

변위구속조건을 받는 경계요소법의 최외측 절점 처리 기법

A Technique for the Extreme nodes of Boundary Element Method with Clamped Boundary Condition

김문겸* · 윤익중**

Kim, Moon Kyum · Yun, Ik Jung

Abstract

In this study, most of famous algorithms for the corner problem are listed. By comparing these with implemented codes and theoretical dissections, new algorithms are developed. These algorithms are combined by the existing auxiliary equations. All relating algorithms are numerically tested with 3 problems. Two problems have well-known analytical solutions and the result of another example is compared with the one of the published paper. The conducted research reveals the characteristics of existing algorithms and demonstrates newly developed algorithms can produce a reasonable solution by reflecting various type of boundary conditions.

Keywords : boundary element method, corner problem, multi-valued traction, clamped boundary conditions

요 지

본 논문에서는 경계요소법의 모서리 문제(corner problem)의 해결책으로 제시된 다양한 알고리즘을 비교하였다. 비교를 위해 각각 기법을 반영한 프로그램을 작성하고, 이론적 바탕을 토대로 하여 기존의 방법 중 상호간에 새롭게 조합될 수 있는 추가조건식(auxiliary equation)을 찾아 새로운 알고리즘을 구성하였다. 새롭게 구성된 알고리즘과 기존 알고리즘에 대하여 3 가지 종류의 수치 실험을 수행하였다. 수치해석모형은 정해가 알려진 2개의 문제와 기존 연구에서 제시된 한 개의 예제에 대하여 수행하였다. 이상을 바탕으로 기존 알고리즘의 특성을 기술하고 새롭게 제시된 알고리즘이 다양한 형태의 표면력을 반영할 수 있음을 보였다.

핵심용어 : 경계요소, 모서리 문제, 다가 표면력, 변위구속조건

1. 서 론

자연계에서 발생하는 현상을 이론적으로 해석하는 것은 직관적이고 정확한 결과를 도출할 수 있으나, 대상의 형상이 복잡하거나 다양한 경계조건인 경우 이론해의 도출이 어렵고 많은 노력이 필요하다. 따라서 유한차분법과 유한요소법과 같은 수치해석기법이 출현하게 되었다. 비록 유한요소법이 현재 수치해석분야를 선도하고 있는 패러다임일지라도 보다 효율적인 형태의 수치기법을 찾기 위한 연구는 지속되고 있으며 경계요소법도 그러한 맥락에서 발전하고 있다(Balazs 등, 1989).

경계요소법은 Rizzo(1967)가 경계적분방식을 통하여 탄성문제를 해석한 것을 시발점으로 하고 있으며, 후에 유한요소법과 같이 고차의 형상함수를 도입하면서 경계요소법의 틀을 만들게 되었다(Rudolphi, 1983). 경계요소법에서는 연속한 형상함수를 적용할 경우, 서로 상이한 법선벡터를 갖는

이웃한 요소가 변위조건으로 구속될 경우 요소사이의 절점에서 단일하지 않은 표면력(multi-valued traction)이 생기는 모서리 문제(corner problem)가 나타나게 된다(Paris 등, 1997). 모서리 문제에 대한 초기의 접근은 등변형요소나 불연속요소를 이용해 모서리를 깎거나(round-off), 모서리의 절점이 유일한 표면력을 갖는다는 가정을 사용하는 것이었다(Brebbia, 1978; Jawsone 등, 1977). Lachat(1975)이 이러한 가정에서 발생하는 오차는 전체계로 방사된다는 견해를 밝힌 바 있으나 보다 정확한 해를 얻기 위한 연구가 지속되고 있다.

모서리 문제에 대한 직접적인 해결방안을 제시한 것은 Chaudonneret(1978)으로 Chaudonneret은 Cauchy의 보조정리와 변형을 불변값을 이용하여 2개의 추가조건식(auxiliary equation)을 구성하는 방안을 제시하였다. 이 방법은 Rudolphi(1983)에 의하여 2차 연속 형상함수를 갖는 경계요소법으로 구현된바 있다. Paris 등(1980)은 모서리 문제가

*정회원 · 교신저자 · 연세대학교 사회환경시스템공학과 교수 · 공학박사 (E-mail : applymkk@yonsei.ac.kr)

**연세대학교 사회환경시스템공학과 박사과정 (E-mail : ijloved@yonsei.ac.kr)

발생하는 조건이 변위에 의한 구속임에 주목하여 경계조건으로부터 직접 주응력과 표면력의 관계식을 도출하였다. 이 방법을 이용하면 경계적분없이 직접 표면력을 구할 수 있으나, 직접 구할 경우 변위의 분포에 대한 가정이 해석 값에 지나친 영향력을 끼칠 수 있는 단점이 있다(Sldek, 1991). 또한, Gao 등(2000)은 전단응력이 상수 형임을 이용해 추가보조식을 적용하여 3차원 부영역 문제에 적용한 바 있다.

