 분수의 덧셈에 대한 아동의 이해 범주인 첨가와 합병, 계산절차로 분류된 아동들 간에 덧셈 문장제의 해결 방법에 공통된 특성은 발견되지 않았다. 분수 덧셈의 의미론적 구조보다는 문제에 포함된 수나 단어가 아동들의 문제 해결에 더 영향을 주었다.

분수의 뺄셈 문장제에 대한 아동들의 풀이를 분석한 결과 제거 상황의 문장제는 20명의 모든 아동이 맞았으며, 비교 상황의 문장제를 맞은 아동은 17명, 동등화 상황의 문장제를 맞은 아동은 19명이었다. 아동들은 제거 상황의 문제보다 비교 상황의 문제를 어려워하였다. 분수의 덧셈과는 달리 분수의 뺄셈에 대한 아동의 이해 범주와 문제 해결 사이에 일치를 보인 아동은 20명으로 불일치를 보인 아동이 한 명도 없었다.

<표 7> 뺄셈 문장제 평가 결과

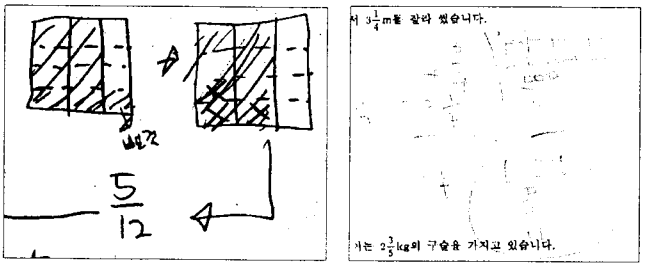
범주 \ 학년	4학년	5학년	6학년	합계	정답률
제거	9명	8명	3명	20명	100%
비교	9명	6명	2명	17명	85%
동등화	9명	8명	2명	19명	95%

비교 상황의 분수의 뺄셈 문장제를 틀린 3명의 아동(E, P, S)과 동등화 상황의 분수의 뺄셈 문장제를 틀린 1명의 아동(S)도 모두 뺄셈을 제거의 상황으로 이해하고 있었던 아동이었다. 특히 분수 문장제 해결과정에서 분수의 뺄셈에 대해 동일한 의미로 이해하고 있는 아동들 간에 공통된 특성이 발견되었다. 제거의 의미로 이해하고 있었던 아동들은 비교 상황의 문제도 제거의 의미를 이용하여 해결하려는 경향이 있었으며, 비교의 의미로 이해하고 있었던 아동들은 제거 상황의 문제도 비교의 의미를 이용하여 해결하려고 하였다. 제거의 의미로 분수의 뺄셈을 이해하고 있는 아동 F는 동등화 문제 5번을 제거의 의미를 이용하여 문제를 해결하였는데, 비교의 의미로 이해하고 있던 아동 J의 해결 방법과 그림 표상에서 차이가 나타났다.



<그림 7> 아동 F(왼쪽)와 J(오른쪽)의 동등화 상황의 분수 뺄셈 문제 풀이

아동 J는 비교 문제뿐 아니라 제거 상황의 문제 4번도 <그림8>과 같이 비교의 의미를 이용하여 문제를 해결하였다. <그림 8>는 제거의 상황으로 분수의 뺄셈을 이해하고 있었던 아동 F와 비교 상황으로 이해하고 있었던 아동 J의 문제 풀이 과정이다.



<그림 8> 아동 F(왼쪽)와 J(오른쪽)의 제거 상황의 분수 뺄셈 문제 풀이

아동 J, F뿐 아니라 많은 아동들이 연산에 대한 자신의 개념적 모델 특히, 연산의 의미론적 구조에 기초하여 문제를 해결하려는 모습을 보여주었다. 분수의 덧셈과는 달리 분수의 뺄셈 문제에 대한 아동의 해결 방법은 문제에 내재된 의미론적 구조에 의해 강한 영향을 받았다. 또한 분수의 뺄셈을 특정 상황(예를 들어, 제거와 비교 상황)과 연관 지어 이해하고 있기 보다는 분수 뺄셈의 계산 절차를 분수의 뺄셈의 의미로 이해하고 있었던 아동들은 다른 아동들보다 문장제 해결 능력이 떨어졌다. 그 대표적인 사례인 아동 P는 비교 상황의 분수의 뺄셈 문제 3번에서 덧셈적 비교도 하지 못하였다. 분수의 뺄셈 상황을 곱셈 상황과 혼동하고 있었던 아동 S의 경우도 비교 상황의 분수의 뺄셈 문제 3번을 곱셈 문제로 잘못 이해하여 틀렸다.