이와 같이 개별적으로 개발된 기법이 비교적 효율적인 결과를 산출하고 있으나 알고리즘간의 장단점이 명확하지 않음으로, 본 논문에서는 각각의 알고리즘을 구현하여 수치해석예제에 적용하여 그 결과를 상호 비교하여 그 특징을 분석하고자 한다. 또한, 기존의 알고리즘을 분석하여 새롭게 조합함으로써 모서리 문제를 해결할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 경계요소법의 정식화

경계요소법은 선형 등방성 탄성 재료가 정하중 상태에서 미소변형거동을 하고, 물체력을 고려하지 않는다면 Somiglian의 정리에 따라 식 (1)의 형태를 갖는다.

$$C_{ij}(P)u_i(P) = \int_T [U_{ij}(P, Q)t_j(Q) - T_{ij}(P, Q)u_j(Q)]dT_Q \quad (1)$$

여기서, P와 Q는 영역의 경계(T)에 존재하는 임의의 점을 의미하며, u 와 t 는 해당 점의 변위벡터와 표면력 벡터이다. $C_{ij}(P)$ 는 경계요소법의 자유항(free term)을 의미하며 켈빈 문제의 기본해는 각각 $U_{ij}(P, Q)$ 와 $T_{ij}(P, Q)$ 로 표현하였다. 해석 영역을 식 (2)의 형상 함수를 사용해 이산화(discretization) 하면 식 (1)은 식 (3)의 형태로 간략히 표현할 수 있다.

$$u = \frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2 \quad (2)$$

$$t = \frac{1}{2}(1-\xi)t_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)t_2 \quad (3)$$

벡터 u 와 t 는 변위와 표면력을 나타내며, 행렬 H와 G는 기본해와 형상함수의 곱을 적분하여 구할 수 있다. 그림 1 (김문경 등, 2009)은 선형요소의 변위와 표면력의 분포를 나타낸 것으로 만일 절점 k 가 변위구속(clamped) 된다면 선행요소 k 요소의 선절점과 후행요소 $k-1$ 요소의 후절점의 표면력이 모두 미지값이 됨으로, 한 절점에서 과도한 미지값이 발생하게 된다.

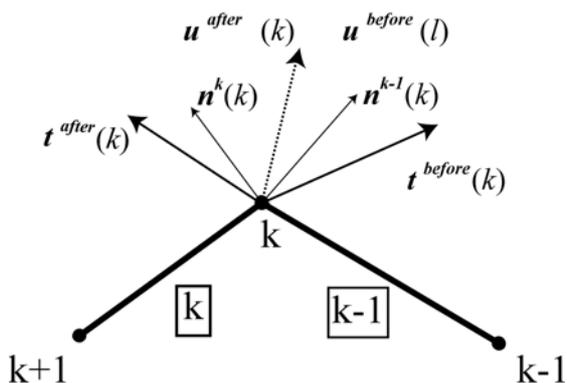


그림 1. 경계절점위의 표면력과 변위분포

3. 모서리 문제에 대한 보조방정식의 구성

3.1 Chaudonneret의 방법

만일 모서리 절점위의 응력이 연속성을 갖는다면 식 (4), Cauchy의 보조정리를 식 (5)로 쓸 수 있다. 여기서 $n_i^{direction}$ 의 하첨자는 법선방향의 성분이며, 상첨자는 그림 1 처럼 절점이 속한 요소를 의미한다.

$$\sigma_{ij}(k)(n_i^{after} n_j^{before} - n_i^{before} n_j^{after}) = 0 \quad (4)$$

$$t_i^{after}(k)n_i^{before} - t_i^{before}(k)n_i^{after} = 0 \quad (5)$$

두 번째 추가조건식은 Hooke의 법칙과 변형률 불변의 법칙을 조합하여 식 (6)을 구성한 뒤 식 (7)과 같이 정리하여 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lambda_{e_{kk}}(k) &= [\sigma_{ij}(k) - 2\mu\varepsilon_{ij}(k)]n_i^{after} n_j^{after} \\ &= [\sigma_{ij}(k) - 2\mu\varepsilon_{ij}(k)]n_i^{before} n_j^{before} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} t_i^{before}(k)n_i^{before} - t_i^{after}(k)n_i^{after} \\ = -2\mu u_{i,j}(k)(n_i^{after} n_j^{after} - n_i^{before} n_j^{before}) \end{aligned} \quad (7)$$

3.2 Gao 등의 방법

Gao 등(2000)은 식 (8), (9), (10)에 나타난 바와 같이 전체좌표계의 값을 국부좌표계로 좌표 변환했을 때의 특징을 이용하여 일반적인 경우에 적용할 수 있는 추가조건식을 구성하였다.

$$x'_i = L_{ij}x_j \quad (8)$$

$$t'_i = L_{ij}t_j \quad (9)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (10)$$

위의 식을 통하여 표면력을 국부좌표계로 변환하였을 경우 식 (11)과 같이 기술할 수 있다.

$$\frac{\partial t'_k}{\partial x'_k} = L_{ki} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_k} n_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} n_j \quad (11)$$

식 (11)은 평행방정식을 이용하여 식 (12)와 같이 유도되며, 정하중 상태에서 물체력을 무시하는 경우 식 (13)과 같이 추가 조건식을 기술할 수 있다. 식 (12)의 ρ 는 물체의 밀도이며 f_i 는 물체력의 방향성분이다.

$$\frac{\partial t'_k}{\partial x'_k} = (\rho \ddot{u}_i - f_i) n_i \quad (12)$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x'_p} L_{pi} \frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi_k} t_i^\alpha = 0 \quad (13)$$

식 (13)의 N^α 와 t_i^α 의 상첨자 α 는 요소의 절점순서이며 N 은 형상함수를 의미한다. 식 (13)은 2차원의 경우 절점의 선행요소와 후행요소에 각각 적용할 수 있으므로 2개의 추가조건식을 구성할 수 있다.

3.3 Paris의 방법

해석영역내에서 변위가 연속성을 갖는다고 가정을 할 경우 변위경계조건이 주어진 절점의 형상함수에 따라 변형률의 분포가 결정된다. 변형률의 분포가 결정되면 식 (14)와 같이 주변형률을 구할 수 있다.

$$\varepsilon_p, \varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2} \quad (14)$$

등방성 매체에서는 주변형률의 방향과 주응력의 방향이 동일함으로 이를 이용하여 식 (15)와 같이 표면력을 주응력에 대한 식으로 간단히 유도할 수 있다. 식 (15)의 σ 와 γ 는 표면력의 법선방향성분과 접선방향성분을 의미하며 α 는 주응력방향의 각을 뜻한다.

$$\begin{aligned} \sigma^k(k) &= a\sigma_1(k) + b\sigma_{II}(k) \\ \gamma^k(k) &= c\sigma_1(k) + d\sigma_{II}(k) \\ a &= (\cos\alpha(n_2^k(k)) + \sin\alpha(n_2^k(k)))^2 \\ b &= (\cos\alpha(n_2^k(k)) - \sin\alpha(n_1^k(k)))^2 \\ c &= -d = (-\cos\alpha(n_2^k(k)) + \sin\alpha(n_1^k(k))) \\ &\quad \times (\cos\alpha(n_1^k(k)) + \sin\alpha(n_2^k(k))) \end{aligned} \quad (15)$$

표면력이 주응력의 함수로 구성되면 절점에서 발생하는 2개의 표면력벡터의 미지값을 1개의 주응력벡터로 치환할 수 있으므로 Chaudonneret(1978)의 방법이나 Gao 등(2000)의 방법과는 달리 추가조건식의 구성없이 최종 계의 방정식을 구성할 수 있다.

3.4 추가조건식의 재구성

이상에서 살펴본 비와 같이 선형 이상의 연속요소를 사용할 경우 발생하는 모서리 문제의 합리적인 해결을 위해, 다양한 방법이 제시되어 왔다. 3.1과 3.2의 방법은 응력텐서의 대칭성과 Hooke의 법칙과 같은 연속체 이론의 기본이론을 이용하여 유도되었으므로 이를 혼합하여 적용이 가능하다. 본 논문에서는 이를 이용하여 2가지의 새로운 추가조건식을 아래와 같이 구성하였다. 이와 같은 새로운 추가조건식은 다영역의 접촉문제나 경계문제를 해석할 때 발생하는 미지 변수의 수를 줄이는 적용될 수 있으며 예상되는 표면력의 형태에 따라 보다 적합하게 적용할 수 있을 것으로 사료된다. Cauchy의 보조정리와 Gao의 추가조건식을 이용한 추가조건식을 식 (16)에 나타내었다.

$$\begin{bmatrix} n_x^{before} & n_y^{before} & -n_x^{after} & -n_y^{after} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x^{k,after} \\ t_y^{k,after} \\ t_x^{k,before} \\ t_x^{k,before} \\ t_x^{k,before} \\ t_t^{k+1,before} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (17)은 식 (16)에 Cauchy의 보조정리 대신 Chaudonneret의 2번째 식과 Gao의 식을 이용하여 구성한 것이다.

$$\begin{bmatrix} n_x^{after} & n_y^{after} & -n_x^{before} & -n_y^{before} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x^{k,after} \\ t_y^{k,after} \\ t_x^{k,before} \\ t_x^{k,before} \\ t_t^{k,after} \\ t_t^{k+1,before} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서 상수 C는 식 (7)의 우변항의 값과 같다. 다만 대부분의 경계요소해석 프로그램의 구현 시에는 마지막으로 구성되는 식 (3)과 같은 계의 방정식의 안정성을 위하여 표면력을 탄성계수(E)나 전단탄성계수(G)를 이용하여 행렬 요소의 크기를 조정하여야 한다.