본 연구에서는 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미를 계산 절차로만 이해하고 있었던 아동들과 다른 아동들 간에 분수의 덧셈과 뺄셈의 수식 계산에서는 큰 차이가 보이지 않았지만, 수식의 의미론적 관계를 이해해야 하는 문장제 해결에서는 유의미한 차이가 나타났다. 따라서 교사는 아동들에게 다양한 상황으로 분수의 연산을 이해하게 하고, 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 의미에 대하여 깊게 고찰할 수 있는 기회를 제공해야할 것이다. 성공적인 문제 해결자는 빠르고 정확하게 문제의 수학적 구조를 식별한다. 또한 오랜 시간동안 문제의 구조를 기억하고 관련 없는 정보와 관련 있는 정보를 구분하며, 기본적인 구조적 정보(예를 들면, 문제의 스키마)를 찾는다. 반면, 비성공적인 문제 해결자는 문제의

피상적인 특징(예, 문장제에 포함된 특정 수 조합과 단어)에 초점을 두는 경향이 있다. 그것은 학습한 것을 구조적으로 유사한 문제로 전이하는 것을 어렵게 만든다(Hegarty, Mayer, & Monk, 1995; Xin, Wiles, & Lin, 2008). 아동들을 성공적인 문제 해결자로 이끌기 위해서는 문제 상황의 개념적 모델에 기초하여 문제를 해결하도록 해야 하며, 연산의 계산 알고리즘보다 의미론적 구조에 초점을 두어 지도해야 한다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 분수의 덧셈과 뺄셈에 대하여 아동이 어떻게 이해하고 있는지 알아보고, 그것이 분수의 덧셈과 뺄셈 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보았다. 아동들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 어떤 의미로 이해하고 있는지 조사한 결과 많은 아동들이 분수의 덧셈을 합병의 상황으로, 분수의 뺄셈을 제거의 상황으로 이해하고 있었으며, 대부분 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈과 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈을 동일한 의미로 이해하고 있었다. 이 결과는 Fischbein et al. (1985)이 제시한 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 초기 직관 모델과 일치한 것이다. Fischbein et al. (1985)은 산술의 기본 연산은 일반적으로 암묵적이고 무의식적이며, 초기의 직관 모델과 연결되어 있다고 하였다. 자연수의 덧셈과 뺄셈의 초기 직관 모델이 그 이후에 학습하는 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미 이해에 영향을 주었을 것으로 추정되나, 이에 대한 구체적인 내용은 추후 연구를 통하여 확인해 볼 필요가 있다. 본 연구에서 몇 몇 아동들은 분수의 덧셈과 뺄셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하고 있기 보다는 "분모는 그대로 하고 분자만 더함", "분모를 통분하여 분자끼리 더함"과 같이 분수 연산의 계산 절차를 분수 연산의 의미로 이해하고 있었다. 특히 동분모 분수의 덧셈, 뺄셈보다 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈의 의미를 분수의 덧셈, 뺄셈의 계산절차로 이해하고 있는 아동들이 상대적으로 많았다. 이 결과는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 하기 위해서는 통분이 필요하기 때문인데, 실제로 많은 아동들이 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 통분하는 계산 절차를 매우 중요하게 생각하였다. 그러나 통분을 해야 하는 이유에 대하여 정확하게 알고 있는 아동은 거의 없었다. 따라서 교사는 아동이 공통분모의 필요성을 스스로 인식할 수 있도록 주의를 기울여 지도해야 할 것이다.