4. 수치실험

4.1 일축응력을 받는 사각 판의 해석

개발된 프로그램의 검증에 위해 평면응력상태에서 하중을 받는 사각 판 문제를 설정하였다. 일축응력을 받는 사각 판이 그림 2의 좌측과 같은 경계조건일 경우 그림 2의 우측과 같은 변위분포를 나타내게 된다. 이와 같이 해가 알려진 문제를 경계요소해석 프로그램의 검증 문제로 잡을 경우 다양한 경계조건에 대하여 실험하여 프로그램의 안정성과 신뢰성을 확인할 수 있는 장점이 있다(Paris, 1997). 따라서 본 논문에서는 포아송비가 0.25이고 탄성계수 210,000 Mpa인 사각 판에 그림 2의 우측과 같은 변위를 재하하여 그림 2의 좌측과 같은 표면력이 발생하는 지를 검토하였다. 해석결과는 판의 하단과 우측에서 추출하여 그림 3에 도시하였다.

그림 3의 범례의 CH_Gao는 Chaudonneret의 첫 번째 추가조건식과 Gao의 추가조건식을 결합한 경우이며, CA_Gao는 Cauchy의 보조정리와 Gao의 식을 결합한 것이다. 선 AB 위의 법선방향 표면력은 모든 방법이 이론값인 100

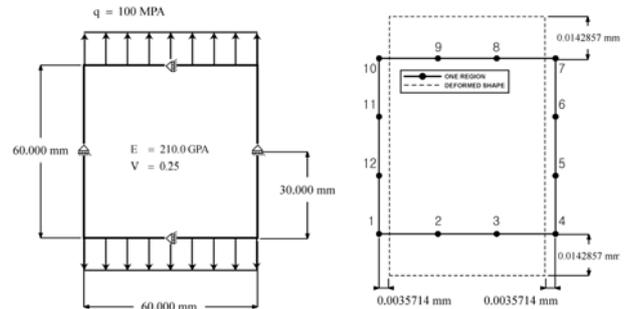


그림 2. 축하중을 받는 사각 판 모형과 변위분포

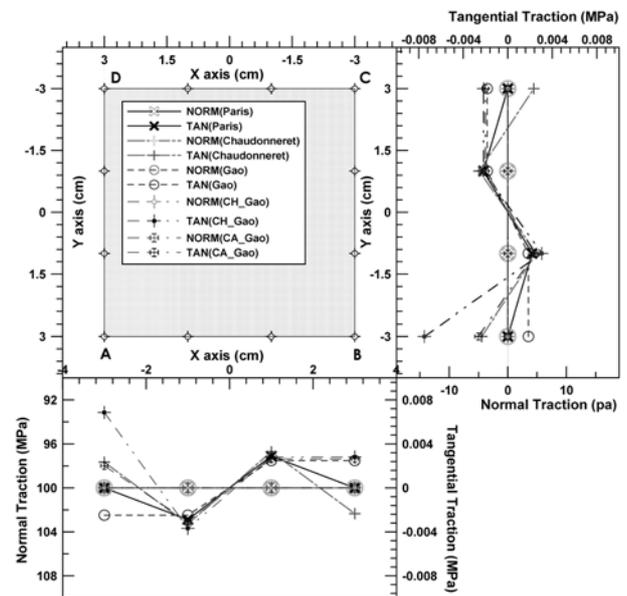


그림 3. 12절점을 적용하였을 경우의 해석결과

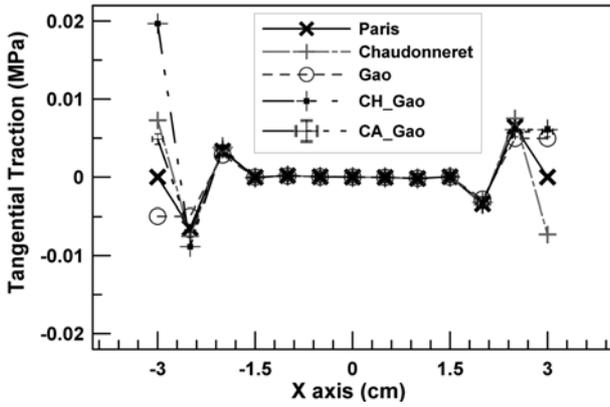


그림 4. 48절점의 해석결과(선 \overline{AB} 위의 값)