그리고 몇 몇의 아동들로부터 분수의 덧셈과 뺄셈의 이해에서 공통된 요소가 발견되었다. 아동 B, I, P는 모두 분수의 덧셈과 뺄셈을 1보다 작은 수끼리 더하고, 빼는 것으로 생각하였다. 세 명의 아동들은 '분수는 1보다 작은 수'라는 개념 이미지를 가지고 있었는데, 그 이유는 교과서와 문제집을 통하여 아동이 접하는 분수의 덧셈과 뺄셈의 문제가 상대적으로 다른 분수들보다 진분수가 많았고, 분수의 덧셈과 뺄셈의 도입 시 대분수와 가분수의 연산보다는 단위분수와 진분수의 연산으로 도입하기 때문에 분수는 1보다 작은 수라는 오개념이 형성된 것으로 분석되었다. 따라서 교사는 정형화된 예시로 인하여 아동들이 잘못된 개념 이미지를 형성할 수 있음을 항상 고려해야 하며, 아동들이 다양한 분수의 연산을 접할 수 있도록 주의를 기울여 지도해야 한다. Amato (2005)는 대분수와 n/n꼴

의 분수(예를 들어, 2/2, 3/3과 같이 1을 나타내는 분수)에 초점을 둔 수업 방식이 분수의 개념에 대한 아동의 이해에 도움이 되며, 예비교사들에게 단기간에 분수를 개념적으로 재학습시키는데도 효과적이라고 하였다.

본 연구에서는 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해와 분수의 덧셈과 뺄셈의 문장제 해결과정에서 나타난 아동들의 해결 방법 사이의 관련성을 알아보고, 분수의 덧셈과 뺄셈에 대하여 동일한 이해 범주에 속한 아동들이 문장제 해결 방법에 공통된 특성을 가지고 있는지 분석하였다. 연구 결과 분수의 덧셈과 뺄셈에서 상반된 결과가 나타났다. 분수의 덧셈에서는 분수 덧셈을 아동이 어떤 의미로 이해하고 있느냐는 분수의 덧셈 문장제 해결에 큰 영향을 주지 않았다. 분수의 덧셈을 첨가의 상황으로 이해하고 있거나 합병의 상황으로 이해하고 있는 것은 분수의 덧셈 문장제 해결 여부와 아동의 문제 해결 전략에 큰 영향을 주지 않았다. 분수의 덧셈의 의미론적 구조보다는 문제에 포함된 특정 수나 단어가 아동들의 문제 해결에 더 영향을 주었다. Sowder (1988)는 아동의 문장제 풀이 방법은 문장제에서 중요한 단어나 중요한 산술 연산 식보다는 어떤 연산을 유도하는 특정 수 조합과 연관되어 있다고 하였다. 본 연구에 참여한 아동들은 첨가와 합병의 상황을 크게 다른 상황으로 구별하여 이해하고 있지 않았으며, 분수의 덧셈에 대하여 동일한 이해 범주에 포함된 아동들 간에도 문장제의 해결 방법에 공통된 특성은 발견되지 않았다. 그러나 분수의 덧셈을 특정 상황과 연관 지어 이해하고 있기 보다는 분수 뺄셈의 계산 절차를 분수 뺄셈의 의미로 이해하고 있었던 아동 P의 경우는 다른 아동들보다 문장제 해결 능력이 떨어졌다.

반면, 분수의 뺄셈에서는 많은 아동이 분수의 뺄셈에 대하여 자신이 지니고 있는 의미론적 구조에 기초하여 문제를 해결하려는 경향을 보였으며, 동일한 이해 범주에 포함된 아동들 간에는 분수의 뺄셈 문장제 해결 방법에 공통된 특성이 발견되었다. 분수의 덧셈과는 달리 분수의 뺄셈 문제에 대한 아동의 해결 방법은 문제에 내재된 의미론적 구조에 의해 강한 영향을 받았다. 대부분의 아동들이 분수의 뺄셈을 제거의 의미로 이해하고 있었는데, 많은 아동들이 비교 상황의 문제도 제거의 의미와 제거의 표상을 이용하여 문제를 해결하려고 하였다. 그리고 분수의 덧셈에서와 마찬가지로 분수의 뺄셈을 특정 상황과 연관 지어 이해하고 있기 보다는 분수 뺄셈의 계산 절차를 분수 뺄셈의 의미로 이해하고 있었던 아동들은 다른 아동들에 비해 상대적으로 문장제 해결 능력이 떨어졌다.