MPa의 값을 나타냈으며 접선방향 표면력의 값은 Paris의 방법만 양 끝절점에서 이론값과 일치하는 값을 주었다. Gao의 방법은 접선방향 표면력이 상수 값으로 일정하게 나타났으며 약 -2.5 kPa의 값을 보였다. Chaudonneret의 방법은 약 2.3 kPa의 값을 보였다. Chaudonneret의 2번째 추가조건식과 Gao의 방법을 결합한 경우 결합방식에 따라서 2가지 방식의 특성이 동일하게 나타나는 것을 관찰할 수 있다. 다만 Chaudonneret의 보조정리에 의한 값이, 모델 좌측하단의 A점에서의 접선방향 표면력의 크기가 -6.9 kPa로 다른 방법에 비해 크게 발생하는 것을 확인할 수 있었다. B점에서는 약 2.8 kPa로 기존의 3가지 방법과 유사한 값을 얻을 수 있었다. Cauchy의 보조정리와 Gao의 방법을 A점에서 약 2.0 kPa, B점에서 약 2.6 kPa로 기존의 값보다 안정적인 값을 추출할 수 있었다. 선 \overline{CD} 위의 경향도 이와 유사함을 확인할 수 있다. 접선방향 표면력 값을 표 1에 정리하였다. 이상의 결과를 통하여 제시한 방법과 기존의 방법이 변위구속 조건을 갖는 문제의 법선방향 표면력을 정확히 산출할 수 있음을 확인하였으며, 접선방향의 표면력은 각 값의 기본가정에 따라 다른 형태가 나타나는 것을 확인하였다.

표 1. 선 \overline{AB} 와 \overline{BC} 위의 접선방향 표면력(단위: kPa)

| 구분 | Paris | Chaudonneret | Gao | Chaudonneret +Gao | Cauchy+Gao |
|-----------------------|--------|--------------|--------|-------------------|------------|
| \overline{AB} 위의 절점 | 0.000 | 2.342 | -2.483 | 6.861 | 2.008 |
| | -2.890 | -3.287 | -2.483 | -3.684 | -3.060 |
| | 2.890 | 3.287 | 2.483 | 2.808 | 2.639 |
| | 0.000 | -2.342 | 2.483 | 2.808 | 2.639 |
| \overline{BC} 위의 절점 | 0.000 | -2.342 | 1.852 | -7.492 | -2.639 |
| | 2.178 | 2.574 | 1.852 | 3.053 | 2.429 |
| | -2.178 | -2.574 | -1.852 | -2.176 | 2.008 |
| | 0.000 | 2.342 | -1.852 | -2.176 | 2.008 |

표 2. A절점에서의 접선방향 표면력 (단위: Mpa)

| 구분 | Paris | Chaudonneret | Gao | Chaudonneret +Gao | Cauchy+Gao |
|------|-------|--------------|---------|-------------------|------------|
| 12절점 | 0.000 | 0.002 | -0.0025 | 0.007 | 0.002 |
| 48절점 | 0.000 | 0.007 | -0.006 | 0.020 | 0.005 |
| 비 | - | 3.50 | 2.40 | 2.86 | 2.50 |

표 3. A절점의 이웃절점 접선방향 표면력 (단위: Mpa)

| 구분 | Paris | Chaudonneret | Gao | Chaudonneret +Gao | Cauchy+Gao |
|------|--------|--------------|--------|-------------------|------------|
| 12절점 | -0.003 | -0.003 | -0.003 | -0.004 | -0.003 |
| 48절점 | -0.006 | -0.008 | -0.006 | -0.009 | 0.007 |
| 비 | 2.00 | 2.67 | 2.00 | 2.25 | -2.33 |

표 4. A요소의 접선방향 하중 (단위: 10 kN)

| 구분 | Paris | Chaudonneret | Gao | Chaudonneret +Gao | Cauchy+Gao |
|------|--------|--------------|--------|-------------------|------------|
| 12절점 | -0.003 | 0.009 | -0.009 | 0.003 | -0.001 |
| 48절점 | -0.002 | -0.0003 | -0.003 | 0.0028 | 0.003 |

보다 세밀한 요소 망을 구성하였을 때의 거동을 확인하기 위하여 절점의 수가 4배 많은 48절점에 대하여서도 같은 해석을 수행하였다. 법선방향의 결과는 100 Mpa의 값으로 이론값과 동일한 결과를 모든 방법이 산출하고 있어 그림 4에는 선분 \overline{AB} 위의 접선방향 표면력만 도시하였다. 절점의 수가 증가하여도 모서리 절점과 이웃한 절점에서는 절점이 적은 경우와 유사한 형태의 표면력 분포가 나타났다. 하지만, 표면력의 출렁거림은 모서리 절점에서의 거리가 멀어질수록 빠르게 사라지는 것을 관찰할 수 있다. 결과 값의 비교를 위하여 표 2에 12절점의 접선방향 표면력과 48절점의 것을 정리하였다.