연산에 대한 지도는 개념의 이해에 바탕을 두면서 계산의 효율성을 높이는 데 있다. 그러나 개념적 이해의 뒷받침이 부족한 상태에서 효율성, 신속성, 정확성에만 초점을 두게 되면, 기억에 의한 기계적인 학습으로 흐를 가능성이 있다. 즉, 알고리즘의 적용에 초점이 맞춰지면 연산의 구조에 바탕을 둔 개념의 이해는 더 이상 진전되지 못하게 되어, 연산 교육의 유용성이 떨어질 뿐 아니라 현실과 동떨어진 의미 없는 연산 학습을 하게 된다(Schwieger, 1999). 따라서 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 알고리즘보다는 분수의 덧셈과 뺄셈의 각 의미에 대한 개념적 이해에 초점을 두어 지도해야 할 것이다.

본 연구에서는 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 이해와 문장제 해결 사이의 관련성을 알아보았다. 앞으로 본 연구 결과를 기초로 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 아동의 이해와 문장제 해결 사이의

관련성을 알아보고, 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 범주와 분수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 범주가 일치하는지, 차이가 있다면 어떤 부분에서 차이가 있으며 왜 그런지에 대하여 조사할 필요가 있다. 또한 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해가 분수, 소수, 정수, 대수의 사칙연산의 이해에 어떤 영향을 주는지 등 기초 연산에 대한 연구가 다양한 관점에서 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

권성룡 (2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> **5(2)**, pp.259-273.

박교식 · 송상헌 · 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> **6(3)**, pp.235-249.

방정숙 · Yeping Li (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **47(3)**, pp.291-310.

오영열 (2004). 초등수학에 대한 예비교사들의 이해: 분수의 곱셈을 중심으로, 대한수학교육학회지 <학교수학> **6(3)**, pp 267-281.

오유경 · 김진호 (2009). 분수 개념에 대한 초등학생들의 비형식적 지식 분석 : 1-3학년 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **23(1)**, pp.145-174.

황우형 · 김경미 (2008). 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **47(4)**, pp.519-543.

Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **2**, pp.49-56, Melbourne: PME.

_____ (2006). Improving student teachers' understanding of fractions. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **2**, pp.41-48, Prague: PME.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In M. Landau (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.91-126), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context, *Educational Studies in Mathematics* **15**, pp.129-147.

Boulineau, T., Fore, C., Hagan-Burke, S., & Burke, M. D. (2004). Use of story-mapping to

increase the story-grammar text comprehension of elementary students with learning disabilities, *Learning Disability Quarterly*, **27**, pp.105-121.

Brewer, W. F., & Lichtenstein, E. H. (1981). Event schemas, story schemas, and story grammars. In J. D. Long, & A. D. Baddeley (Eds.), *Attention and performance IX* (pp.363-379), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three, *Journal for Research in Mathematics Education* **15**, pp.179-202.

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Bebout, H. C. (1988a). Representation of addition and subtraction word problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **19**, pp.345-357.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes, *Journal for Research in Mathematics Education* **24**, pp.428-441.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics cognitively guided instruction*, Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988b). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **19(5)**, pp.385-401.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **12**, pp.27-39.

_____ (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems, *Educational Studies in Mathematics* **14**, pp.55-72.

Christou, C., & Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **29(4)**, pp.436-442.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **18(5)**, pp.363-381.

Dimino, J., Gersten, R., Carnine, D., & Blake, G. (1990). Story grammar: An approach for promoting at-risk secondary students' comprehension of literature, *Elementary School Journal* **91**, pp.19-32.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education models and processes,* NY: Lawrence Erlbaum.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Merino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education* **16**, pp.3-17.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S. J., & Hamlett, C. L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems, *American Educational Research Journal* **41**, pp.419-445.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Prentice, K., Burch, M., Hamlett, C. L., Owen, R., et al. (2003). Explicitly teaching for transfer: Effects on third-grade students' mathematical problem solving, *Journal of Educational Psychology* **95**, pp. 293-305.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.243-275), NY: Macmillan.