표 3에는 A절점과 시계방향으로 이웃한 절점에서의 접선방향 표면력을 정리하였으며 이를 토대로 표 4에 A요소에서 발생하는 접선방향 하중을 정리하였다. 접선방향 하중은 표면력을 길이방향으로 적분해 구하였다. 표 2과 3에서 나타나듯이 보다 세밀한 요소를 사용하였을 경우 표면력과 이론식의 오차가 더욱 크게 발생하였으나 요소에 작용하는 하중으로 환산하였을 경우 Chaudonneret의 경우에 가장 작은 값인 -0.03 kN이 발생하였다. 이론해의 접선방향 표면력의 값이 존재하지 않으므로 이와 비교하면 이론해에 수렴한다고 판단된다. 따라서, 이러한 특징으로부터 각 방법에 의하여 나타나는 접선방향 표면력의 오차가 전체계에 있어서는 평형조건을 만족시키고 있음을 확인할 수 있으며 단일영역이 축방향력을 받고 있을 경우 Paris의 방법을 적용하는 것이 가장 합리적임을 확인할 수 있다. 또한 Paris의 방법은 다른 방법과 달리 추가조건식의 구성이 필요 없어 최종 방정식의 크기가 줄어드는 장점이 있으나, 다중 영역을 구성하는 문제에 대해서는 적용할 수 없다.

4.2 이축응력을 받는 사각판의 해석

4.1절의 일축응력을 받는 사각판 문제를 확장하여 양축으로 동일한 표면력이 가해질 경우에 대하여 해석을 수행하여 그 결과를 그림 5에 정리하였다. 법선방향 표면력의 경우 모든 절점에서 이론값인 100 Mpa에 근사하였으므로 법선방향 표면력은 도시하지 않았다. 접선방향 표면력의 경우 Gao의 방법을 제외하고는 거의 일치하는 경향을 보였으며, 표면력의 변동의 폭도 하중이 증가하였음에도 불구하고 0.001 Mpa로 매우 작은 값이 나왔다. 이는 4.1절의 문제를 변위구

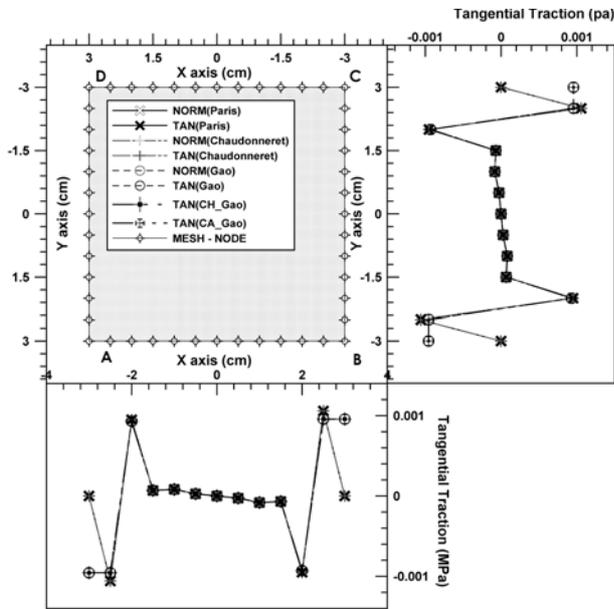


그림 5. 이축응력문제의 접선방향 표면력(선 \overline{AB})

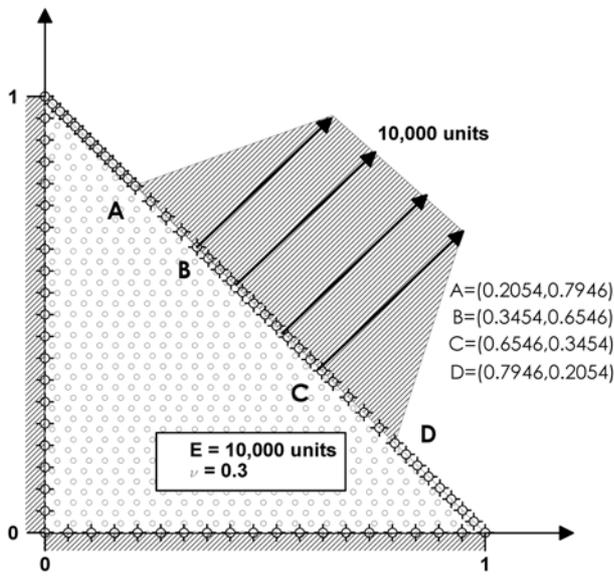


그림 6. 하중을 받는 삼각판의 요소망

속조건을 통하여 해석하였지만 실제 문제의 구성은 선분 \overline{BC} 와 \overline{CD} 의 법선방향 변위가 구속되어 있고, 접선방향 표면력이 자유면의 조건을 갖는 문제와 동일해짐으로 보다 약한 구속조건인데 비하여, 이축응력을 받는 경우는 선분 \overline{BC} 와 \overline{CD} 에 가해지는 조건이 보다 명확한데서 기인하는 것으로 판단된다. 또한 3절에서 기술한 추가조건식을 통하여 짐작할 수 있듯이 Gao의 방법은 절점을 두고 이웃한 요소의 표면력이 평형을 이루고 있는데 비하여, 다른 방법들은 이웃한 요소내에서 개별적인 표면력의 평형조건이 기술되어 있어 표면력의 분포가 다른 형태로 나타남을 확인할 수 있다.

4.3 혼합경계조건을 갖는 삼각판의 해석

축하중을 받는 경우외의 경우를 검토하기 위하여 Mitra 등(1993)이 북절점을 이용하여 해석한 혼합경계조건을 갖는 삼각판문제를 해석하였다. 해석에 사용된 요소망과 경계조건은 그림 6에 도시한 바와 같이 삼각판의 하부와 좌측부는 변위 구속되어 있으며, 경사면에서 10,000 units 만큼의 하중

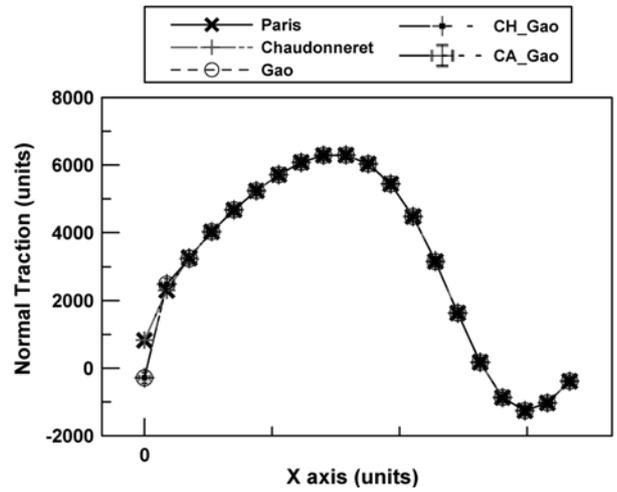


그림 7. 삼각판 하부의 법선방향 표면력 분포

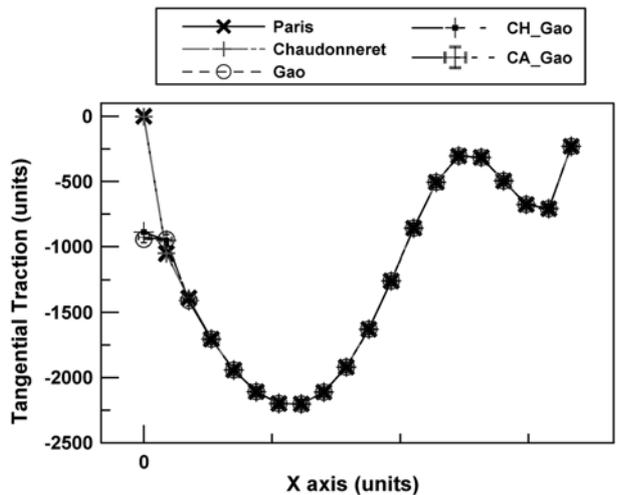


그림 8. 삼각판 하부의 접선방향 표면력 분포

을 받고 있다. 모형에 사용된 탄성계수는 10,000이며, 포아송비는 0.3이다. 요소망은 총 79개의 절점을 사용하여 구성하였으며, 이 경우 추가조건식을 요구하는 절점은 (0,0)위치의 절점 한 개다.

해석에 의한 법선방향과 접선방향의 표면력을 그림 7과 8에 도시하였다. 대부분의 기법에 의한 결과가 변위가 강하게 구속되어 있는 하나의 절점을 제외하면 거의 정확하게 일치하고 있으며 Paris와 Chaudonneret은 접선방향의 표면력의 정확한 값을 주고 있는 것을 확인할 수 있다. 그에 비하여 Gao의 추가조건식은 944 units 정도로 비교적 큰 차이를 보이고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 선형 이상의 연속요소가 변위경계조건을 받을 경우 발생하는 과도한 미지값의 처리를 위한 기존의 연구들을 소개하고, 이를 수치적으로 구현하였다. 또한 기존 알고리즘을 이용하여 모서리 문제에 적용할 수 있는 새로운 알고리즘을 개발하였다. 각각의 알고리즘은 수치실험을 통하여 그 특성을 분석하였으며, 개발된 프로그램의 결과를 검증하였다. 연구를 통하여 도출된 결과는 아래와 같다.