Gardill, M. C., & Jitendra, A. K. (1999). Advanced story map instruction: Effects on the reading comprehension of students with learning disabilities, *Journal of Special Education* **33**, pp. 2-17.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers, *Journal of Educational Psychology* **87**, pp.18-32.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding,* Portsmouth, NH: Heinemann.

Jonassen, D. H. (2003). Designing research-based instruction for story problems, *Educational Psychology Review* **15**, pp.267-296.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of the rational numbers. In R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp.101-144), Athens, GA: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing from factions to rational numbers. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics 2001 yearbook* (pp.146-165), Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.93-118), Reston, VA:

Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers'' knowledge of fundamental mathematics in China and the United States*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.85-105), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education* **28(3)**, pp.309-330.

Kilpatrick, j., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up : Helping children learn mathematics*, Washington, DC: National Academy Press.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of sematic categories for addition and subtraction, *Educational studies in mathematics* **13**, pp.373-394.

Ng, S. F., & Lee, K. (2009). The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **40(3)**, pp.282-313.

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help develop fraction concepts. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice* (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia(MERGA), Hobart **2**, pp.601-610), Sydney: MERGA.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.327-361), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Riley, M., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in artithmetic. In H. P. Ginsberg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 53-196), NY: Academic Press.

Romberg, T. A., Collis, K. F., & Grouws, D. A. (1987). Learning to add and subtract, *Journal for Research in Mathematic Education* **2**, pp.i-178.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics courses, *Educational Psychologist* **23**, pp.145-166.

Schwieger, R. D. (1999). *Teaching elementary school mathematics*, NY: Wadsworth Publishing

Company.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **29(3)**, pp.75-80.

Sowder, L. (1988). Children's solutions of story problems, *Journal of Mathematical Behavior* **7**, pp.227-238.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publications.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics* **16**, pp.181-204.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161), Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Image and definition for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education* **20(4)**, pp.356-366.

Xin, Y. P. (2008). The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems: An emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations, *Journal for Research in Mathematics Education* **39(5)**, pp.526-551.

Xin, Y. P., Wiles, B., & Lin, Y. (2008). Teaching conceptual model based word problem story grammar to enhance mathematics problem solving, *Journal of Special Education* **42**, pp.163-178.

The Analysis of Children's Understanding of Addition and Subtraction of Fractions

Kim, Kyungmi

Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701

E-mail : kyungmi@korea.ac.kr

Whang, Woo Hyung

Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701

E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of the study was to investigate how children understand addition and subtraction of fractions and how their understanding influences the solutions of fractional word problems. Twenty students from 4th to 6th grades were involved in the study.

Children's understanding of operations with fractions was categorized into "joining", "combine" and "computational procedures (of fraction addition)" for additions, "taking away", "comparison" and "computational procedures (of fraction subtraction)" for subtractions. Most children understood additions as combining two distinct sets and subtractions as removing a subset from a given set. In addition, whether fractions had common denominators or not did not affect how they interpret operations with fractions. Some children understood the meanings for addition and subtraction of fractions as computational procedures of each operation without associating these operations with the particular situations (e.g. joining, taking away). More children understood addition and subtraction of fractions as a computational procedure when two fractions had different denominators.

In case of addition, children's semantic structure of fractional addition did not influence how they solve the word problems. Furthermore, we could not find any common features among children with the same understanding of fractional addition while solving the fractional word problems. In case of subtraction, on the other hand, most children revealed a tendency to solve the word problems based on their semantic structure of the fractional subtraction. Children with the same understanding of fractional subtraction showed some commonalities while solving word problems in comparison to solving word problems involving addition of fractions.

Particularly, some children who understood the meaning for addition and subtraction of fractions as computational procedures of each operation could not successfully solve the word problems with fractions compared to other children.

* ZDM Classification : C32

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

* Key Words : Fraction, Addition, Subtraction, Understanding, Semantic Structure of Word Problems