1. 모서리 문제를 다루는 알고리즘 중 논문에서 수행된 예제

- 에 대해서는 Paris의 알고리즘이 가장 좋은 거동을 보였다. Paris의 알고리즘을 적용할 경우 해당 절점에서 이론해와 일치하는 근사해를 얻을 수 있었다. 비록 해당절점에 이웃하는 요소에서 표면력이 크게 발생하였지만 다른 알고리즘에 비하여 작게 발생하였으며, 하중으로 환산한 경우에도 이론해에 가장 근접하였다.
2. Chaudonneret과 Gao 등이 제시한 방법은 이론해에 근거하여 유도되어 적용의 제약폭이 적은 장점이 있어 Paris의 방법과 달리 과도한 미지값이 변위로 설정되는 경우에도 적용할 수 있으며 각각의 추가조건식을 서로 결합하여 새로운 알고리즘을 만들어 사용할 수 있다.
 3. 추가조건식을 적용하는 경우 해석계의 방정식의 크기가 늘어나게 되어 해석시간이 더 소요되는 단점이 있으나, 다수의 영역이 필요한 문제에 적용가능하다.
 4. 적용된 모든 방법이 해석영역 전체에 있어서는 정해에 근사하지만, 변위로 완전구속된 요소의 중간절점과 그 이웃의 절점에서는 표면력이 서로 다른 값을 보였다. 요소망을 더욱 세밀하게 자르는 경우에도 이 값들의 차이는 줄일수 없지만, 표면력의 적분항으로 표현되는 하중의 크기는 더욱 정해에 근사한 값을 얻을 수 있다.
 5. 제안된 모서리 처리 알고리즘중 Chaudonneret의 두 번째 조건식과 Gao 등의 식을 결합한 것보다, Cauchy의 보조정리와 Gao 등의 식을 결합한 것이 보다 정해에 가까운 거동을 보였다.
 6. 1축하중이 가해진 사각판보다 2축하중이 가해진 사각판의 경우 해석결과와 신뢰도가 높게 나온 것을 마무리, 적절한 경계조건을 사용하는 것이 해석결과와 신뢰도를 높일 수 있을 것으로 추정된다. 이런 맥락에서 제안된 알고리즘을 이용할 경우 다양한 형태의 표면력 분포를 고려할 수 있는 장점이 있다.

김문겸, 윤익중(2009) 경계요소법을 이용한 접촉해석의 효율적인 접촉면 검출기법, 한국전산구조공학회논문집, 한국전산구조공학회, 제22권 제5호, pp. 439-444.

Balaš, J., Sldek, J., and Sldek, V. (1989) *Stress analysis by boundary element methods*, Elsevier, New York, N.Y.

Sldek, J. and Sldek, V. (1991) Why use double nodes in BEM?, *Engn. Anal. with Bound. elem.*, Vol. 8, pp. 109-112.

Gao, X.W. and Davies, T.G. (2000) 3D multi-region BEM with corners and edges, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 1549-1560.

Mitra, A.K. and Ingber, M.S. (1993) A multiple-node method to resolve the difficulties in the boundary integral equation method caused by corners and discontinuous boundary conditions, *Int. J. Nur. Meth. Engn.*, Vol. 36, pp. 1735-1746.

Rizzo, F.J. (1967) An integral equation approach the boundary value problems of classical elastostatics, *J. of Applied Math*, Vol. 25, pp 83-95.

Rudolph, T.J. (1983) An implementation of the boundary element method for zoned media with stress discontinuities, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 19, pp. 1-15.

Paris, F. and Cañas, J. (1997) *Boundary element method : fundamentals and application*, Oxford University Press.

Brebbia, C.A. (1978) *The boundary element method for engineers*, Pentech Press.

Lachat, J.C. and Watson, J.O. (1976) Effective numerical treatment of boundary integral equation, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 10, pp. 991-1005.

Lacht, J.C. (1975) *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*, PhD. thesis, University of Southampton.

Chaudonneret, M. (1978) On the discontinuity of the stress vector in the boundary integral equation method for elastic analysis, *In Recent Advances in Boundary Element Method.*, C.A.Brebbia, ed., pp. 154-94. Pentech Press.

Paris, F. and Alarcon, E. (1980) SERBA: a B.I.E program wih linear elements for 2-D elastostatics analysis, *Advances in Engineering Software*, Vol. 2, pp. 79-87.

(접수일: 2009.12.8/심사일: 2009.12.29/심사완료일: 2010.2.19)